29,859/C/2
9/-
3157
15/-



LUGD. BAT. Apud JANSSONIOS VANDER Aa. Bibliopolas.

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII,
Dum viveret Zelemii Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN PRIMUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

= HUYGENS

WELLCOME HISTORICAL MEDICAL LIBRARY

G. J. 'sGRAVESANDE

L. S.

ILlos de re litteraria bene mereri, ſemper perſuaſum habui, qui doctorum virorum ſcripta diſperſa colligunt; & minoribus, ſeorſim perituris, in majori volumine collocatis poſteritatem quaſi donant.

Hac de cauſa cùm Bibliopolæ hujus Urbis, Janſonii vander Aa, *mihi declararent, ſe in mente habere* Hugenii *opus, olim* Pariſiis *editum,* de Horologio Oſcillatorio *typis mandare, & hac de re quid ſentirem ego quærerent, Ipſis Auctor fui, ut non modo in propoſito perſeverarent, ſed ut omnia ante edita ejuſdem Auctoris opera minora huic adjungerent.*

 In

In me libenter ſuſcepi curam colligendi hæc, & diſponendi; ſchedaſque ſemel & altera vice a correctore examinatas, ipſe attente relegi, & cum figuris contuli; ſcripta etiam quædam, in Diariis non ſub Auctoris oculis edita, ſæpe mendis variis purgavi.

Opera quæ hic exſtant, in quatuor diſperſi tomos; quæ Mechanicam Machinaſque ſpectant tomo primo continentur: Geometrica ſecundo: Aſtronomica tertio: Miſcellanea pauca quarto.

Tractatus varios Auctor ſeparatim ediderat; ſcripta minora multa in Diariis diſperſa dantur: inter hæc quædam ſpectant controverſias quæ Auctori cum viris doctis intercedere, & quæ ad eandem controverſiam pertinent, aliquando in variis regionibus publicata exſtant, partim Gallicè conſcripta, partim Latinè.

In edendis libris, ſeparatim ab Auctore publici juris factis, exemplaria manu ipſius recognita, & in variis locis aucta, & emendata, ſecutus ſum; quod etiam referri debet ad ſcripta pauca ex iis quæ in Diariis fuere tradita.

Exemplaria hæc accepi à Nob. D[no] Hugenio *Zelemii Toparchâ, qui patrui* Chriſtiani *opera hæc cum*

cum cura ſervaverat, & qui libenter mihi hæc ea lege conceſſit, ut abſoluta editione in Bibliotheca publica Acad. Lugd. Bat. jungantur cum ejuſdem Auctoris manuſcriptis quæ ibi ſervantur.

In Indice, ad calcem libri adjecto, monui ubi ſcripta ſingula antea edita fuere. Tractatus ſeparatos Latine Auctor conſcripſit, præter Inſtitutionem de Uſu Horologiorum, quæ Belgico ſermone in lucem prodiit. Ex Gallicis Diariis excerpta ſcripta Gallico ſermone conſcripta dantur. Illorum autem quæ inter opera Acad. Reg. Paris. Artium & Scient. cum publico communicata fuere, quædam Gallica ſunt reliqua Latina, nempe;* * pag. 193.

De potentiis funeſve trahentibus *: * pag. 287.

Conſtructio loci ad Hyperbolam *: * pag. 485.

De maximis & minimis *: * pag. 490.

De inveniendis tangentibus *. * pag. 498.

Ut omnia Latino ſermone exhiberentur, quæ Belgicè, aut Gallicè, edita fuere, Latinè reddidit Clariſſ. Hermanni Ooſterdyk Schacht, *Med. Profeſſoris in hac Acad. Celeberrimi, Filius Digniſſimus* Johannes Ooſterdyk Schacht, *qui ad ſtudia ſubtiliora na-*

tus, à naturâ acceptum, adhuc dum juvenis, diligentiâ pulcherrime excoluit ingenium.

Si collectioni huic volumen operum poſthumorum Hugenii, *& tractatus duos de* Lumine & Gravitate, *addas, omnia B. L. habebis* Hugenii *opera.*

Hæc autem quæ hic deficiunt, eâdem formâ cum hiſce, brevi edituri ſunt Bibliopolæ Amſtelodamenſes Waesbergii.

Dabam Lugd. Bat. 3°. Id. Mart. MDCCXXIV.

HU-

HUGENII VITA.

CHriſtianus Hugenius, natus eſt Hagæ Comitum in Hollandia, 14. April. 1629. Patrem habuit Conſtantinum Hugenium, Equitem, Toparcham Zulichemii, Zelhemi, & in Monikenlandt, qui tribus Auriacis Principibus a ſecretis & conſiliis fuit. Mater erat Suſanna van Baerle.

In ſtudiis Mathematicis integram conſumſit vitam, non tantum ſpeculationibus deditus, ſed harum diſciplinarum ſubtiliſſima ad vitæ uſum referens. Ab ipſa infantia huic ſtudio applicavit animum, vix natus annos novem, ipſo Patre duce, in Muſicis, Arithmeticis, Geographicis, miros, & vix credibiles, progreſſus fecit, Latinis & Græcis litteris interim animum applicans.

Anno ætatis decimo tertio quàm ingenium ſtudio Mechanices eſſet aptum, quod tanta deinde hominum utilitate excoluit, in examinandis machinis, haſque, quantum infanti liceret, imitando, demonſtravit.

Anno 1644. ſtudium Matheſeos aggreſſus eſt, Mathematicumque Belgam Stampioen præceptorem habuit.

Sequenti anno Academiam petiit quæ Leidæ eſt apud Batavos. Ibi Vinnium jus civile explicantem audivit, & magiſtro Schotenio ſtudium

Matheſeos continuavit, ingeniique ad hæc ſtudia nati varia tunc temporis dedit ſpecimina, brevique famam inter Mathematicos, annos ſuperantem, acquiſivit.

Studium autem Juridicum Bredæ proſecutus eſt annis 1646, 1647, 1648, occaſione ſcholæ illuſtris, tunc temporis ibi erectæ, & curæ Patris ipſius pro parte commiſſæ.

Hagam anno ſequenti redux, Henricum Comitem Naſſavium ſecutus, Holſatiam, & Daniam, inviſit. Vehementi tenebatur deſiderio in Sueciam uſque iter ſuum producendi, Carteſium ut videret, quod ipſi non licuit, brevi finitâ Comitis legatione.

Anno 1651. Tractatum edidit *de quadratura Hyperboles, Ellipſis, & Circuli, ex dato portionum gravitatis centro* *.

* Vide pag. 309.

Ut librum hunc perluſtrent Lectores rogo Mathematicos, & videant an non merito, in ipſa juventute, inter ſummos Mathematicos relatus fuerit Hugenius.

Eodem anno & ſequentibus varia de refractionibus & Dioptrica conſcripſit, quæ in operibus poſthumis edita exſtant.

Anno 1655. Galliam petiit, & Andegavi Doctor Juris renunciatus eſt.

Eodem anno cum fratre Conſtantino vitris formandis, quæ Teleſcopiis majoribus inſervirent ope-

operam dedit. Teleſcopium decem pedum conſtruxit quod, ut ipſe perſuaſum habebat, omnia illius temporis ſuperabat. Hujus auxilio comitem Saturni detexit. Omnes hujus Planetæ ſatellites tunc temporis Aſtronomos latebant, & niſi multis annis ſerius, reliquos quatuor, inter quos unus Hugeniano à Saturno remotior, detexit Caſinus.

Non ſtatim ſibi novum ſidus cognitum dari cum Aſtronomis communicavit, ad quoſdam tamen inventum, hiſce verbis & litteris involutum, miſit.

Admovere oculis diſtantia ſidera noſtris V V V V V V V C C C R R H N B Q X.

Quæ verba cum adjectis litteris ipſo vitro inſcripſit.

Explicatio eſt *Saturno Luna ſua circumducitur diebus ſexdecim horis quatuor.* Exactius tamen in ſequentibus hujus Lunæ periodum determinavit*. * *Vide pag.* 551.

Tranſpoſitione litterarum Ænigma explicatur.

Per multos annos vitris formandis quibus nova in cœlis detegeret ſedulam cum fratre impendit operam, præcipuè ab anno 1681 ad annum 1687, artemque hanc perfectiorem reddidere; multa ex acuratè admodum elaboratis vitris majora conſtruxere Teleſcopia. Inter vi-

tra hæc duo præ ceteris antecellunt, magnitudine Teleſcopiorum quibus inſervire debent; &, ſi Auctori noſtri fidem habeamus, excellentiâ *; majus deſtinatum erat Teleſcopio ducentorum & decem pedum, alterum Teleſcopio centum & ſeptuaginta. Hæc duo nunc poſſidet Anglia. Multa alia Teleſcopiis, centum pedes excedentibus, ut & minoribus, inſervientia apud heredes adhucdum ſuperſunt.

* *Vide pag.* 698.

Anno 1656 tractatum conſcripſit de ratiociniis in ludo aleæ *, editus hic fuit ad calcem Exercitationum Mathematicarum Schotenii. Methodum in hoc tractatu demonſtravit ipſam ſortem computationi Mathematicæ ſubjiciendi, primuſque publici juris fecit principia artis poſt illum ad vix ſperandam perfectionem prolatæ.

* *Vide pag.* 723.

Anno 1657 primus mortalium tempus exactiſſime menſuravit, pendula dum Horologiis applicavit. Ante illum Aſtronomi adhibitis pendulis tempus quidem menſurabant, ſed ad exigua intervalla, cum pendula talia homine indigerent qui curaret ut in motu perſeverarent. Ipſe autem ope Horologiorum perpetuum quaſi pendulis motum communicavit, ponderibus enim Horologia agitabantur, quæ, non mutata actione in Horologia, elevari poterant.

Perſuaſum habebat talia Horologia & mari uſu venire poſſe, & nil præter hæc in nave requiri ad determinandas longitudines.

No-

Notum enim eſt, utilis hujus longitudinum problematis diu deſideratam, & forte deſiderandam, ſolutionem, ab exacta temporis menſura pendere.

Non tamen ſatis erat Horologiorum motus legibus fixis adſtrinxiſſe, ſed ut ipſe notabat, motum æquabilem ſervare, navim jactantibus auſtris, hoc opus, hic labor erat; difficultatem tamen ſuperari poſſe ſemper ſperavit, multa tentavit, & ad mortem fere uſque nova, ut ad ſcopum perveniret, molitus eſt; ſed licet ad hunc pertingere non potuerit, quo ingenio, qua perſpicacitate, rem proſecutus eſt, qui horum operum tomum primum perleget dijudicabit; non omnia tamen tentamina publici juris facta fuere.

Anno 1659. *Syſtema Saturnium* * edidit, in quo veram cauſam anſarum hujus planetæ tradidit, quam ante illum nemo ne ſuſpicione quidem attingere potuerat, hancque invictis firmavit argumentis.

* *Vide pag.* 527.

Sequenti anno altera vice Galliam petiit, unde in Angliam anno 1661. profectus eſt. Ibi artem ſuam laborandi vitra demonſtravit, cum inter omnes conſtaret, Hugenii Teleſcopia, longitudinem viginti quatuor pedum tunc temporis non excedentia, ceteris omnibus perfectiora eſſe.

Novum tunc temporis inventum erat Antlia pneumatica, hujus, ab ipſo ex Anglia reduce

perfectioris redditæ, auxilio varia inſtituit experimenta *.

* *Vide pag.* 765.

Eodem anno regulas de colliſione corporum Elaſticorum detexit, quas eaſdem poſtea etiam detexere in Anglia viri celeberrimi Walliſius & Wrennius, cum quo tamen ultimo contentionem, ſuper hoc invento, habuit Hugenius noſter.

Anno 1663. Lutetiam Pariſiorum iterum petiit, & cum Patre in Angliam iter ſuſcepit, ubi Sociorum numero Regiæ ſocietatis Londinienſis adſcriptus eſt.

Per paucos tantum ibi ſtetit menſes & in Galliam rediit.

Anno 1664 Hagam redux de invento applicationis pendulorum ad Horologia ipſi cum invidioſo quodam lis fuit.

Hoc tempore, in Gallia, ſtudiorum ſe Mæcenatem demonſtrabat vir Illuſtris Colbertus; cujus conſilia de ſtudiis promovendis libenter audiebat Galliarum Rex. Undique viri ſcientiâ illuſtres in Galliam vocabantur, inter quos Hugenius.

Hic anno 1665, nomine Regis, Colberti litteris, ut Lutetiam peteret, ibique domicilium eligeret, promiſſo largo annuo ſtipendio, oblatâque habitatione in ædificio ſervandis Regiis bibliothecis deſtinato, invitatus eſt.

Ibi vixit ab anno 1666. ad annum 1681. Durante hoc tempore pulcherrima, ſubtiliſſimaque mul-

multa, in Mathematicis detexit, variaque ex iis operibus conſcripſit, quæ nunc in unum corpus collecta, quid in variis Matheſeos partibus præſtiterit, ſub oculis ponunt.

Præter ipſius jam memorata inventa præclara inter alia duo inſigni uſu eminent. Libellam Teleſcopio munitam ita conſtruxit, ut ipſi præ ceteris fides haberi poſſit *. Inventum aliud ſpectat temporis menſuram, Horologiis portatilibus filum, chalybeum, ſpirale, elaſticum, adaptavit *; quo nunc nullum portatile Horologium deſtituitur, quo etiam ſublato, accuratiſſimè conſtructa omnem motus æquabilitatem amittunt.

* *Vide pag.* 254.

* *Vide pag.* 253.

Nimium verò ſtudiis Mathematicis deditus, menti gratum Corpus non potuit ſuſtinere laborem. Bis Hollandiam hac de cauſa petiit, annis 1670, & 1675, iterumque recuperatâ ſanitate in Galliam rediit, ſed tandem valetudini ut conſuleret illi in perpetuum dixit vale anno 1681, omnibuſque Regis beneficiis nuncium remiſit.

Reliquum vitæ curſum iiſdem occupatus ſtudiis abſolvit.

Anno 1682. conſtrui curavit Automaton Planetarium in quo planetarum motus in plano pulcherrime æmulatus eſt.

Machina hæc in operibus poſthumis delineata, & accuratiſſimè deſcripta, datur. Exſtat adhucdum apud hæredes.

An-

Anno 1689. Angliam tertia vice inviſit.

Sequenti anno tractatus duos, alterum de *Lumine*, de *Gravitate* alterum edidit.

Coſmotheoros tempore mortis ſub prælo ſudabat, editio tamen inchoata tantum erat.

Vitam finivit Hagæ Comitum octavo Junii 1695.

Scripta omnia legato dedit Bibliothecæ Academiæ Ordinum Hollandiæ quæ eſt Lugd. Bat. viroſque duos, inſignes Mathematicos, Burcherum de Volder, in eâdem Acad. Philoſophiæ & Math. Profeſſorem celebrem, & Bernhardum Fullenium, in Academiâ Friſiâ Franequeræ Profeſſorem, rogavit ut ex ſcriptis eligerent, quæ prælo committi poſſent, cui petitioni volumen debemus operum poſthumorum, anno 1700. editorum.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA MECHANICA.

TOMUS PRIMUS.

Tomi primi contenta.

Horologium. pag. 1.

Horologium Oscillatorium, ſive de motu pendulorum, ad horologia aptato, demonſtrationes Geometricæ. 15.

Brevis Institutio de usu Horologiorum, ad inveniendas longitudines. 193.

De Hugeniana centri oſcillationis determinatione controversia. 215.

Machinæ quædam, & varia circa Mechanicam. 249.

CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM,

CONST. F.

HOROLOGIUM.

ILLUSTRISSIMIS AC POTENTISSIMIS

HOLLANDIAE
Et
WESTFRISIAE
ORDINIBUS

Dominis ſuis,

CHRISTIANUS HUGENIUS à ZULICHEM

Felicitatem omnem.

PRoditum eſt memoriæ primum Romæ ſolare horologium fuiſſe, quod è capto Siciliæ oppido quodam, annis poſt urbem conditam CCCCLXXVII, *cum cætera præda deportatum ſit, locoque publico dedicatum. Cui non planè ad Latii clima deſcripto, eoque nec lineas horis congruentes exhibenti, quum neceſſitate tamen & meliorum penuria undecentum annis Pop. Romanus paruiſſet, Cenſorem tandem Q. Marcium Philippum diligentius ordinatum juxta poſuiſſe, idque munus inter cenſoria opera gratiſſime acceptum. Mihi, Proceres Ampliſſimi, rem haud abſimilem nec minore publico bono hodie agitanti, ut qui non in una modo urbe, ſed omnium ubivis horologiorum inſtabilem motum correxerim, ſimilem quoque ab univerſis gratiam expectandam cenſuiſſem atque à civibus ſuis Q. Marcius reportavit, ſi, quemadmodum res eventusque iidem ex intervallo redire ſolent, ita priſcus candor & ingenuitas in terris aliquando reduces cernerentur. Verum hæ cum jam diu apud majorem hominum partem deſitæ ſint virtutes,*

contraque impoſtura & obtrectatio late omnia obtineant; quænam fortuna maneret inventum noſtrum, ſimul ac vulgò innoteſcere cœpiſſet, facile equidem prævidi, neque me fefellit augurium. Ecce enim jam primum in patria hac noſtra eo exceſſit quorundam tum audacia tum impudentia, ut nihil interdicto veſtro deterriti, interpolare acceptum à nobis inventum, ac dein tanquam novum prorſus, noſtroque etiam, ſi diis placet, præſtantius jactare auſi ſint. Atque hæc qui coram & ante oculos nobis fieri viderunt, nihilo meliora ab exteris regionibus imminere crebro admonuerunt. Nempe alibi quoque exorituros, & in gloriolam hanc noſtram involaturos homines inique invidos, qui, forte an & ſibi ipſis, certe orbi univerſo perſuadere conentur, non hæc noſtratium ingeniis deberi, ſed à ſua ſuorumve alicujus induſtria diu ante profecta fuiſſe. Cujus rei indignitas cum ad gentem omnem noſtram, eoque ad vos etiam, Domini Illuſtriſſimi, ſpectare videretur, qui nunquam æquo animo tuleritis inventorum longe præclariſſimorum, typographiæ inquam & teleſcopii, laudem à Batavia veſtra, plagiariorum fraude, averti; fateor me non levi ſtimulo impulſum fuiſſe, ut eidem hujus quoque qualiſcunque reperti decus adſererem. Itaque eam quæ ſola ad hoc patere viſa eſt, viam ſecutus, rationem omnem & conſtructionem novi automati, autor ipſe, paucis deſcribendam & in publicum producendam ſuſcepi; exiguo ſanè volumine, ſed quod brevius etiam fuiſſet niſi obiter ad ea quoque reſpondendum duxiſſem quæ à nonnullis objici mihi, ipſumque artificii noſtri fundamentum laceſſere poſſe, proſpiciebam. Hoc vero quicquid eſt operæ, quum melioribus auſpiciis lucem aſpicere non poſſet, veſtro Illuſtriſſimo Nomini ac tutelæ, ea qua decet veneratione, dicatum commiſſumque venio, neque tam pagellas haſce pauculas, quam inventum ipſum, ut videtur, non incelebre futurum, dedico conſecroque. Vos pro ſolita benignitate veſtra favete, ad publicam utilitatem, quoquo modo ſtudia ſua referenti, neque aliud magis in votis habenti, quam ut majoris momenti in rebus eadem poſthac approbare vobis contingat. Ita Rempublicam ſub imperio veſtro incolumem ſervet, beneque fortunet Deus.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM,

CONST. F.

HOROLOGIUM.

TEmporis dimetiendi rationem novam, quam exeunte Anno 1656. excogitavimus, paucisque deinde menſibus in patria divulgare inſtituimus, etſi dubitandum non erat, propter egregiam utilitatem, brevi longe lateque manaturam, quippe pluribus jam distractis, ac dimiſſis quaquaverſum novi operis exemplaribus; nos tamen haud inviti conſiliis eorum obtemperamus, qui ut ſcripto comprehenſam in lucem ederemus, autores fuere. cum ut illos demereamur, ad quos, ob locorum intervalla, tardius fortaſſe perventura erat: tum ut male feriatorum hominum audaciæ obviam eamus, ne, quod ſolenne ipſis eſt, alienis inſidientur inventis, ac per ſummam injuriam pro ſuis venditent. Quanquam hos, ſi fuerit opus, & dati Privilegii tempus refellere poſſit, quod à Celſiſſimis Fœderatarum Provinciarum Ordinibus die 16. Junii Anno 1657. impetratum eſt; & teſtes præterea non pauci, quos de oblato nobis recens invento ſubinde certiores fecimus. Occaſionem ei præbuiſſe Aſtronomorum pendula, facile quivis conjiciet, qui non neſcierit aliquot jam retro annis hæc uſurpari illis cœpta.

Nimirum fallentibus clepſydris automatiſque quibuslibet, quæ inter obſervandum adhibere conſueverant, tandem, docente primum Viro ſagaciſſimo Galileo Galilei, hunc modum inierunt, ut è catenula tenui pondus appenſum manu impellerent, cujus vibrationibus ſingulis dinumeratis, totidem colligerentur æqualia temporis momenta. Hac methodo Obſervationes Eclipſium ſcrupuloſius quam antea peregere, Soliſque item diametrum, & Stellarum diſtantias dimenſi ſunt non infeliciter. Sed præterquam quod deficiebat neceſſario pendulorum motus, niſi adſtantis opera identidem juvaretur, tædioſus inſuper labor evadebat, omnes eorum itus redituſque numerantibus; cui ſane integris noctibus mirabili patientia nonnullos invigilaſſe, ipſis prodentibus, conſtat. Nos autem æquabiliſſimum hocce genus motus cernentes, ac veluti unicum in rerum natura datum, quod ad Mechanicam conſtructionem poſſet traduci, quæſivimus quo pacto hoc ipſum breviſſime aſſequi liceret, atque ita remedium invenire gemino quod retulimus incommodo. Ac multa fabricæ varietate animo perpenſa, hanc denique, quam deinceps tradituri ſumus, ut cæteris planiorem facilioremque ſelegimus. Qua percepta & in publicum porro privatumque uſum, ſicut jam fieri cœpit, converſa, ad univerſos quidem hic fructus redundabit, quod horologiorum, cum inter ſe, tum cum Sole ipſo, quantus nunquam antehac, imo quantus pene optari poſſet, conſenſus animadvertetur. Aſtronomi vero id conſequentur, ut nulla poſthac agitandorum perpendiculorum moleſtia, numerandive ſolicitudine, & illa omnia exequantur, quorum paulo ante meminimus, & alia illis ſubtiliora, ipſam puta dierum de meridie in meridiem inæqualitatem, ſcrutentur; quam qui negare audent, ratione hactenus magis quam certa experientia refutati ſunt. Ut jam de Longitudinum, quam vocant, ſcientia dicere omittam: quæ ſi unquam extitura eſt, deſideratumque tantopere uſum curſui navigantium præbitura, non aliter, quam vectis per mare exquiſitiſſimis atque omni errore vacuis horologiis, id obtineri poſſe, multi nobiſcum exiſtimant. Ve-

rum

rum hæc res vel ipſi mihi, vel aliis quandoque curæ erit. Nunc automaton noſtrum & figura oculis ſubjiciam, & figuram verbis quam potero dilucide explicabo.

Præcipuam operis partem binæ laminæ continent oblongæ atque inter ſe æquales, A B, C D; quibus rotarum axes utrinque inſerti ſunt. Ex laminæ lateribus tantum hic ſunt conſpicuæ: columellas autem quatuor, quibus verſus angulos connexæ ſunt, de induſtria exprimere neglexi, ut ne reliquis officerent. Prima rota ſeu tympanum dentatum eſt E, cujus axi orbiculus quoque F affixus eſt. Huic circumjectus funis cum appenſo pondere Δ, eo quem poſtea dicemus modo. Ponderis itaque vi tympanum E vertitur. Hoc movet proximum tympanum H. hoc rotam L, cujus dentes ad inſtar ſerræ dentium formati ſunt. Hujus prope axem erectus ſtat axis M N, cum affixis lamellis ſive auriculis binis, quarum alteri occurrunt ſuperiores rotæ L dentes, alteri inferiores, idque perpetua viciſſitudine, ita ut non in gyrum axis hic circumagatur, ſed reciproco motu, nunc in hanc, nunc in illam partem libretur, dum interim rota L in orbem vertitur. Quem motum pluribus exponere ſuperſedeo, quod in vulgaribus paſſim horologiis reperiatur. à quibus equidem hucuſque noſtrum hoc non diſcrepat; at plurimum in his quæ ſequuntur. Axi enim N M infigitur O tympanum, cujus dentibus aptantur dentes rotæ P, ejus generis quas coronarias vocant artifices noſtri. Nec vero toto ambitu dentata ut ſit neceſſe eſt, ſed parte ſuperiori duntaxat. quippe tympanum O, haud aliter atque axis N M cui cohæret, reciprocam librationem habet, unde & rotam P ſimili motu agitat. Cumque major ſit hujus diameter quam tympani O, ſequitur ut minori etiam circuitus parte rota quam tympanum dictum gyretur. quod quo pertineat alibi indicabimus. Porro ejuſdem rotæ P axis trans laminam C D aliquantum extenditur, habetque conjunctam clavulam Q R, inferius itidem inflexam & terebratam ad R, ita ut per foramen hoc laxiuſculum virgula ænea I T libere transmeet. Hæc vero virgula ſuperius ad S ſuſpenſa eſt filo S I, ex inferiori parte pondus T ſuſtinens,

TAB. I.

nens,

nens, quod cochleæ ſubjectæ converſione ſurſum propellitur cum opus eſt, vel ulterius deſcendit.

Quibus expoſitis ut motus ratio, totiuſque adeo inventi percipiatur (nam quæ præterea in Schemate notata apparent, poſtea exequemur) advertendum eſt in primis, quod ſi perpendiculum S I T per foramen R trajectum non eſſet, neque omnino adeſſet, tunc quidem clavula Q R concitato motu ultro citroque jactaretur, vi ponderis Δ, omnes rotas automati agitantis. Transmiſſa autem virgula I T, cum appenſo pondere T per foramen R, impeditur eo dictus clavulæ motus, totumque horologium quieſcit, donec pondus T ſemel impulſum principium agitationis nanciſcatur. Quo facto, pendulum quidem S I T oſcillatorio motu fertur juxta planum laminæ C D. clavula vero Q R, momentum ſentiens ponderis Δ, ultro obſequitur penduli motui, ita ut pauliſper etiam vibrationibus hunc ſingulis adjuvet. Atque hoc modo perennis efficitur penduli agitatio, quæ niſi illud horologio conjunctum foret, brevi deficeret vergeretque ad quietem. Ad ſingulos autem recurſus penduli, percipientur ictus totidem ex appulſu dentium rotæ L ad lamellas M, N. Et hæc quidem de motu automati noſtri, quæ præcipue explicationem requirebant, quoniam in eo ſumma totius inventi vertitur.

In ſchemate porro tertia lamina eſt Y Z, prioribus parallela, & à lamina A B ſpatio diſtans. quo in ſpatio conſpicitur tympanum dentatum V, communem cum rota E axem habens. Huic congruunt dentes rotæ X, quæ media ſui parte conjunctum habet tubulum cavum Γ ultra laminam Y Z prominentem, impoſitumque gerentem horologii indicem primarium Λ. Ipſi vero Γ tubulo alius itidem cavus introrſus conſtitutus eſt, laminæque Y Z conſertus, axis nimirum quo rota X volvatur, & per quem ſimul transmittatur axis rotæ H, cui impoſitus eſt index alius Σ longior indice Λ. Is ſecunda ſcrupula demonſtrat. Primorum vero ſcrupulorum ſeu minutorum index prioribus illis utriſque multo brevior Ψ, extremo axi D V, ultra laminam Y Z producto, affixus eſt. Et hic quidem indiculus, laminæ, Y Z proximus fertur,

parvo

parvo in circello ſingula prima ſcrupula diſtinguens. Hoc verò ſuperior index horarum Λ convertitur: & ſupra hunc denique Σ index, quem dixi, ſecundorum. Hæc autem, uti & tympanorum omnium diſpoſitio ac dentium numerus, cum multimodis variari poſſint, nos hunc unum in exemplum proponere ſatis habuimus, eumque experientia comprobatum. Itaque & dentium multitudinem in ſingulis tympanis deſignabimus, eam quæ huic formæ optime convenire viſa eſt. In circumferentia rotarum ſingularum E H ſeptuageni bini ſunt, ſeni in tympanis G & K. rota L viginti quinque habet, tympanum O decem. rota P viginti, vel tantum partem horum aliquam, quia, ut dixi, totam dentibus inſecari nihil opus eſt. Penduli longitudo S I T pedis Rhenolandici, qui ad Romanum veterem proxime accedit, dextantem circiter æquat, & cuique vibrationi ſimplici impendit ſemiſcrupulum ſecundum. ad quam menſuram obſervationibus ad ſolem vel ad aliud hujus generis horologium comparatis non difficile perducitur. Ea longitudo rotis ita ordinatis convenit: & exquiſitam motus æqualitatem, quæque etiam Aſtronomicis uſibus ſufficiat, præſtare valet. Quod ſi tamen concinnitate operis inſuper habita, quadruplo majus pendulum adhibeatur, vel ultra etiam producatur, rotis interim majoribus quoque adſumptis, haud dubiè lentioribus oſcillationibus tutius etiam fidemus. Et jam in magnis publicis Horologiis, egregio ſucceſſu, perpendicula ejuſmodi prælonga uſurpari vidimus, alibi duodecim, alibi vicenûm pedum, cum appenſa ſphæra 25 vel 30 librarum. Cæterum revertendo ad ea quæ hic poſita fuere, apparet quidem, rota E ſemel circumacta, duodecies converti rotam H. centies vero quadragies & quater eam quæ ſequitur L. Quæ cum dentes 25 habeat, 3600 vicibus alternatim impellit lamellas M. N. ac totidem recurſus duplices facit pendulum S I T. Cumque 3600 ſcrupula ſecunda, horâ unâ contineantur; hinc horæ ſpatio rota E ſemel convertetur. Quamobrem & circulus indici Ψ ſubjectus in 60 partes dividitur, quæ prima ſcrupula ſignificent. Rota vero H quia

B duo-

duodecies in hora, hoc eſt, ſemel ſpatio 5 ſcrupulorum primorum verſatur, unaque index Σ, ideo circulum huic indici ſuppoſitum in 5 partes primum diſpeſcimus, & harum deinde ſingulas in 60 minores, quæ ſecunda ſcrupula denotent. Denique index Λ in ſuo circulo duodecim horas diſtinguere debet; ac proinde, ut harum tempore ſemel circumeat, tympano V ſex dentes tribuuntur, rotæ X ſeptuageni bini.

Nunc qua ratione pondera Δ, Ξ, horologio appendantur docebimus. Hæc enim novo artificio ita ordinavimus, ut cum ſurſum retrahitur pondus primarium Δ, non propterea ceſſet aut ullatenus impediatur horologii curſus. Quod in hac inventione apprime neceſſarium erat, ne particula temporis aliqua quotidie ſubduceretur, neve penduli motus interea dum pondus attollitur langueſceret. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primo orbiculum F amplexus, aculeis ferreis aſperum, quo melius funis inhæreat, parte altera trochleæ, cui pondus primarium Δ alligatum eſt, circumvolvitur. Hinc aſcendens ſuper orbiculo Ω tranſit, ac rurſus deſcendens ſuſtinet trochleam alteram cum appenſo minori pondere Ξ; unde denuo ad F redit. Orbiculus Ω (quem demonſtrandi gratia hic inter laminas A B, Y Z, ſuſpendimus, nam alioqui commodius thecæ quæ toti horologio circumdatur affigi ſolet) circumferentiam verſus denticulos habet, ut in rota L, ſerratos, ac deſuper prementem elaterem Θ, quo fit ut in alteram tantummodo partem volvi poſſit, attracto nimirum fune Π, ac pondere propterea Δ aſcendente: Nam contrarium motum elater dentibus occurrens prohibet. Crenam autem ſecundum circumferentiam dicti orbiculi ita cavari oportet, ut funem immiſſum nonnihil coarctet conſtringatque, quo minus poſſit immoto orbiculo delabi; quem in finem etiam pondus Ξ adhibetur. His ſic conſtitutis, ſemper Δ dimidia ſui gravitate incumbet funi Φ, motumque horologio continuabit etiam dum attracto fune Π in altum attollitur. Et hactenus

qui-

quidem quæ ad conſtructionem automati pertinent declaravimus.

Reliquum eſt, ut, quantum idem iis omnibus, quæ ad hanc diem in uſu fuere, antecellat, perſpicuum faciamus. Satis conſtat plurimas in his erroris & inæqualitatis cauſas eſſe. Nam & in diſponendis rite elimandiſque tympanis vel leviſſimum peccatum, continuo motus inconſtantia notabilis conſequitur. Tum vero & ſiccato atque evaneſcente oleo, quod axibus addi ſolet, tardius horæ procedunt. atque ut hæc abſint, varias tamen, anni tempeſtatum & aeris, mutationes horologia ſentiunt, imo præſentiunt nonnunquam: & frigore quidem plerunque pigriora comperiuntur, æſtu plus æquo properant. Penduli vero cum ſit ea vis ac proprietas, ut neceſſario eodem ſemper tenore feratur, neque ab eo niſi mutata longitudine unquam declinet; apparet ſane omnia illa quæ diximus incommoda invento noſtro penitus nos ſuſtuliſſe, adeo ut niſi tale quod interveniat impedimentum, quo horologii motus omnis ſiſtatur, nulla jam curſus ejus retardatio aut inæqualitas timenda ſit. At enimvero non nemini duplicem hic dubitandi cauſam oboriri poſſe ſcio. Primum, quod differre à pendulo libero noſtrum hoc videatur, quippe ad ſingulas vibrationes vim quandam ac nixum clavulæ Q R ſentiens. Deinde quod, etiamſi penduli ſimplicis proprietates retineat, perque omnia æmuletur, hujus tamen ipſius geminæ inæqualitates à nonnullis, qui ſubtiliter hæc perquiſiverunt, animadverſæ ſint. Hic illud quod de clavulæ impreſſione dicitur verum eſſe non diffitemur. Sed leviſſimam utique hanc eſſe novimus ratione gravitatis T, quæ ſic temperatur, ut tantum non deficiat penduli agitatio, ſed quam minimâ, & eâdem tamen latitudine perſeveret. Proinde nihilo concitatior aut minus æquabilis hic ipſius motus evadit, quam ſi clavulæ prorſus obnoxius non eſſet, pendulumque ſimplex S I T, ut adhuc fieri conſuevit, manu impelleretur. Et hoc quidem ex-

perientia optime comprobat. Penduli vero ipſius, quas adnotant, binas inæqualitates, alii autem contra pernegant, earum alteram admittimus, ſed vix quicquam horologio noſtro officientem, alteram plane nullam eſſe adſeverare non dubitamus. Illud itaque vere aſſerunt, non prorſus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac anguſtiores vibrationes tranſire, ſed his illas paulo plus inſumere, quod facili experimento demonſtrari poteſt. Nam ſi pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo, alterum parumper dimoveantur, ſimul dimiſſa, non diu in partes eaſdem una ferri cernentur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Verum huic inæqualitati noſtrum, uti dixi, horologium minus obnoxium eſt, eo quod omnes oſcillationes æquali ſpatio à perpendiculo excurrant. Nec tamen in totum expers remanſit, ſi minutiſſima quæque, ſicut hac in re fieri neceſſe eſt, conſectari velimus. Contingit ſiquidem vel aëris intemperie, vel operis vitio aliquo, ut non ſemper pari vi agitetur clavula Q R, unde & oſcillationes penduli (licet exiguo diſcrimine) creſcere ac rurſus imminui neceſſe eſt. Cumque ampliores recurſus arctioribus, ſicut modo dicebam, plus temporis impendant; idcirco nonnulla hinc in horologii motu inæqualitas exiſtit. Et huic quidem, utut contemptibilis videri poſſit, remedium etiam adhibere ſolebamus, quamdiu ita conſtructa erant horologia, ut majuſcula eſſet penduli agitatio. Poſtmodum vero, ne remedio opus eſſet, effecimus adhibito tympano O rotaque P: quibus hoc conſequimur, ut quamlibet anguſtæ ſint penduli vibrationes, neque eo ſecius axis M N, quantum neceſſe eſt, reciproco motu convertatur. Nam cum tympani O diametro dupla vel tripla ponatur diameter rotæ P, ſequitur ut hujus exigua licet oſcillatione, illud tamen ſatis magnam circuitus partem abſolvat. Sic igitur oſcillationibus univerſis exilioribus redditis, etiamſi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, ſingularum tamen tempora, experientia teſte, nullo memorabili diſcrimine differunt. Qua ex re & hoc contingit, ut aucto

vel

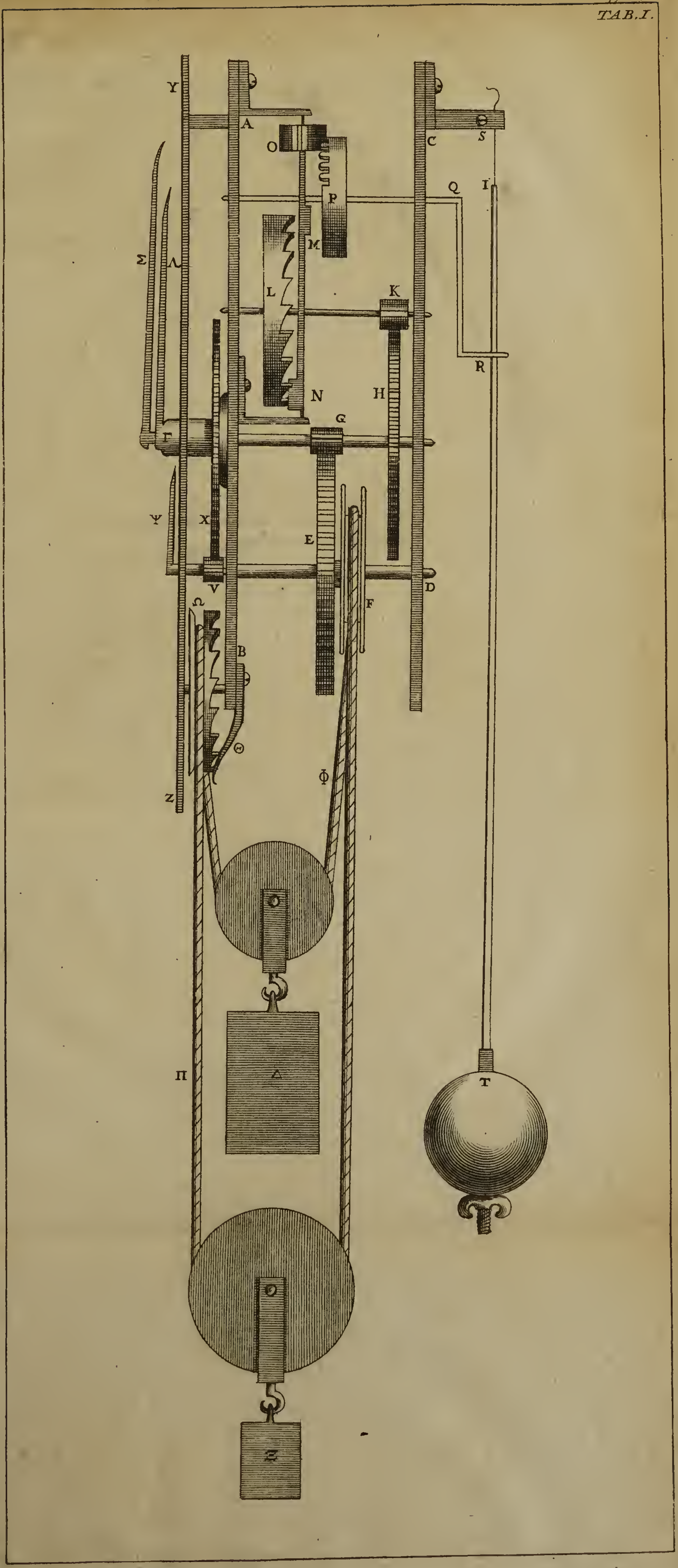
vel ad duplum pondere Δ, non propterea penduli motus acceleretur, aut horologii curſus alteretur, quod in omnibus aliis hactenus uſitatis ſecus accidit. Alteram penduli inæqualitatem, Vir Aſtronomiæ ſtudiis clarus, Gothofr. Wendelinus, primus & ſolus, ut opinor, prodidit; expertum ſeſe ſcribens, ejuſdem penduli velociores eſſe oſcillationes hyemali tempore quam æſtivo idque notabili differentia. Sed quoniam in eo examine arenaria tantum horologia, vulgariaque automata ſeſe adhibuiſſe fatetur, cum ſciotericis, fortaſſe non nimia cura deſcriptis; multi, quam recte ſe haberet hæc ipſius obſervatio, dubitarunt. Mihi certe nihil ejusmodi licuit animadvertere. Quin contra, & minoribus horologiis, quibus ſemipedale eſt pendulum, & majoribus, in quibus 24 fere pedes æquat, eandem perpetuo longitudinem, brumæ tempore ac æſtate media, convenire expertus ſum. Quæ longitudo ſaltem ſeptima ſui parte per hyemem productior eſſe deberet, ſi Wendelini vera foret opinio.

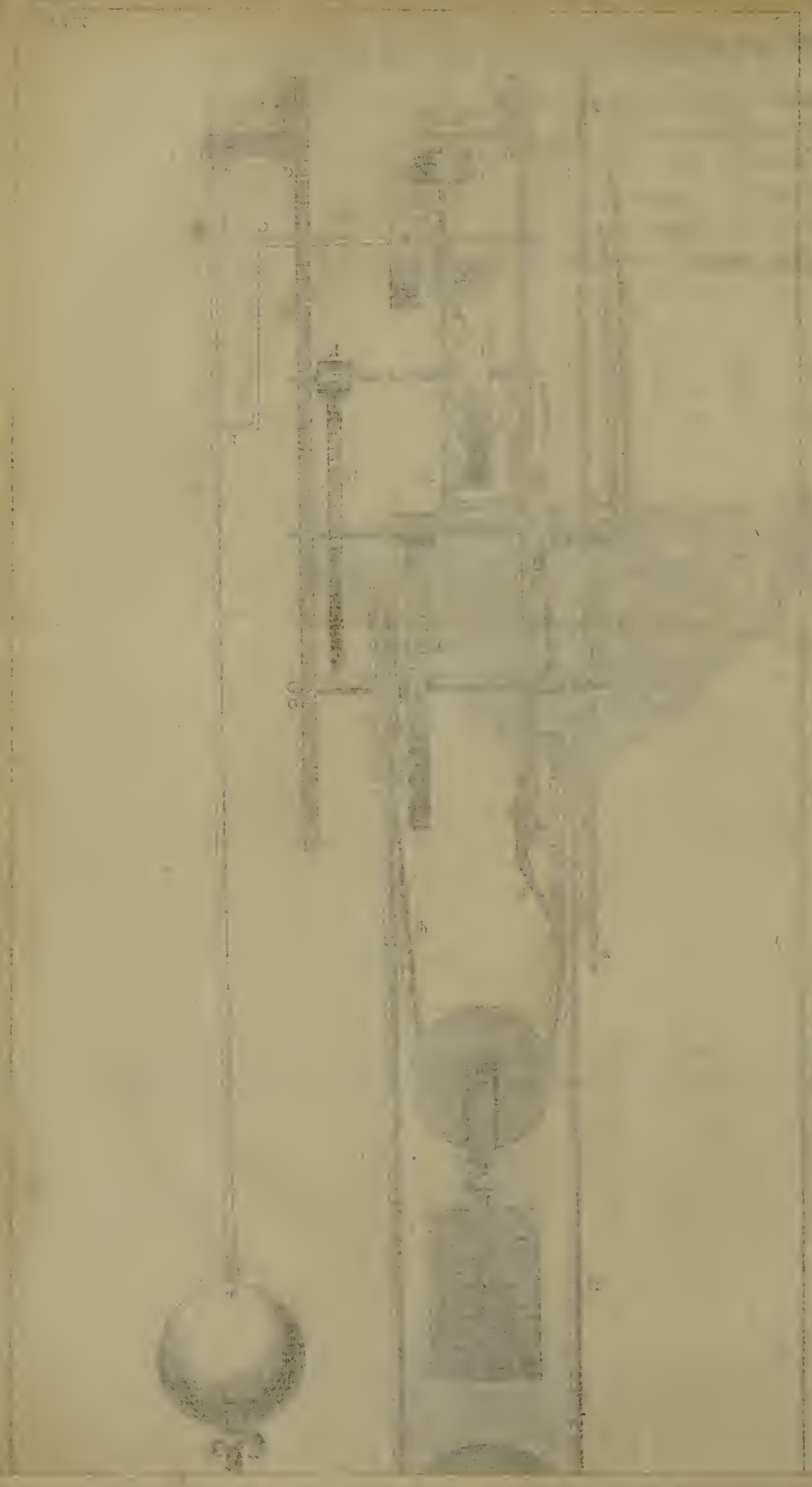
Aſſerta igitur & hac in parte automati noſtri motus æquabilitate & conſtantia, finem jam deſcriptioni imponemus; multa quæ his addi præterea poſſent, artificum induſtriæ relinquentes, qui rationem inventi hujus edocti, non difficile reperient quo pacto illud varii generis horologiis, atque iis etiam quæ pridem ad veterem formam fabricata ſunt, applicari queat. Nos quidem apud eum, cujus opera primum in his fabricandis uſi ſumus, talia quoque confecta vidimus, quæ non pondere, ſed elateris vi moverentur. In quibus, cum antehac pyramide illa æquatoria, chordaque huic circumvoluta opus eſſet, quorum ope adæquarentur primi ac poſtremi elateris impetus; nunc iis omiſſis, ipſi tympano, cui elater incluſus eſt, dentes adduntur. Nam licet hoc modo non æque in fine ac principio vigeat penduli motus, non tamen eo lentiores ſub finem oſcillationes efficiuntur, uti ſuperius fuit demonſtratum. Elater vero ea parte, qua ad centrum convolutus eſt, intenditur, atque ita cavetur ne quo temporis momento curſus horologii ſuf-

ſlaminetur. Mitto quod & ſonitu horas edentia automata hujusmodi machinatus eſt, ita ut uno eodemque, ſive pondere, ſive elatere, pars utraque, tam quæ ad hoc comparata eſt, quam quæ indicem horologii verſat, moveretur. Etenim hæc omnia ad inventum noſtrum haud aliter ſpectant, quam quod occaſionem iis atque opportunitatem præbuerit.

F I N I S.

TAB. I.





CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM.

SIVE

DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

Prima *Deſcriptionem* Horologii Oscillatorii continet.

Secunda agit de *Deſcenſu gravium*, & *motu eorum in Cycloide*.

Tertia de *Evolutione & Dimenſione linearum curvarum*.

Quarta de *Centro Oſcillationis ſeu Agitationis*.

Quinta *alterius Horologii conſtructionem*, in quo circularis eſt penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga*.

LUDOVICO XIV, FRANCIÆ ET NAVARRÆ REGI INCLYTO.

RENATAM, Rex maxime, reſtitutamque hoc ſæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique ſui parte deperditam, ac veluti ſepultam, inſtaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum veſtigiis inſiſtentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri ſubtiliſſimi, ut pauca jam poſterorum induſtriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longiſſime prætervecti ſint. In hac ſcientia, quam ſemper admiratus ſum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris propoſui inveſtiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta

prodeſſe poſſent. Tunc verò optimè operam me colloca e exiſtimavi, cum in ea incidiſſem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac ſubtilitate aliqua, conjuncta foret. Quod ſi commendationis nonnihil accerſere muneri noſtro permittitur, ne prorſus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me conſecutum eſſe profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum ſit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis conſtet; id quod ad hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis receſſibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impenſiore ſtudio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic ſpeculationi locum tribuam. Quænam vero in his ſit utilitas, non eſt quod multis, Rex potentiſſime, oſtendere tibi laborem. Non ſolum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata noſtra, quantum, æquabili horarum demonſtratione, cæteris hujuſmodi machinationibus excellant: ſed & potiores uſus eorum, quibuſque jam inde à principio mihi deſtinata fuere, non ignoras. Illos ſcilicet, quos & in Cæleſtium obſervationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præſtare apta ſunt. Tuo enim juſſu, non ſemel, per mare vecta fuere Horologia

logia noſtra. Tuis auſpiciis eadem nec pauca, Aſtronomiæ uſibus dicata, viſuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam inſigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curaſti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari ſoleo. Nec jam requiret quiſquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem deſcriptionemque explicui, auguſto Nomini tuo inſcribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigiſſe didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio conſtaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuiſque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi ſignificatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiiſque iis intento, quæ in illo rerum faſtigio poſitum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum eſſe, ut ad hujuſmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex auguſtiſſime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè proſunt; neque aliud magis curæ eſſe, quam ut nova incrementa ſumant optimæ diſciplinæ,

noviſque illuſtrentur inventis. Hoc enim ſatis declarat eximia illa tua, ac ſingularis, tum in ipſis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immenſæ, ac ſolito majores, bellorum impenſæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunſcribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non ſolum ſub imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; xxv. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.

H A:

HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.
Ad Chriſtianum Hugenium Zulichemium, Conſtantini F.

FINITIMUM *tutela, ſimul jucunda voluptas,*
Dilectæ Phœbo, Sceverinides * *Oceaninæ;*
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: veſtro ſic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes inceſtent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit ſuper aurea ſidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, fratrumque patriſque:*
Haud indigna tuo ferimus donaria ſenſu,
Siceliſin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solenſia verſu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Jam caput Oceano, ſtipata minoribus aſtris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur paſtoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legiſſe marinas
Juverat, hærenteſque vadis captare paguros.
In celſo tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promiſſi carminis. ipſum
Theſtylis & Corydon, quos cætera turba ſecuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.

 Ec-

* Sceverina, Pagus apud Batavos, mari adjacens.

Ecquid agat, rogitant blande: tum fauſta precantur;
Et damnant voti, promiſſaque carmina poſcunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet craſtinus Eos,
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones deſertæ
Si qua darent mihi ſigna. maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc uſque Jovis clementia ſudi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monſtra profundo,
Fert radians æther, vultus formasque natantum.
Cancer ibi eſt, delphinque; eſt grandi corpore cetus.
Ad Boream piſces, & contemplere ſub Auſtro
Piſces; nuper ubi numero creviſſe feruntur.
Sunt urna, fluviusque, & apluſtris comta carina
Illic. quin operis ſimulamina plurima veſtri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hœdi parvæque ſues, materque capella.
Et fuſe ſparſo quæ candet ſemita lacte.
Veſtibulum ſervant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
Plauſtraque; quique auriga ſuis excuſſus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præſepe ſuum juxta ſtabulantur aſelli.
Illic virgo, manum Cereali inluſtris ariſta,
Et, tranſmutatus faciem, Pan ipſe renidet;
Daphnin amans veſtrum, ſecretæ rupis in umbra,
Uranie velut edocuit: me ſingula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poſcitis) ordine pandam.
Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti poſuere. jacet ſine fluctibus æquor;
Factaque ſunt terris, ſunt facta ſilentia ponto.
Mox interfatur: Quod proſperet; ab Jove magno
Ordiar: ordiri conſuerunt ab Jove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi naſcitur ordo,

Noctur-

Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
Inde Jovis magni cunas, veteriſque celebrat
Saturni juſſum crudele, dolumque Cybelles;
Ortaque Dictæis Corybantia ſacra latebris:
Ut puero nutrix ſit olentis lecta mariti
Uxor; & ipſa recens hædos enixa gemellos;
Queis comitata polum modo lucida ſtella frequentet,
Quæ prius Oleniis balavit beſtia campis;
Sub pedibusque terat formoſi limen Olympi.
Tantus amor Jovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manaſſe fluore nitorem,
In duo ſecta vias, oculis manifeſta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam ſed noctem productumque canebat
Alciden mundo; Deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, ſopitæ parvula mammis
Labra pater gnati niſi conjugis admoviſſet:
Quæ, ſimul experrecta, ſimul conterrita, ſurgens
Uvidulas tenero mammas ſubtraxerit ori,
Indignata. pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in ſe revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio diſcrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum laſſaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit ſarcina collo;
Atque tot ærumnas quem poſt, maneſque ſubactos,
Ipſe ſuis ornet jam portio magna triumphis;
Heſperidum contra cuſtodem divitis horti
Inſurgens Anguem pede nixus; apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lerneæque audacem Hydræ ſuccurrere Cancrum;
Monſtra novercales teſtantia jugiter iras
Et fruſtra bacchatum odium Junonis iniquæ.
Hinc aliam memorat graſſatam fraude novercam;

Et tranſmittendi pavidam nimis æquoris Hellen:
In thalamos ſit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phaſidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec ſilet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus ſignaras ante caduco
Funere; ſublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardeſcere: ſed, qu
Sunt Hyades Grajis, Suculas dixiſſe Latinos;
Atque duas ſeptem mutaſſe Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, ſua plauſtra ſequente, Bubulco
Quando bovem priſco vocitabant more trionem,
Quod tereret duro proſciſſam vomere terram.
Hanc adeo ſortem miſerans, ſuſpiria ducit;
Buceriumque genus queſtu compellat inani;
Ah pecus infelix, armentum! ſæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec veſtro vocitaret nomine ſtellas.
Tunc neque ſidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu ſpicum gerit; Icariotis
Sive ſit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monſtravit cæde peremtum;
Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
Aſtra minor ſocium majorem repperit inter:
Seu magis Aſtræi ſit ſanguine creta, perenne
De genitore ſuo quæ nomen contulit aſtris:
Sive ſit antiquæ Themidis juſtiſſima proles,
Averſata jugo vos aſpectare gravari,
Tempora dum, pulſis melioribus, ærea ſurgunt:
Sive ſit alma Ceres; horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari; nil pejor linquit inauſum
Ferrea dum ſoboles, ipſorum inimica Deorum:
Quos, quaſi de terra (nam Dii coluiſtis & illam)
Sit pepuliſſe parum, tentavit pellere cælo.
Tum deteſtatur ſuffultos angue Gigantas;

Por-

Porphyriona, ſtatu terrentem cuncta minaci;
Rhœcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
Enceladumque; manusque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhöea dirum,
Auſos invaſiſſe Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cœlum compleſſe tumultu,
Undique divulſas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggeſtis.
Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia ſancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæſierint, addit; dispertitosque pavore:
Donec apud late ſtagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan ſumſerit Ægocerotis;
Ambiguoque ſono Superos animarit ad arma,
Anguipedesque metu dare terga coëgerit omnes:
Cœlo donandos Aſinos auxiſſe timorem
Congerie vocum, perterricrepoque fragore:
Illa cælicolis nam tempeſtate fuiſſe
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in aſellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrſis armatos, tectôs colocynthide parma.
Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Aſſyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ poſt numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Piſces
Lumina, ſigniferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fuſa medius ſecernat Aquarius Urna;
Deucalioneos neque non ediſſerit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verſet;
Sive ſit is Cecrops, peplo præſignis Athenæ;
Paſtor Ariſtæus ſeu plena alvearia geſtet,
Quæ ſubter volitetis apes examine denſo.
Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Perſea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mæſtam Caſſiopeiam;
Inſertumque polo vaſtum Piſtricis hiatum:

D *Quem*

Quem Phaëthonteus longo ſinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Auſtro:
Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
Intuitos nova ſquammigerum ſimulacra micare:
Sollertes Batavos, imo ſeu gurgite piſcem
Venari ſit opus, vel in alto ſidera cœlo.
Tum canit, ut Daphnis ſacra ſub rupe docentem
Viderit Uranien: argutas carmina ſilvas,
Et repetita cavos ediſcere carmina montes:
Ut Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum, & Babylonia turba;
Dein quos Graja tulit, quos aut Nilotica tellus,
Itala quos, ac pulchra ſuo cum Cæſare Roma;
Poſt Arabum de ſtirpe viri & regnator Iberus;
Ac tandem quos conſultos Germania miſit
Aſtrorum cœlique, ſuæ qui ſidera terræ;
Inferior nullis ut item neque Gallia deſit;
Gallia magnanimi Regis ſplendore ſuperba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conſcia Latmia ſaxa:
Utque Conon juveni radium donarit, utrimque
Multo inſignem auro, & pellucidulis cryſtallis;
Per quas quod ſpectes, prope fiat; & augmina ſumat:
Dixerit &: Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; ſed Etruſci quo decus Arni
Eſt Antenorea ſenior Tyrrhenus in urbe
Regna Jovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
Lunaï montes; vultus tibi, Phoſphore, ternos;
Quove ſatellitio ſubluſtri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa ſuperne.
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi ſervatus ſollertior uſus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe fruſtra olim nobis optabile donum.

Daphni-

Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
Exſultant alacres Pueri: neque ſegnius ipſe
Proſequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vane Saturni credita ſidus
Oblongo tam diverſa ſub imagine diſco
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & ambo nigror ſpatii diſterminat intus;
Exiguo circum quos erret ſtellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque; quod his meritis permulſus, eundem
In ſua magna Chronus ſit adire ſacraria paſſus:
Heic oculis luſtrarit ut omnia; promſerit atque
Inventum ſubtile ſecandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oſcilla ex tenui ſuſpendens mollia filo:
Id labyrintheos curſus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud ſinat eſſe magiſtrum:
Cui neque quotidie tam certus ſpondeat auctor,
Oceano quantum Titan altiſſimus exſtet;
Ac quibus emergat, queis tunc ſimul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum ſua brachia quaſſant,
Alternoque ſolum pede pulſant. at freta ſaltu
Librabant hilares ſeſe ſuper humida thynni.
Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquiſſe domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arroſor prodiiſſe cuniculus antris
Tempore narratur; narrent ſi vera puellæ
Littoreæ, quæ ſiccandis cuſtodia paſſim
Retibus ad ventos expanſis forte ſedebant.
Pectore Nereïdes nudo, laſciva caterva,
Viſa per incertam Lunam, viſæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul ſub luce maligna;
Tuque, cubans juxta ſtratas prope littora phocas,

Neptuninarum pecudum fidiſſime cuſtos:
Neu quisquam ſeræ meminit decedere nocti.
Interea tenebræ denſantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte ſerena
Cinctum non ſolitis proceſſit crinibus aſtrum,
Prolixumque trahens albore notabile ſyrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipſe;
Præſertim tantum capiti cum demſit honorem,
Ornatumque ſequacem omnem mox reddita Luna.
Inſit &: Ad ſua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil ſolliciti, curamve foventes.
Inſuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Ancon: mihi viſa tibi quæ digna referri,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, cui ſidera curæ,*
Nec Phœbum ac Pimplæ fas eſt contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat aſtri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC LXV.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIUM OSCILLATORIUM,
SIVE
DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO
Demonſtrationes Geometricæ.

ANNUS agitur ſextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello * publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis ſpectantia, viſum eſt ea ſingula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potiſſima ejus pars cenſeri poſſint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius de-

* Vide ſupra pag. 5.

ſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat; cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea; ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam horologiis adhibuimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in iis eſſe præſidii. Hæc ea eſt linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre deſignat; à Geometris noſtri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas ſui proprietates diligenter expenſa; à nobis verò propter eam quam diximus menſurandi temporis facultatem, quam nihil tale ſuſpicantes, ac tantùm artis veſtigiis inſiſtentes, ineſſe ipſi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo poſt primam horologii editionem animadverſa fuit) nunc eandem, demonſtratione quàm potuimus accuratiſſima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonſtratione potiſſima pars hujus libri verſabitur. Ubi primùm neceſſe fuit novis nonnullis demonſtrationibus ſtabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de deſcenſu gravium doctrinam, cujus fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus, hæc ipſa quam invenimus cycloidis eſt proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum uſum aptari poſſet, nova curvarum linearum conſideratio adhibenda fuit, earum ſcilicet

quæ

quæ ſui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter ſe longitudinis curvarum cum rectis naſcitur, quam ulterius etiam quam præſens neceſſitas poſtulabat proſecutus ſum, propter theoriæ, ut mihi viſum eſt, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compoſiti naturam, cujus utilitatem in conſtructione horum automatôn demonſtro, adjungenda fuit Centrorum Oſcillationis contemplatio, à pluribus quidem, ſed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadverſione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, ſolidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipſa horologii mechanica conſtructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad uſus aſtronomicos aptiſſima reperta eſt, ad cujus inſtar reliquæ omnes, mutatis quæ opus eſt, facile ordinari poſſint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi ſucceſſu, quod fieri plerumque ſolet, quodque futurum prædixeram, ut plures ſeſe ejus auctores eſſe cuperent, aut ſi non ſibi ipſis, ſuæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic arbitror. Nec ſanè aliud fere opponere iis neceſſe fuerit præterquam id unum, nempe ante annos ſexdecim, cum nec dicto nec ſcripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta eſſet, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli ſimplicis uſu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controverſiam movebit) conſtructionem eorum propria meditatione me adinveniſſe & perficiendam curaſſe. In ſequenti anno, qui nempe hujus ſæculi quinquageſimus octavus fuit, deli-

nea-

neationem automati deſcriptionemque typis vulgaſſe; exemplaria, tum operis ipſius, tum libelli, quaquaverſum dimiſiſſe. Nam cum hæc ita omnibus nota ſint, ut nec teſtimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus poſſent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis exiſtimandum ſit, qui ſeptem poſt annis eandem conſtructionem, quaſi à ſe ſuisve amicis profectam, libris ſuis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, ſi tentaſſe eum, non vero perfeciſſe inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, inveſtigaverim. Cum autem vel ab ipſo Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuiſſe contendunt, horologiaque ejusmodi re ipſâ exhibita, neſcio quomodo ſibi creditum iri ſperent, cum vix veriſimile ſit adeo utile inventum ignoratum manere potuiſſe annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod ſi deditâ operâ celatum fuiſſe dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio poſſe obtendi, qui ſibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, niſi unà quoque oſtendatur, id quod omnes latebat, mihi ſoli innotuiſſe. Et hæc quidem neceſſariæ defenſionis cauſa dicenda fuere. Nunc ad ipſius automati conſtructionem pergamus.

HO-

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS PRIMA,

Deſcriptionem ejus continens.

FIGURA adſcripta horologium à latere inſpiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ ſunt A A, B B, ſemipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & ſemis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut ſesquipollice inter ſe diſtent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inſeruntur. Prima atque infima eſt quæ notatur C, dentibus 80 inciſa, cujus axi orbiculus quoque D affixus eſt, aculeis ferreis aſper, ut funem cum appenſis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur poſtea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus eſt generis quas à forma coronarias vocant artifices noſtri. Hujus dentibus agitatur tympanum I ſimulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad inſtar ſerræ dentium inciſi. Supra mediam rotam K transverſus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema ſuſtinent hinc inde gnomones N Q & P, ſeorſim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorſum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, ſimulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem eſſe diximus, inferiori ſui parte gnomoni R innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum eſt, quo ultra ipſam extendatur axis pinnatus L M, qui ſubtili cuſpide inſertus gnomoni P, liberius ita movetur quam ſi ab ipſa lamina B B ſuſtineretur ſimulque ultra eam pro- TAB. II. Fig. 1.

E mine-

Descriptio Horologii.

mineret, debet enim prominere neceſſario ut affigi poſſit clavula S, quæ ſimul cum eo verſationes faciat. Eſt autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

Porro clavula S, ima ſui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum eſt, amplectitur. Hæc vero virga ſupernè duplici filo ſuſpenſa eſt inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta deſcripſimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc ſuſpendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum iſtarum curvatura pluribus poſtea agendum erit.

TAB. II. Fig. 2.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes poſtea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi V X motum ſuſtentari, poſtquam ſemel manu incitatum fuerit; & ſimul perpendiculi ſtatos recurſus rotis univerſis, totique adeo horologio movendi legem normamque præſcribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulſu acta, non tantum obſequitur trahenti perpendiculo, ſed & ſingulis recurſibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui ſua ſponte, vel verius occurſu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rurſus vero, quum ejusmodi ſit natura penduli ut eodem ſemper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri poſſit; utique poſtquam flexu lamellarum, inter quas ſuſpenſum eſt, æqualitatem illam conſequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etſi ſæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; ſed neceſſario ſinguli dentes ejus coguntur æqualibus tranſire temporibus. Hinc vero manifeſtum eſt, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles converſiones effici, cum omnia propor-

tio-

tionaliter moveantur. Quamobrem ſiquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, ſemperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

Descriptio Horologii.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela eſt Y Y, pollicis quarta parte diſtans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarii deſcripti ſunt centro eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum diviſionem habet, alter ſcrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ε continuatur trans laminam Y Y; atque ita inſidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; ſine illo tamen, ubi opus fuerit, converti poſſit. Ad ε index imponitur, horæ ſpatio circuiturus atque ita ſcrupula prima, ſeu ſexageſimas horarum, demonſtraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipſa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes ſex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ ſuffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipſe ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam deſinit tubulus rotæ β, quem intra ſe complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem ſcrupula prima ſignare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero ſcrupula ut absque errore demonſtrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in ſexaginta partes diviſus inſcribitur, inciſoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ diviſiones, cuspide in ſummo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum diſpoſitio ex figura minori *(fig. 3.)* clarius perſpicitur, exteriorem horologii formam referente.

Descriptio Horologii.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam eſſe oportet ut ſcrupula ſecunda ſingulis recurſibus metiatur, quæ longitudo tripedalis eſt, & commodè in ſchemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus reſpectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in uſu ſit, ſed certo æternoque pedis modulo ab ipſa hujus penduli longitudine deſumpto, quem Pedem Horarium in poſterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum menſuræ referri debent quas incorruptas poſteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis ſæculis Pariſini pedis modus, dum conſtabit eum ad Pedem Horarium eſſe ut 864 ad 881. Sed de hujus menſuræ exactiſſima conſtitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oſcillationis. nunc tempora converſionum in ſingulis rotis indicibusque obiter deſignabimus, ut rectè omnia ad dentium ſupra deſcriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem converſione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, ſexagies vero rotam H, & centies vicies ſupremam K: cui quum dentes ſint quindecim, iisque alternatim pulſentur pinnulæ L L, una converſione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus reſpondent totidem itus reditusque penduli V X. ideoque converſionibus 120, reſpondebunt oſcillationes ſimplices 3600, qui numerus eſt ſcrupulorum ſecundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore ſemel circumit rota C, cumque ea ſimul index ad E impoſitus, qui ſcrupula prima demonſtrat. Et quoniam eodem temporis ſpatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio ſuo dentium ſex, ad quem numerum duodecuplus eſt numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H ſexaginta converſiones reſpondere oſtenderimus ſingulis converſionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, ſexagies in ſingulas horas circumferetur, hoc eſt, ſemel unius ſcrupuli primi tempore, ideoque partes ſexageſimæ orbiculi λ ſecun-

ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologii minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

TAB. II. Fig. 3.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius, inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologii curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ſerratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum D, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita ſe habentibus, manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologii motum nuſquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius ac-

Descriptio Horologii.

curatiusque fabrefactum automaton arguet. In noſtris, quæ optima hactenus habemus, ad ſex libras redactum eſt, poſita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere; uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capſam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oſcillationibus peragendis neceſſe eſt. Ipſum vero horologium, ad hominis altitudinem ſuſpenſum, horis 30 moveri perſeverat.

Supereſt nunc forma lamellarum deſcribenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præſtandum vel præcipua eſt opera. Absque his enim Penduli ſimplicis oſcillationes (etſi nonnullis aliter viſum eſt) non erunt æque diuturnæ, ſed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque ſeorſim ſuſpendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, ſimulque è manu dimittantur; non diu utrumque ſimul in partes easdem ferri videbitur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri poſſunt, certâ ſcientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem eſt ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam reſiſtentiæ aëris ea diverſitas imputanda ſit, ut quidam voluere, ſed ex ipſa motus natura circulique proprietate naſcatur. Quod alio quoque argumento concludi poſſit ex ipſa Penduli iſochroni conſtructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forſan in noſtris horologiis hiſce, ubi eadem ſemper eſt oſcillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod ſane ita eſſet ſi latitudo omnium

um planè eadem conſtanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna ſatis conflatur, idque ita eſſe reipſa atque experimentis evincitur. Etſi enim eadem ſemper ſit ponderis vis, rotæ ſibi proximæ reſpectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non ſemper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evaneſcente aut ſordeſcente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oſcillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in univerſum, ſed his maxime omnium remedio opus ſit, quo reciprocationum Penduli latiorum anguſtiorumque tempora æqualia evadant. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus poſitum eſt remedium iſtud, in primis Penduli longitudinem ſtatuiſſe oportet, quæ facile ex eo habetur, quod ſint inter ſe longitudines perpendiculorum, ſicut temporum quæ in ſingulos recurſus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod ſcrupula ſecunda metitur, ejus quarta pars, ſive unciæ novem debeantur ei quod ſemiſecunda notaturum ſit. Item ſi Penduli longitudo quæratur, cujus recurſus ſimplices 10000 horæ ſpatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis ſcimus 3600 recurſus in horas ſingulas numerari: ergo hujus recurſuum tempora ſingula, majora ſunt temporibus Penduli quæſiti, proportione 10000 ad 3600, ſive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc eſt, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{66}{100}$.

Poſita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis propoſito, inde Cycloïs linea, quæ curvaturam laminarum T datura eſt, hoc modo deſcribetur.

Super tabula plana affigatur regula A B, ſemidigiti craſſitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, dia- TAB. III. Fig. 1.

metrum

Descriptio Horologii.

metrum vero baſeos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; ſitque F G H E faſciola, ſeu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta ſit, partim extendatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa ſit ferrea cuſpis D I, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte reſpondeat.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extensâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum K M, K I; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

TAB. III. Fig. 2.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides K M, K I, alio ſchemate hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oſcillationes, usque ad maximam omnium per arcum M P I, iiſdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat. Hæc autem quæ dicta ſunt, in ſequentibus, ubi de deſcenſu gravium, deque evolutione curvarum agemus, ſingula demonſtrabuntur.

Li-

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem deſignare. Deſcribatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis ſit. In cujus circumferentia ſumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter ſe parallelæ. Deinde arcui A F ſumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot ſunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur ſingulæ C N, G O in recta C G; duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant ſingulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, ſingulæ E R, I S in recta E I; atque ita porro ſi partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti L M æquales fiant ſingulæ F T, K V in linea extrema F K. Jam ſi curvæ deſcribantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rurſus quæſitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet. Descriptio Horologii. Tab. III. Fig. 3.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, ſi primum duabus rectis, quæ ſemiſſibus arcus A F ſubtenduntur, æqualis ponatur X Z, totius vero arcus ſubtenſæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Y, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet ſextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una ſexies milleſima parte ſuæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac ſcripſimus, demonſtratum eſt.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum eſt, quo pacto ad veram horarum menſuram componi debeat. Ergo primum, an recte ſe habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo obſervatoris certus eligatur locus, unde ſidera deſpici poſſint, ſimulque tecta parietesve vicinarum ædium, ſic poſita, ut, cum eò appulerint ſtellæ quædam è fixarum numero, ſimul videri deſinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, conſtituatur, ut ſequentibus diebus,

Descriptio Horologii.

absque errore, oculus ad idem punctum reponi poſſit. Jam ad momentum ipſum, cum ſtellarum aliqua è conſpectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem poſtero die, vel potius aliquot diebus intermiſſis, fiat. Quod ſi tantum unius diei ſpatium duabus obſervationibus interceſſerit, oportet in poſtrema obſervatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima obſervatione annotatum fuerat, ſcrupulis primis 3, ſecundis 56. Ita enim rectè ſe habere perpendiculi longitudinem conſtabit; quum tanto ſuperetur quælibet ſiderum fixorum revolutio à die ſolari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies ſolares, de meridie ad meridiem, non omnes inter ſe æquales ſunt, ut mox amplius exponetur. Si vero poſt plures demum dies obſervatio repetatur, in ſingulos tantundem differentiæ cauſa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima obſervatione, ad momentum evaneſcentis ſtellæ, adnotata horologii hora 9, cum ſcrupulis primis 30, ſecundis 18; deinde, ſeptimo poſt die, eâdem diſparente ſtellâ, indicet horam 8, cum ſcrupulis pr. 50, ſec. 24. Hæc hora deficit à priore ſcrupulis pr. 39, ſecundis 54. Quæ, in ſeptem diviſa, dant retardationem diurnam ſcrupulorum $5'. 42''$. Debebat autem eſſe ſcrupulorum $3'. 56''$. quæ illâ minor eſt ſcrupulis $1'. 46''$. Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, ſeu media, dierum menſura.

Cæterum alio quoque modo, ad ſolem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter ſe æquales; & quanquam exiguum ſit diſcrimen, tamen plurium dierum intervallo ſæpe eo usque excreſcit, ut haudquaquam contemni poſſit. Etenim ſi & ſolarium quam perfectiſſime deſcriptum habeatur, & horologii automati motus ad veriſſimam dierum menſuram exactus ſit, neque ab ea recedat; eveniet tamen neceſſario ut, certis anni temporibus, ſæpe horæ quadrante, aut etiam ſemihora, inter ſe diſcrepent, ac rurſus ſtatis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita eſſe, ex tabula temporis

poris æquatoria quam ſubjicimus, intelligetur; poſtquam uſum ejus oſtenderimus, qui eſt hujusmodi. Descriptio Horologii.

Accipiatur æquatio tabulæ, aſſignata diei qua primum cum ſole, ſive cum ſciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum menſuram temperatum ſit. Quod ſi jam prior æquatio major fuerit ſequente, ſuperare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter ſe æquationes iſtæ differunt. At ſi poſterioris diei æquatio major inveniatur, erit exceſſus penes horam gnomonis, ſive eam quæ ex ſole obſervatur. Ut ſi, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant ſciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, ſcrupulorum primorum 3, ſecundorum 11. lubeatque ſcire ejusdem menſis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die poſteriori adſcripta æquatio ſcrupulorum primorum 7, ſecundorum 27. quæ quia ſuperat præcedentem ſcrupulis primis 4, ſecundis 16, debebit tanto ſerior eſſe hora ſciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, ſi diverſum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies ſingulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem cauſam adhibui, utramque Aſtronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & ſolaris motus anomaliam. Quod cum ratio poſtulat, tum experientia quoque, his ipſis horologiis ſuperſtructa, quæque ſine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hic propoſita, obſervationes ſolis, quas ſæpe per complures menſes, quotidie ad momentum quo meridianum circulum ſol occuparet, inſtituimus, planiſſime conſentire inventæ ſunt.

Dies.	*Januar.*		*Febr.*		*Mart.*		*Apr.*		*Maj.*		*Jun.*	
	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

Descriptio Horologii.

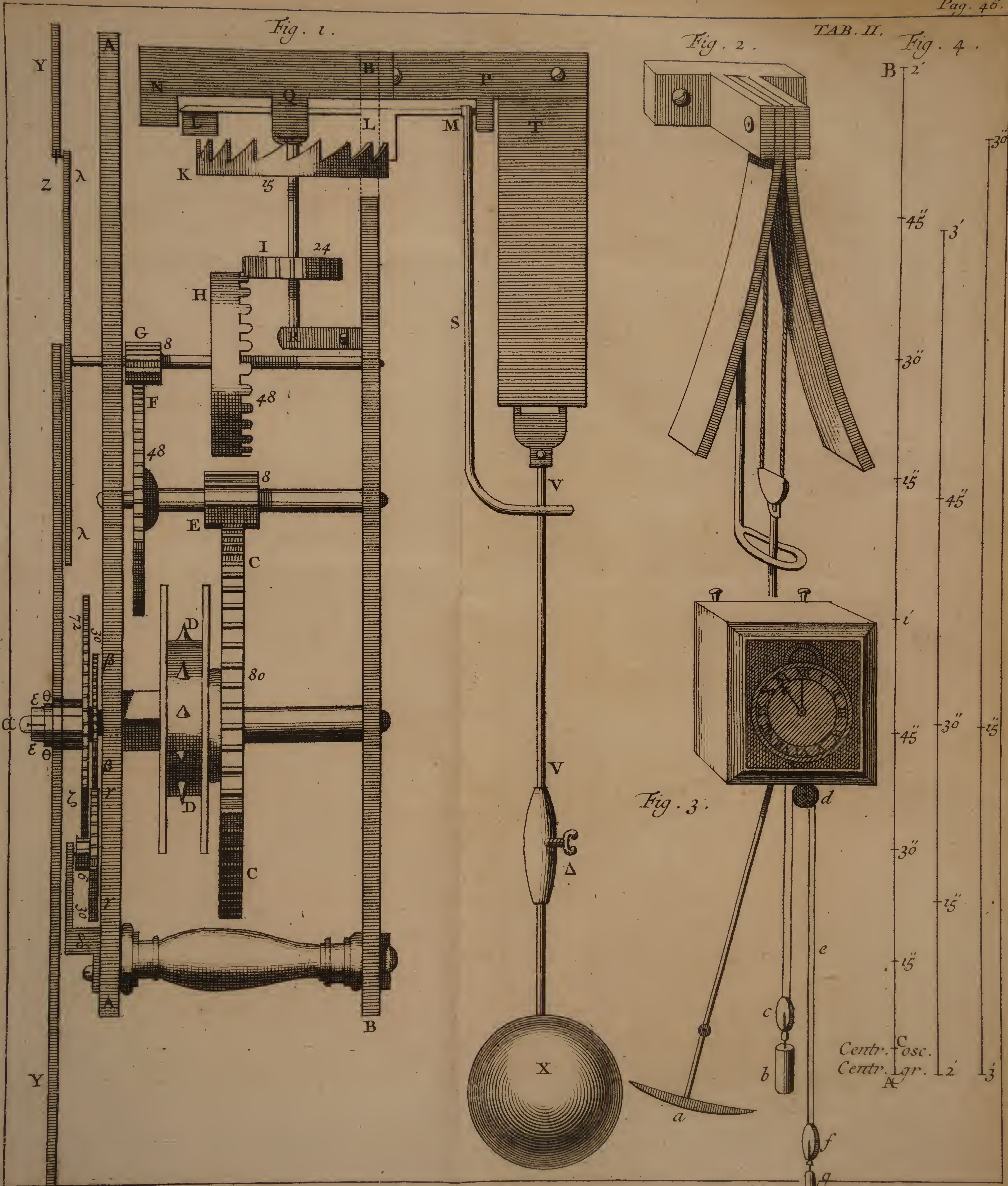
Jam poſtquam utrovis modo eorum quos diximus, ſed priore potius, examen inſtitutum fuerit, ſi multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima ſcrupula aſcendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipſius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda eſt regula, tot ſcrupulis primis, in ſingulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{1}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram menſuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio tranſpoſitione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus ſectionem ſecundum axem in figura 1. expreſſimus. Et quia tantum viceſimam triceſimamve, aut etiam minorem, partem æquat ponderis X, hinc fit ut ſat magnis ſpatiis è priore loco diſcedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties verſus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde ſurſum aut deorſum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum ſit quo veriſſimam daturum ſit dierum menſuram, diviſimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, poſito nimirum pondere Δ parte quinquageſima ponderis X, parique gravitate ipſius virgæ V V. Quæ quidem diviſiones figura 4 exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes ſecta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, eſt A B. Punctum A eſt centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oſcillationis, partes ſingulæ, quindecim ſcrupulorum ſecundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonſtratio autem diviſionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oſcillationis.

Tab. II. Fig. 1.

Tab. II. Fig. 4.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum inveſtigandarum gratiâ, formam hic deſcriberemus, ſi quænam maxime ad hunc uſum accommodata ſit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etſi quidem jam nunc eo res deducta ſit, ut parum

deeſſe


TAB. II.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Centr. osc.
Centr. gr.

deeſſe videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hìc tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum reſtet, exponere non pigebit.

Descriptio Horologii.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad noſtrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in ſpiram convolutam; cujus vi rotæ circumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri ſolent automatis adhiberi ſolent. Ut autem jactationem navis perferre poſſent, è chalybea pila, cylindro æneo incluſa, horologia ſuſpenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem ſemipedali longitudine pendulum) deorſum productam geminaverat, ut literæ F inverſæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari poſſet penduli motus, unde ceſſationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris ſocias habuerat, poſtquam in Britanniam reverſa eſt, Præfectus claſſis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore ſolviſſet, atque ad inſulam, ſancti Thomæ dictam, perveniſſet, quæ æquinoctiali circulo ſubjacet, compoſitis hìc ad ſolem horologiis, occidentem verſus curſum inſtituiſſe, atque ad ſeptingenta circiter milliaria continuo tramite progreſſum, tum rurſus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinaviſſe. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò curſum tenuiſſet, magiſtros aliarum navium, veritos ne priuſquam Africam attigiſſent aquâ ad potum deficerentur, ſuaſiſſe ut ad inſulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum ſeſe concilio nauclerorum habito, juſſiſque ut Ephemeridas ac ſupputationes ſinguli ſuas proferrent, reperiſſe cæterorum calculos à ſuis diverſos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipſum vero, cum ex horologiorum indicio collegiſſet non amplius quam triginta circiter milliaribus abeſſe inſulam *del Fuego* dictam, quæ una eſt earum, non procul ab Africa diſtantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque poſtero die teneri poſſe; confiſum pen-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

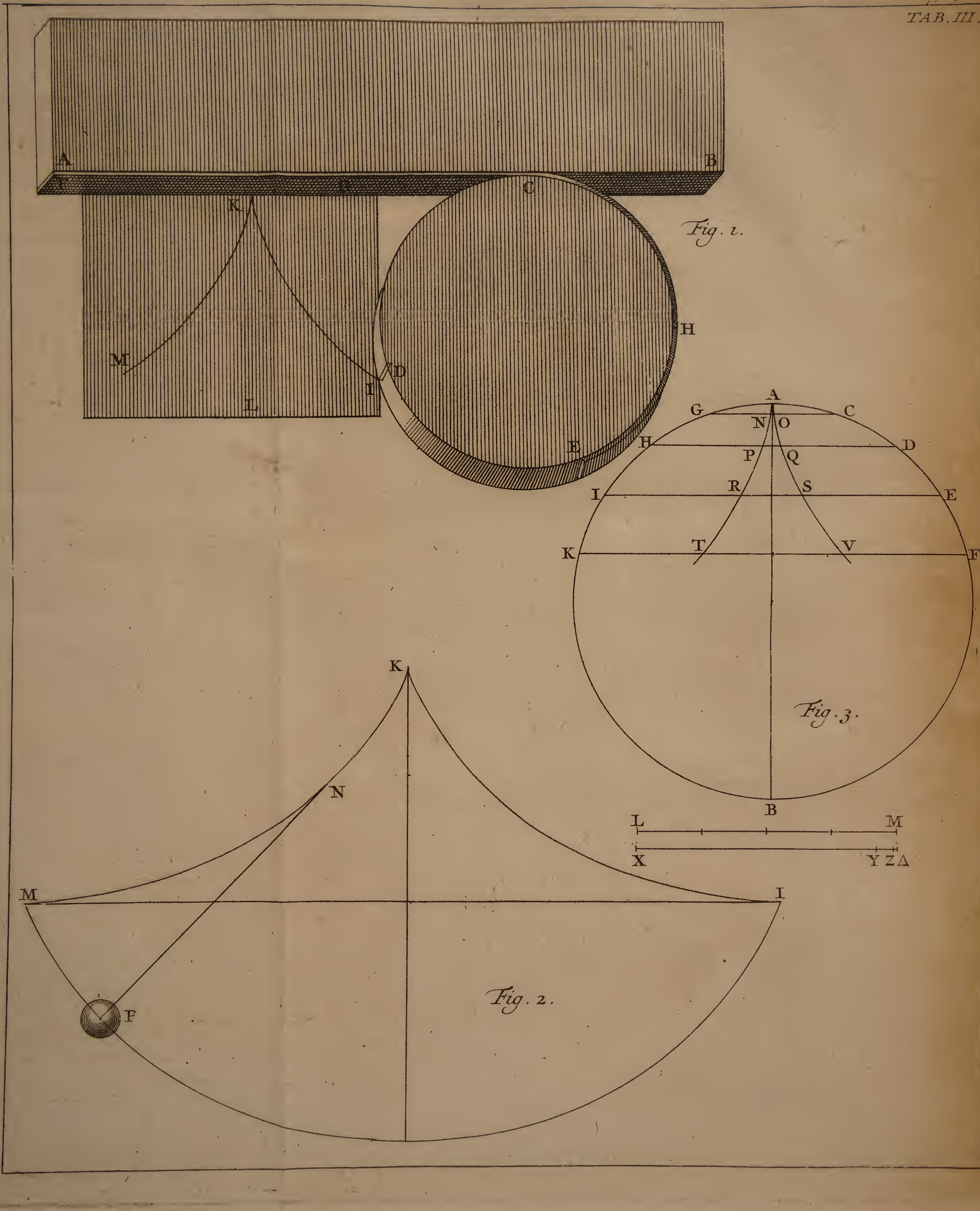
pendulis ſuis eò curſum dirigi imperaſſe, ac die inſequenti ſub meridiem eam ipſam in conſpectum veniſſe inſulam, paucisque poſt horis navibus ſtationem præbuiſſe. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Sereniſſimi juſſu, repetita fuere experimenta, vario eventu, ſed ita ut ſæpius negligentia eorum quibus horologia commiſſa erant quam ipſamet automata culpari poſſent. Optimus vero ſucceſſus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam inſulam, quò illuſtriſſimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obſeſſæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis miſſus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujuſce experimenti gratiâ habebat, virumque Aſtronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus obſervationibus, in ſingulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoſcere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimenſas fuiſſe comperimus, atque ita ut Geographicis deſcriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum differentiæ diſignatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. ſcrup. 22′ reperta fuit, hoc eſt graduum longitudinis 20. ſcrup. 30′. ac rurſus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui conſenſus certiſſimum veritatis eſt indicium.

Inter eundem Toloni portum & inſulam quandam cui *Maretimo* nomen eſt, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem ſpectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria obſervata eſt ſcrup. prim. 25, ſec. 20, quibus reſpondent gradus longitudinis 6, ſcrup. 20′. Item à Tolono ad inſulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponneſum eſt Occidentem verſus, hora 1, ſcrup. prima 5′, ſec. 45″, quibus reſpondent longitudinis gradus 16, ſcrup. 26.

Horologia ad ſolem examinata fuerant, mane ad Orientem, veſpere ad Occidentem, ſupputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum na-

ves


A
B
C
D
K
M
L
I
D
H
E
Fig. 1.
A
G
C
N
O
H
D
P
Q
I
R
S
E
K
T
V
F
Fig. 3.
B
L
M
X
Y Z Δ
K
N
M
I
P
Fig. 2.

ves in anchoris ſtant omnium optima videtur, quod, abſque inſtrumentorum ope, ſolis oculis eæ obſervationes peragantur. Descriptio Horologii.

Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hiſce, pondere ſemiſſis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca incluſæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum inſuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem ſitum ſuſpenſa in navi machina ſervaret.

Quanquam autem æquabilis admodum ſibique conſtans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggreſſi ſumus, quæ erat hujuſmodi. Rotæ illi quæ ſerratos dentes habet, penduloque proxima eſt, pondus exiguum ex catenula affabre conſtructa appendimus, quo ſola ipſa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut ſingulis ſemiſcrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem reſtitueret; eadem fere ratione atque in conſtructione horologii ſuperius expoſita videre eſt, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem ſuam horologii motui impertit. Quibus ita conſtructis, cum veluti ad unicam rotam omnia eſſent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam conſtructa ex eodem tigno ſuſpendiſſemus, tignum vero fulcris duobus impoſitum eſſet; motus penduli utriuſque ita ictibus adverſis inter ſe conſenſere, ut nunquam inde vel minimum recederent, ſed utriuſque ſonus una ſemper exaudiretur: imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum u-

G trum-

Descriptio Horologii.

trumque moveatur, eo tamen neceſſario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquieſcere. Quæ tamen cauſa non ſatis efficaciæ haberet, niſi & horologiorum motus aliunde æquabiliſſimus foret atque inter ſe conſentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præſertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum abſque interruptione conſervando habendam eſſe, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadverſum ſit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipſa ſuſpendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorſum ſpectante plumbea lens affixa eſt. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales ſuſpenſi ſunt. Baſis clavulam bifurcatam puncto ſui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota ſerrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere ſed à chalybea lamina, tympano incluſa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare eſt A B C; lens plumbea B; laminæ cycloidales E D, F G. Clavula bifurcata H K; rota ſerratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior eſt. Lenticulæ ad temperandum penduli motum L L.

TAB. IV. Fig. 1.

Suſpenſionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inſerta eſt; quod deinde rectangulum rurſus axibus ſuis F G ferreo gnomone F H K G ſuſtinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus eſt. in ima theca pondus 50 librarum appenſum eſt. Quibus ita ſe habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem poſitum ſervat horologium. Axis autem C, cum ſibi oppoſito, ita collocati ſunt, ut ad rectam lineam reſpondeant punctis ſuſpenſionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipſius oſcillatorius machinam nequaquam commovere poſſit, quo nihil eſt alioqui quod magis penduli motum deſtruat. Porro axium C C, & F G craſſitudo, quæ polli-

TAB. IV. Fig. 2.

cem

cem æquat, gravitaſque plumbi inferius appenſi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut ſi forte ſuccuſſu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque ſuum revertatur. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur ſupereſt, quæ & certam pene ſucceſſus ſpem præbet, quod iis quæ hactenus inſtituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diverſitatem perferre reperta ſit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECUNDA.

De deſcenſu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non eſſet, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum ſemel motum continuaturum velocitate æquabili, ſecundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu compoſito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorſum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque ſeorſim conſiderari poſſe, neque alterum ab altero impediri.

De deſcenſu gravium. Tab. IV. Fig. 3.

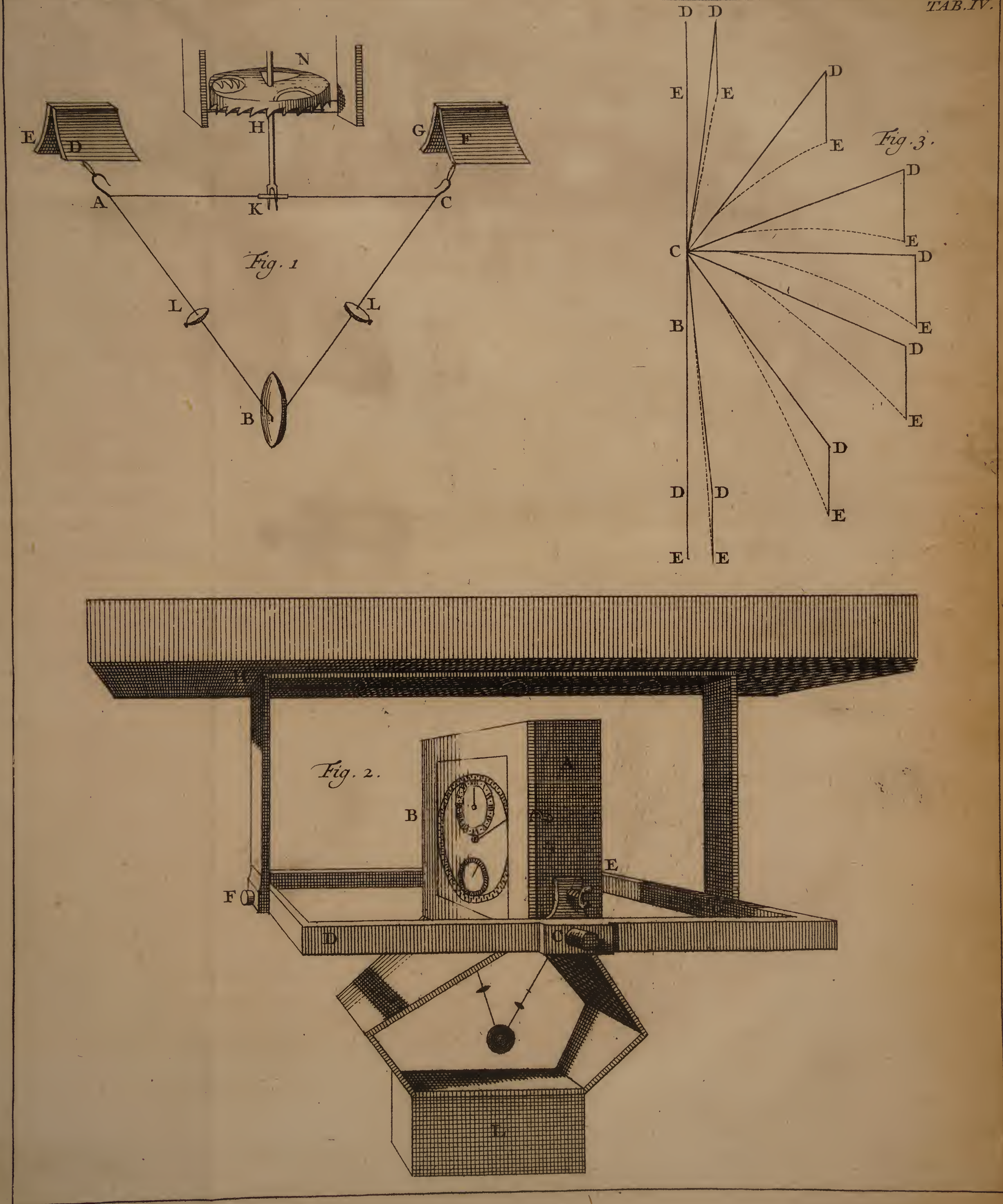
Ponatur grave C è quiete dimiſſum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis tranſire ſpatium C B. Ac rurſus intelligatur idem grave accepiſſe alicunde motum quo, ſi nulla eſſet gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, ſed ad punctum aliquod E, recta ſub D ſitum, ita ut ſpatium D E ſemper æquetur ſpatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur ſuas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, compoſito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta ſurſum aut deorſum ſed in obliquum tendit, è ſequentibus definiri poterit. Cum vero deorſum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D, apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum ſurſum tendit motus æquabilis C D, ipſam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur ſemper in puncto E. Quod ſi, utroque hoc caſu, ſeorſim, uti diximus, duos motus conſideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium cauſam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo iſta ſimul oſtendemus.

PROPOSITIO I.

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accreſcere, & ſpatia æqualibus temporibus ab initio deſcenſus emenſa, augeri continue æquali exceſſu.

Tab. V. Fig. 1.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapſum eſſe per ſpatium A B, atque ubi pervenit in B, acquiſiviſſe celeritatem qua deinceps, tempore ſecundo, motu æquabili, percurrere poſſet ſpatium quoddam B D. Scimus ergo ſpatium ſecundo tempore peragendum majus fore ſpatio B D, quia vel ceſſante in B omni gravitatis actione ſpa-


Fig. 1
N
H
E
D
G
F
A
K
C
L
L
B
Fig. 3.
D D
E E
D
E
D
E
C
D
E
B
D
E
D
E
D D
E E
Fig. 2.
A
B
E
F
D
C
L

ſpatium B D percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpatium ipſi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, ſcimus tempore ſecundo grave perventurum ad E. *De deſcensu gravium.*

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium E F, quod duplum futurum ſit ſpatii B D; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium E F, etiam ſpatium F G, ipſi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hîc habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium G H triplum ſpatii B D, & ſpatium H K ipſi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi.

De descensu gravium.

Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi B D æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt; ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete caſum inchoante, dimidium eſt ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

TAB. V. Fig. 1.

Ponantur quæ in propoſitione præcedenti, ubi quidem A B erat ſpatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. B D vero ſpatium quod pari tempore tranſiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquiſita erat in fine primi temporis, ſeu in fine ſpatii A B. Dico itaque ſpatium B D duplum eſſe ad A B.

Quum enim ſpatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente tranſmiſſa ſint A B, B E, E G, G H, quorum inter ſe certa quædam eſt proportio: ſi eorum temporum dupla tempora ſumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus ſpatia A B, B E, peracta fuere; pro ſecundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere ſpatia E G, G K, oportet jam ſpatia A E, E K, quæ ſunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter ſe eſſe ſicut ſpatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur ſit ut A B ad B E, ita A E ad E K; & convertendo, ut E B ſive D A ad A B ita K E ad E A: erit quoque, dividendo, D B ad B A ut exceſſus K E ſupra E A ad E A. Quum ſit autem, ex oſtenſis propoſitione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum ſimplici B D; apparet dictum exceſſum K E ſupra E A æquari quadruplæ B D.

B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipſius B A: eadem vero E A æquatur, uti diximus, & duplæ A B & ſimplici B D. ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonſtrandum. DE DESCENSU GRAVIUM.

PROPOSITIO III.

Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmiſſa, quorum utrumque ab initio deſcenſus accipiatur, ſunt inter ſe in ratione duplicata eorundem temporum, ſive ut temporum quadrata, ſive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquiſitarum.

Quum enim oſtenſum ſit propoſitione antecedenti ſpatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, creſcere æquali exceſſu, qui exceſſus ſit ipſi B D æqualis: Patet nunc, quoniam B D eſt dupla A B, ſpatium B E fore triplum A B; E G quintuplum ejuſdem A B; G K ſeptuplum; aliaque deinceps auctum iri ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, ſeſe conſequentium, ſumma faciat quadratum, cujus latus eſt ipſa adſumptorum numerorum multitudo (velut ſi tres primi addantur, facient novem, ſi quatuor ſexdecim) ſequitur hinc ſpatia, à gravi cadente tranſmiſſa, quorum utrumque à principio caſus inchoetur, eſſe inter ſe in ratione duplicata temporum quibus caſus duravit, ſi nempe tempora commenſurabilia ſumantur. TAB. V. Fig. 1.

Facile autem & ad tempora incommenſurabilia demonſtratio extendetur. Sint enim tempora hujuſmodi, quorum inter ſe ratio ea quæ linearum A B, C D. ſpatiaque temporibus his tranſmiſſa ſint E, & F, utraque nimirum ab initio deſcenſus adſumpta. Dico eſſe, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita ſpatium E ad F. TAB. V. Fig. 2.

Si

DE DESCENSU GRAVIUM.

Si enim negetur; habeat primo, ſi poteſt, ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, ſumta C G minore quam C D, & à C D auferatur pars D H, minor quam D G exceſſus C D ſupra C G, atque ita ut reliqua H C commenſurabilis ſit ipſi A B; hoc enim fieri poſſe conſtat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita ſpatium E, quod tempore A B peractum eſt, ad ſpatium peractum tempore C H, per ſuperiùs oſtenſa. Hoc vero ſpatio majus eſt illud quod tempore C D percurritur, nempe ſpatium F. ergo ſpatii E ad ſpatium F minor eſt ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum A B ad quadratum C G; ergo minor quoque erit ratio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadrato C H; quod eſt abſurdum, quum C H major dicta ſit quam C G. Non habet igitur ſpatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem; ſitque ratio ſpatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C L, ſumptâ C L majore quam C D, & à C L auferatur L K minor exceſſu L D, quo C D ſuperatur à C L, atque ita ut reliqua K C ſit commenſurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita eſt ſpatium E, peractum tempore A B, ad ſpatium peractum tempore C K. Hoc vero ſpatio minus eſt ſpatium peractum tempore C D, nempe ſpatium F. erit proinde ſpatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem ſpatium E ad F, ita ponebatur eſſe quadratum A B ad quadratum C L. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C L quam ejuſdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C L minus erit quam qu. C K. quod eſt abſurdum, quum C L major ſit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet ſpatium E ad F quam

qua-

quadratum A B ad quadratum C D. quare neceſſe eſt ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquiſitæ ſint inter ſe ſicut ipſamet tempora; apparet rationem ſpatiorum E ad F eandem quoque eſſe quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmiſſa ſunt. Itaque conſtat propoſitum. DE DESCENSU GRAVIUM.

PROPOSITIO IV.

SI grave celeritate ea quam in fine deſcenſus acquiſivit ſurſum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, ſpatia quæ prius ſurſum, eadem deorſum transeat, adeoque ad eandem unde deſcenderat altitudinem aſcendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propoſitione 2, ſpatia quotlibet, æqualibus temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; ſecundum compoſitum ex B D, quod celeritate æquabili acquiſita per A B tranſeundum erat, & ex D E ipſi A B æquali; tertium compoſitum, ex E F, duplo ipſius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compoſitum ex G H, triplo ipſius B D, & ex H K ipſi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro creſcentia, ſi plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem ſpatia K G, G E, E B, B A, ſingula ſingulis peragenda eſſe à gravi ſurſum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine deſcenſus K acquiſita. TAB. V. Fig. 1.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque deſignetur deinceps longitudine ſpatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in deſcenſu conſideravimus, tranſmiſſurum eſſet.

Itaque ex oſtenſis dicta propoſitione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D,

De descensu gravium.

hoc eſt celeritatem K F, quia K F æquatur ipſis H G, B D, ſunt enim partes ſingulæ H K, F G, æquales ipſi A B, ac proinde utraque ſimul ipſi B D, quam eſſe duplam A B oſtendimus propoſitione 2. Itaque celeritatem in fine deſcenſus K acquiſitam ſurſum convertendo, ſi grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte ſpatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur aſcenſus K F ſpatio F G ipſi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypotheſin initio ſumptam. Ergo parte prima temporis aſcendet grave tantum per K G, quo eodem ſpatio parte temporis noviſſima deſcenderat. Simul vero & celeritati tantum deceſſiſſe neceſſe eſt, quantum acquiritur temporis parte una deorſum cadendo, hoc eſt celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G aſcenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio aſcenſus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Eſt autem ipſi H G æqualis G D; quum æquetur ipſi F E una cum D B, hoc eſt una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus F G & E D; Ergo ſi ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, conficeret una parte temporis ſpatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur aſcenſus iſte ſpatio D E, ipſi A B æquali. Ergo, hac ſecunda parte temporis, aſcendet per ſpatium G E, quod ſimili temporis parte etiam cadendo tranſierat. Simul autem celeritati tantum deceſſiſſe denuo debet quantum temporis parte una ex caſu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi uſque ad E aſcenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D aufertur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis eſt duabus D E, F G.

Eſt autem ipſi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipſi B D bis ſumptæ, hoc eſt ipſi B D una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus A B, D E. Ergo ſi ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, confecturum eſſet una temporis parte ſpatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur aſcenſus iſte ipſo ſpatio A B. Proinde hac parte temporis per ſpatium E B tantum

aſcen-

aſcendet, quod ſimili parte temporis deſcendendo quoque tranſierat. Hic vero rurſus celeritati tantum deceſſiſſe neceſſe eſt quantum una temporis parte cadendo deorſum acquiritur, hoc eſt celeritatem B D. Itaque grave, ubi uſque ad B aſcenderit, habet celeritatem ipſam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipſius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, confecturum eſſet parte una temporis ſpatium æquale ipſi D B, hoc eſt duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur aſcenſus iſte ſpatio quod ipſi A B æquale ſit. Igitur hac parte temporis aſcendet tantummodo per ſpatium B A, quod etiam primo deſcenſus tempore tranſierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus neceſſario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forſan altius aſcendiſſe quam ad A, atque inde eo relapſum eſſe. At hoc abſurdum eſſet, cum non poſſit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit aſcendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rurſus deceſſerit celeritas B D, patet jam gravi in A conſtituto nullam celeritatem ſupereſſe, ac proinde non altius excurſurum. Itaque oſtenſum eſt ad eandem unde decidit altitudinem perveniſſe, & ſingula ſpatia, quæ æqualibus deſcenſus temporibus tranſmiſerat, eadem totidem aſcenſus temporibus remenſum eſſe: ſed & æqualibus temporibus æqualia ipſi deceſſiſſe celeritatis momenta apparuit. Ergo conſtat propoſitum. DE DESCENSU GRAVIUM.

Quia vero in demonſtratione propoſitionis ſecundæ, ex qua pendet præcedens, adſumptum fuit certam quandam eſſe proportionem ſpatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente tranſeuntur, quæque eadem ſit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita ſe habere neceſſe eſt, & ſi negetur, fatendum fruſtra proportionem iſtorum ſpatiorum inveſtigari. Tamen, quia propoſitum etiam abſque hoc demonſtrari poteſt, Galilei methodum ſequendo, operæ pretium erit demonſtrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conſcribere. itaque rurſum hic demonſtrabimus.

De deſcenſu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete caſum inchoante, dimidium eſſe ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum celeritate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

TAB. V. Fig. 3. Sit tempus deſcenſus totius A H, quo tempore mobile peregerit ſpatium quoddam cujus quantitas deſignetur plano P. ductaque H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine caſus acquiſitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas ſpatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Oſtendendum eſt igitur planum P dimidium eſſe rectanguli M H, hoc eſt, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non eſt æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, ſi fieri poteſt, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumſcriptâ triangulo A H L figurâ è rectangulis quorum altitudo ſingulis diviſionum ipſius A H partibus æquetur, ut ſunt rectangula B C, D E, F G, alterâque eidem triangulo inſcriptâ, ex rectangulis ejuſdem altitudinis, ut ſunt K E, O G &c. ut, inquam, exceſſus illius figuræ ſupra hanc, minor ſit exceſſu trianguli A H L ſupra planum P. hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt, cum totus exceſſus figuræ circumſcriptæ ſuper inſcriptam æquetur rectangulo infimo, baſin habenti H L. Erit itaque omnino exceſſus ipſius trianguli A H L ſupra figuram inſcriptam minor quam ſupra planum P, ac proinde figura triangulo inſcripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius deſcenſus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis creſcant eadem proportione qua tempora deſcenſus *; ſitque celeritas

* Prop. I. huj.

in

in fine totius temporis acquiſita H L; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K; quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis ſecundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, ſpatium aliquod à mobili transmiſſum eſſe, quod majus ſit nihilo; tempore vero ſecundo C E transmiſſum eſſe ſpatium quod majus ſit quam K E, quia ſpatium K E transmiſſum fuiſſet tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K. habent enim ſpatia, motu æquabili transacta, rationem compoſitam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurri poſuerimus ſpatium M H, ſequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri ſpatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad C K.

De deſcenſu gravium.

Quum ergo, ut dixi, ſpatium K E ſit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K; manifeſtum eſt iſto accelerato motu, tempore C E, majus ſpatium quam K E confecturum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus ſpatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confecturum eſſet tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, ſingulis temporis A H partibus, à mobili majora ſpatia quam ſunt rectangula figuræ inſcriptæ, ipſis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum majus erit ipſa figura inſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P. Itaque figura inſcripta minor erit ſpatio P. quod eſt abſurdum; eodem enim ſpatio major oſtenſa fuit. Non eſt igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus eſſe oſtendetur.

Sit enim, ſi poteſt; & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inſcripta circumſcriptaque rurſus, ut ante, ſit triangulo A H L figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori exceſſu quam quo planum

De descensu gravium.

P ſuperat triangulum A H L, erit igitur neceſſario figura circumſcripta minor plano P. Conſtat jam, prima temporis parte A C, minus ſpatium à mobili transmitti quam ſit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum eſt. Similiter ſecunda parte temporis C E, minus ſpatium motu accelerato transmittetur quam ſit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile aſſequitur. Atque ita deinceps, ſingulis partibus temporis A H, minora ſpatia à mobili trajicientur quam ſunt rectangula figuræ circumſcriptæ, ipſis partibus adjacentia. Quare totum ſpatium motu accelerato peractum, minus erit ipſa figura circumſcripta. Spatium vero illud æquale poſitum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumſcripta. quod eſt abſurdum, cum figura hæc plano P minor oſtenſa fuerit. Ergo planum P non majus eſt triangulo A H L, ſed nec minus eſſe jam oſtenſum fuit. Ergo æquale ſit neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonſtrata ſunt, gravibus per plana inclinata deſcendentibus atque aſcendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire ſciendum eſt: cum, quæ de effectu gravitatis poſita fuerunt, eadem ratione utrobique ſint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonſtrare propoſitionem ſequentem quam concedi ſibi, ut quodammodo per ſe manifeſtam, Galileus poſtulavit. nam demonſtratio illa quam poſtea adferre conatus eſt, quæque in poſteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Eſt autem propoſitio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, ſuper diverſis planorum inclinationibus deſcendendo acquiſitæ, æquales ſunt, ſi planorum elevationes fuerint æquales.

Ele-

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus ſecundum perpendiculum. DE DESCENSU GRAVIUM.

Sunto itaque plana inclinata, quorum ſectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D ſint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rurſus ex C per planum C B. dico utroque caſu eundem gradum velocitatis in puncto B acquiſiturum. TAB. V. Fig. 4.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, poſita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rurſus per totam B C poſſit aſcendere *. Ergo & per F B acquiret eam velocitatem qua poſſit aſcendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, ſi continuet porro motum per B C; quod repercuſſu ad ſuperficiem obliquam fieri poteſt; aſcendet usque in C, hoc eſt, altius quam unde decidit, quod eſt abſurdum.

* Prop. 4. huj.

Eodem modo oſtendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonſtrandum.

Quod ſi vero, pro plano alterutro, ſumatur perpendiculum ipſum planorum elevationi æquale; per quod decidere mobile ponatur, ſic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri conſtat; eadem namque eſt demonſtratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonſtratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de deſcenſu ſuper planis inclinatis tradidit, ſuperſtruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora deſcenſuum ſuper planis diverſimode inclinatis, ſed quorum eadem eſt elevatio, eſſe inter ſe ut planorum longitudines.

Sint

De deſcenſu gravium. TAB. V. Fig. 5.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico tempus deſcenſus per planum A C ad tempus deſcenſus per A D eſſe ut longitudo A C ad A D. Eſt enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur caſu per A C *. Similiter tempus per A D eſt æquale tempori motus æquabilis per ipſam A D, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur caſu per A D. Eſt autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora ſingulis iſtis æqualia, nimirum tempus deſcenſus per A C, ad tempus deſcenſus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 2. huj.

* Prop. præced.

Eodem modo oſtendetur & tempus deſcenſus per A C, ad tempus caſus per A B perpendicularem, eſſe ut A C ad A B longitudine.

PROPOSITIO VIII.

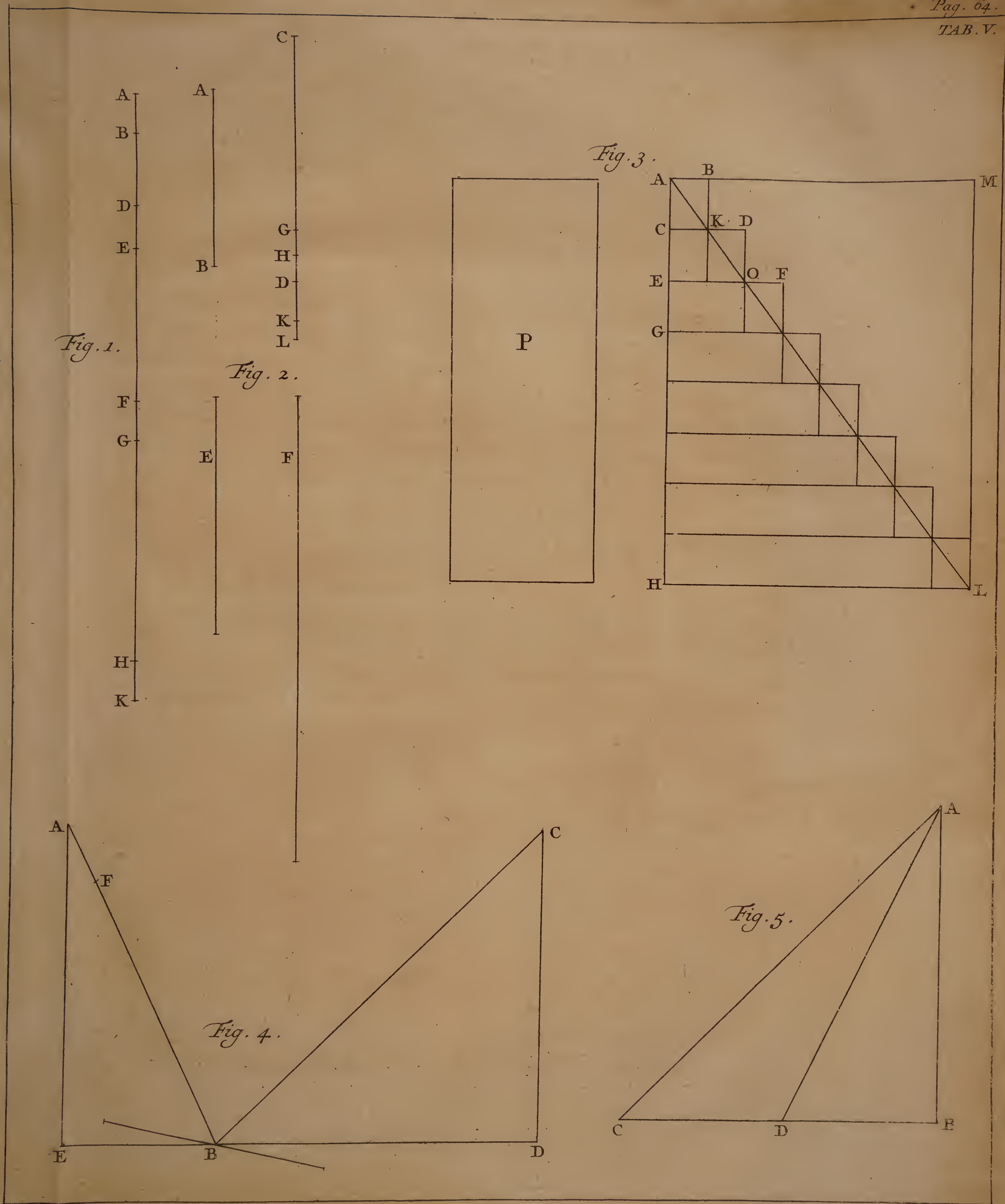
SI ex altitudine eadem deſcendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; ſemper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

TAB. VI. Fig. 1.

Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, ſupra horizontalem lineam D F per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta eſt perpendicularis E F. deſcendatque mobile per plana illa ab A uſque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per

TAB. V.


Fig. 1.
A
B
D
E
F
G
H
K
Fig. 2.
A
B
C
G
H
D
K
L
E
F
P
Fig. 3.
A
B
M
C
K
D
E
O
F
G
H
L
Fig. 4.
A
F
C
E
B
D
Fig. 5.
A
C
D
B

per A B deſcendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque deſcendens per G B *; manifeſtum eſt, cum flexus ad B nihil obſtare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam ſi per G C planum deſcendiſſet; hoc eſt, quantam haberet ex deſcenſu per E C. Quare & reliquum planum C D eodem modo tranſibit ac ſi per E C adveniſſet, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac ſi deſcendiſſet per planum E D, hoc eſt, eandem quam ex caſu perpendiculari per E F. quod erat demonſtrandum.

DE DESCENSU GRAVIUM.

* Prop. 6. huj.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam deſcendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compoſitæ eſſent hic conſiderare licet) ſemper eandem illi velocitatem acquiri ſi ab æquali altitudine deſcenderit: tantamque eam eſſe velocitatem, quantam caſu perpendiculari ex eadem altitudine adipiſceretur.

PROPOSITIO IX.

SI grave, à deſcenſu, ſurſum convertat motum ſuum, aſcendet ad eandem unde venit altitudinem, per quaſcunque planas ſuperficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, inceſſerit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata ſint ſurſum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E ſit eadem altitudine cum puncto A. Dico ſi mobile, poſt caſum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventutum uſque in E.

TAB. VI. Fig. 2.

Dicatur enim, ſi fieri poteſt, tantum ad G perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in F & H. Cum igitur mobile, ſuperatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ poſſit aſcendere per D G, vel per D H; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus eſſe conſtat ex propoſitione 6; Ergo, ſuperato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuiſſet aſcendere per C H,

vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuiſſet aſcendere per B F, hoc eſt, eandem quam acquireret deſcendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua poteſt aſcendere uſque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave deſcendendo per F B, poſſet aſcendere per B A, hoc eſt, altius quam unde diſceſſerat, quod fieri non poteſt.

Eſt autem eadem prorſus demonſtratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile aſcendat. Unde & ſi infinita fuerit planorum multitudo, hoc eſt, ſi ſuperficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile aſſurget.

PROPOSITIO X.

SI mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet ſuperficiem deſcendat, ac rurſus impetu concepto per quamlibet aliam feratur ſurſum, habebit aſcendendo ac deſcendendo in punctis æque altis eandem ſemper velocitatem.

TAB. IV. Fig. 3.

Ut ſi mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per ſuperficiem B C D, in qua punctum C ſit pari altitudine atque in A B eſt punctum E. Dico in C eandem velocitatem ineſſe mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas ſuperſit mobili qua porro aſcendat usque ad D punctum, æque altum ac A*: cumque & ex deſcenſu per A E velocitatem eam acquirat qua, converſo motu, aſcenſurum ſit per C D*; Patet cum pervenit ad C aſcendendo, eandem ipſum habere velocitatem, quam habebat in E deſcendendo; quod erat demonſtrandum.

* Prop. præced.

* Prop. præced.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per ſuperficiem aliquam deorſum tendat, ac deinde converſo motu ſurſum per eandem

dem ſuperficiem vel aliam ſimilem ſimiliterque po-ſitam feratur, æqualibus temporibus per idem ſpatium deſcendet atque aſcendet. De descensu gravium.

Velut ſi per ſuperficiem A B deſcendat mobile, atque, ubi ad B pervenerit, converſo motu ſurſum per eandem A B, vel ei ſimilem & reſpectu plani horizontalis ſimiliter poſitam B C, aſcendat, conſtat ex ante demonſtratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat aſcendendo ac deſcendendo *; apparet eandem lineam bis eadem velocitate ſingulis ſui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia eſſe neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum. TAB. VI. Fig. 4. * Prop. præced.

PROPOSITIO XII.

Eſto circulus A B C, *diametro* A C, *cui ad angulos rectos ſit* F G; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* A F *extra circulum, quæ quidem neceſſario ſecabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* B D, *lineis* G F, A F *interceptum, minorem eſſe recta* D F. TAB. VI. Fig. 5.

Jungatur enim B C, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta B E, quæ neceſſario occurret rectæ F G inter F & D. Eſt igitur angulus B A C in circulo æqualis angulo E B C*. quare & angulus F B E, qui una cum E B C conſtituit angulum rectum F B C, erit æqualis B C A. Quia autem ſimilia ſunt triangula A B C, A G F, erit & angulus F æqualis angulo A C B. Ergo idem angulus F æqualis angulo F B E. Itaque iſoſceles eſt triangulus F E B, habens crura æqualia F E, E B. Addita ergo utrique eorum recta E D, fiet F D, æqualis duabus B E, E D. Haſce vero duas majores eſſe conſtat arcu B D, iiſdem termi- * Prop. 32. Lib. 3. Eucl.

 nis

De descensu gravium. nis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & F D eodem arcu B D major erit: quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIII.

Tab. VI. Fig. 6.

Isdem poſitis, ſi recta A B *occurrat ipſi* D G *intra circulum; Dico arcum* B D, *rectis* G D, A B *interceptum, majorem eſſe recta* D F.

Jungatur enim D C & ducatur arcui D B ſubtenſa D B. Quoniam ergo angulus A B D æqualis A C D, hoc eſt, angulo A D G; angulus autem D F B major angulo A D F, ſive A D G; erit idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B majus latere D F; unde multo magis arcus D B ſuperabit eandem D F. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Tab. VII. Fig. 1.

Sit cycloïs A B C *cujus baſis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & deſcriptione mechanica ſuperius traditis ſatis manifeſtum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus deſcriptus ſit* B G D, *& à quolibet puncto* E *in cycloide ſumpto agatur* E F *baſi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *ſecetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem eſſe.*

Deſcribatur enim per E punctum circulus L E K ipſi B G D æqualis, quique tangat baſin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Eſt igitur recta A K arcui E K æqualis; ſed tota A D æqualis ſemicircumferentiæ K E L; ergo K D æqualis arcui E L ſive G B. Eſt autem K D ſive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo conſtat & G E æqualem eſſe arcui G B.

PRO-

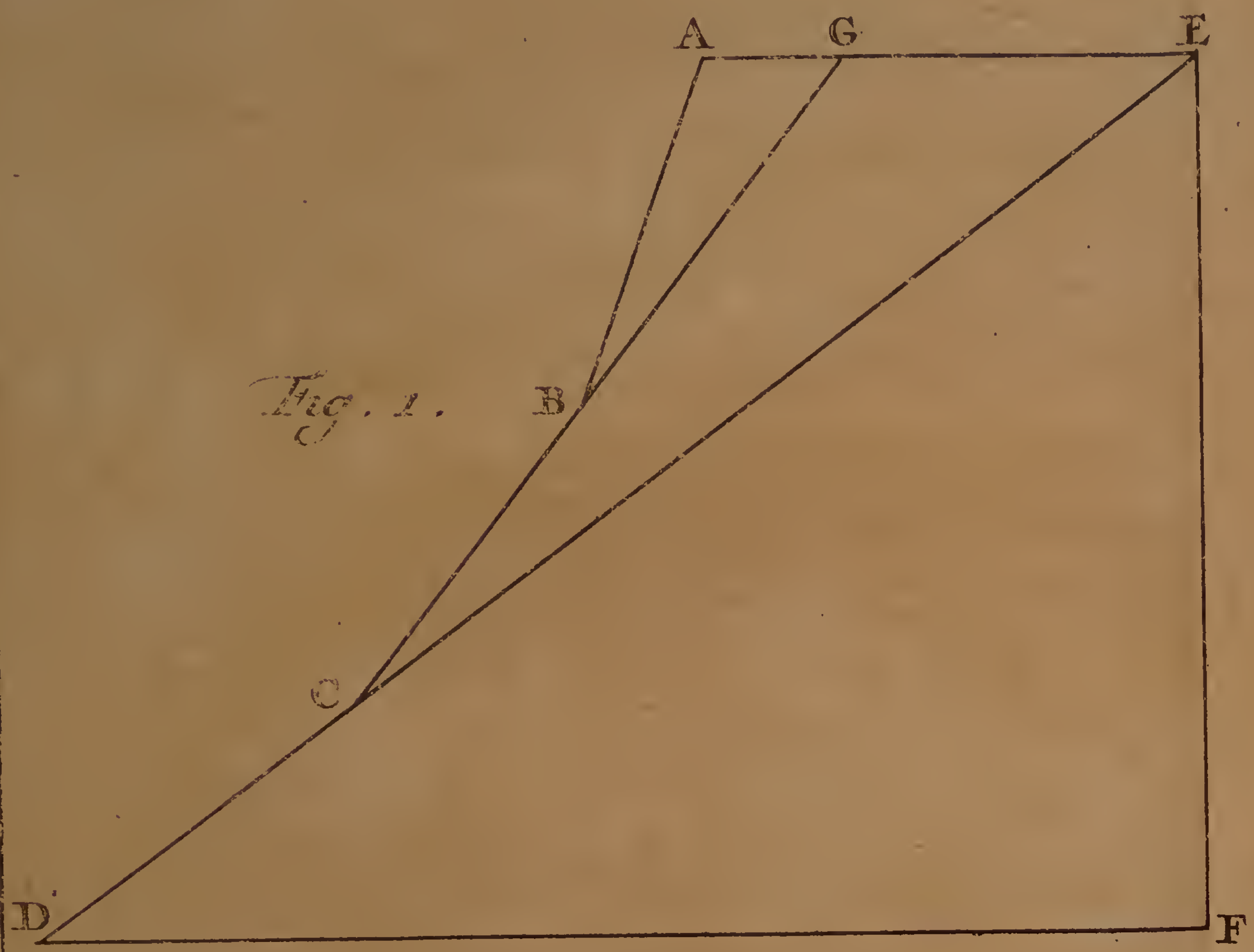


Fig. 1.

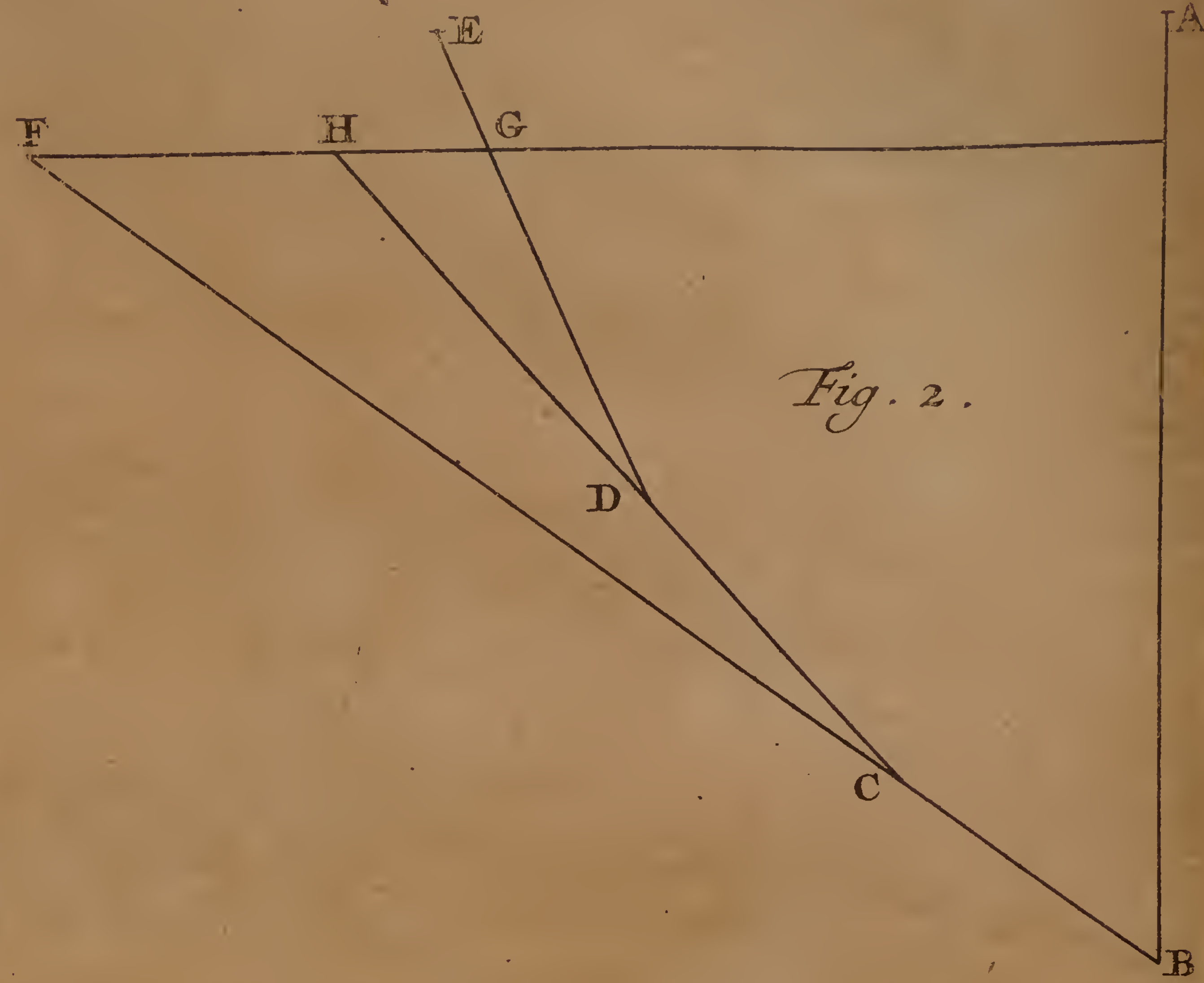


Fig. 2.

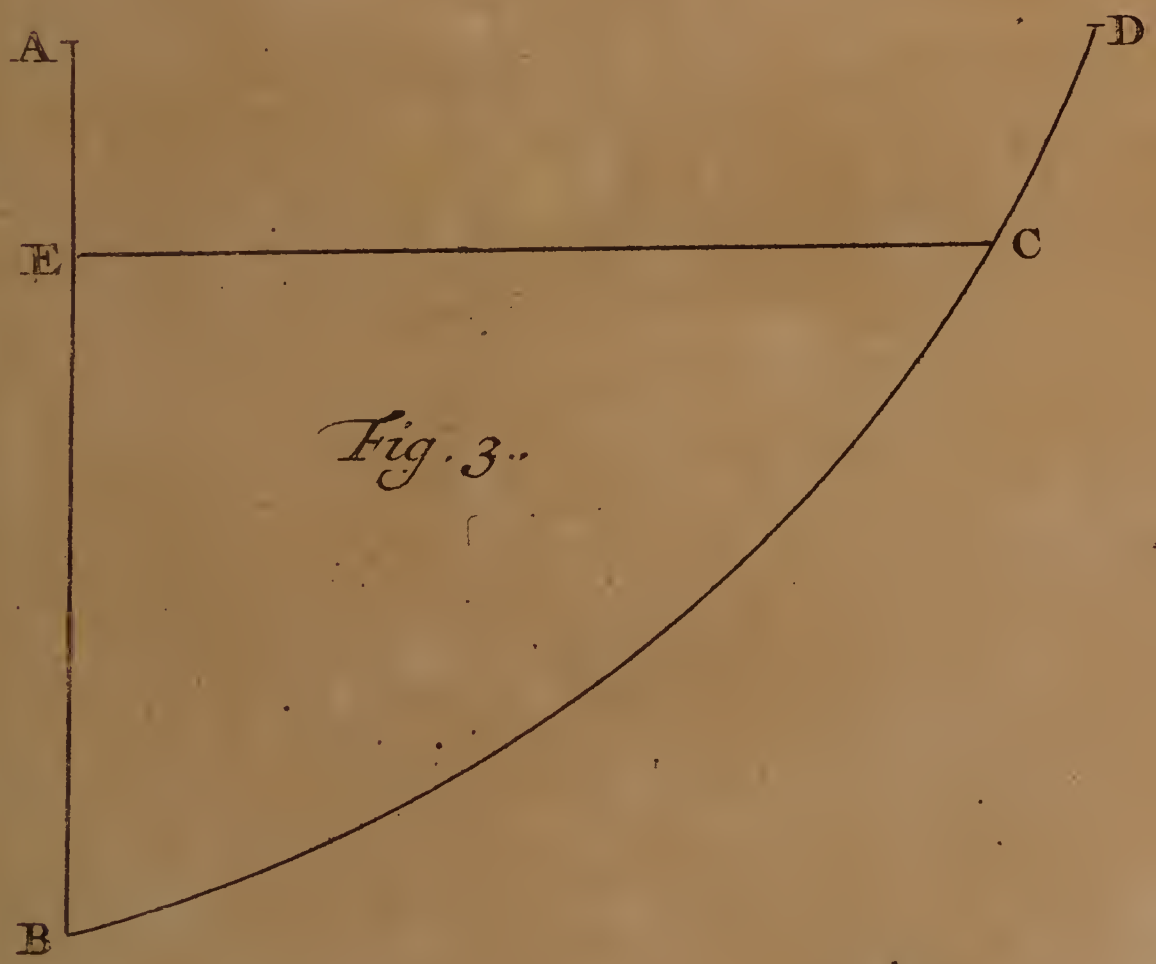


Fig. 3.

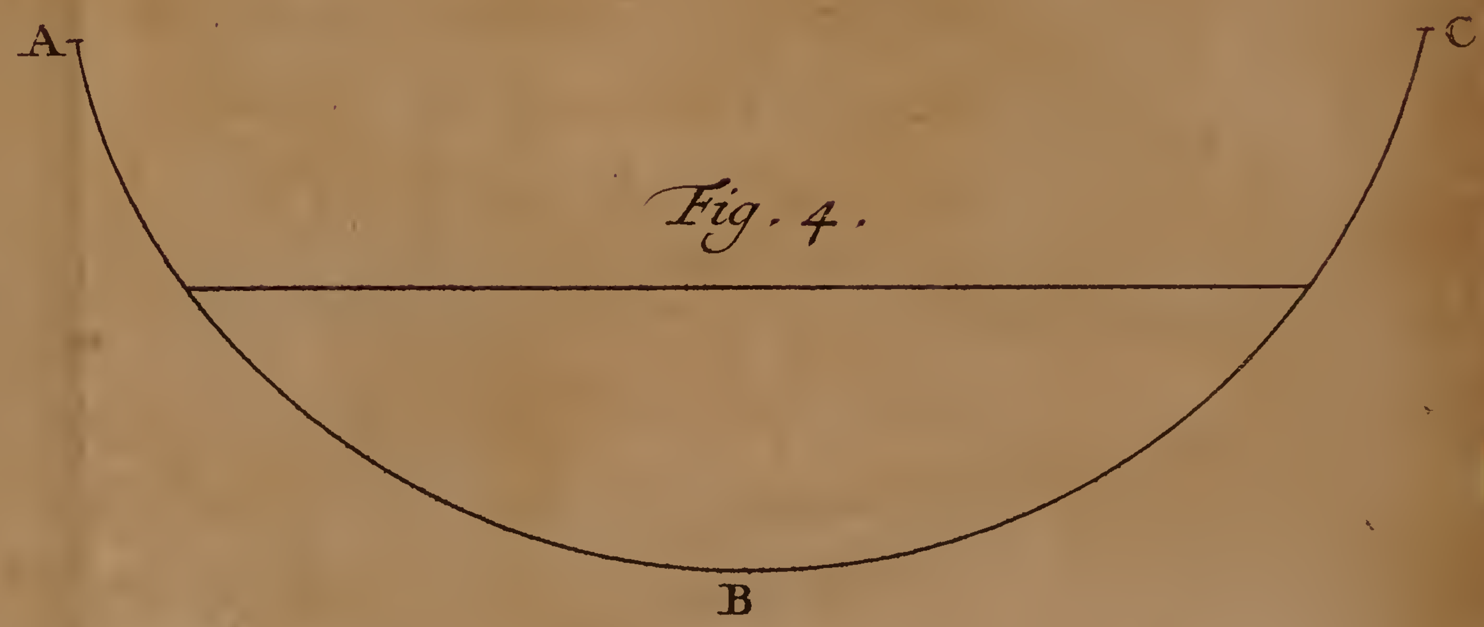


Fig. 4.

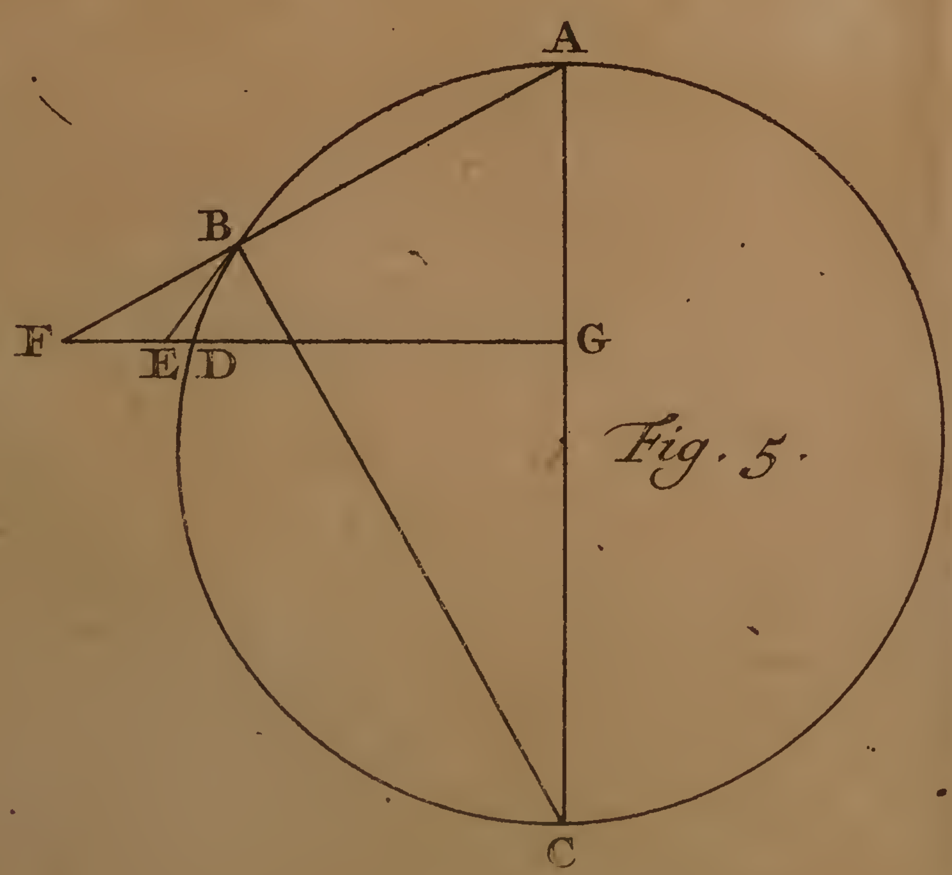


Fig. 5.

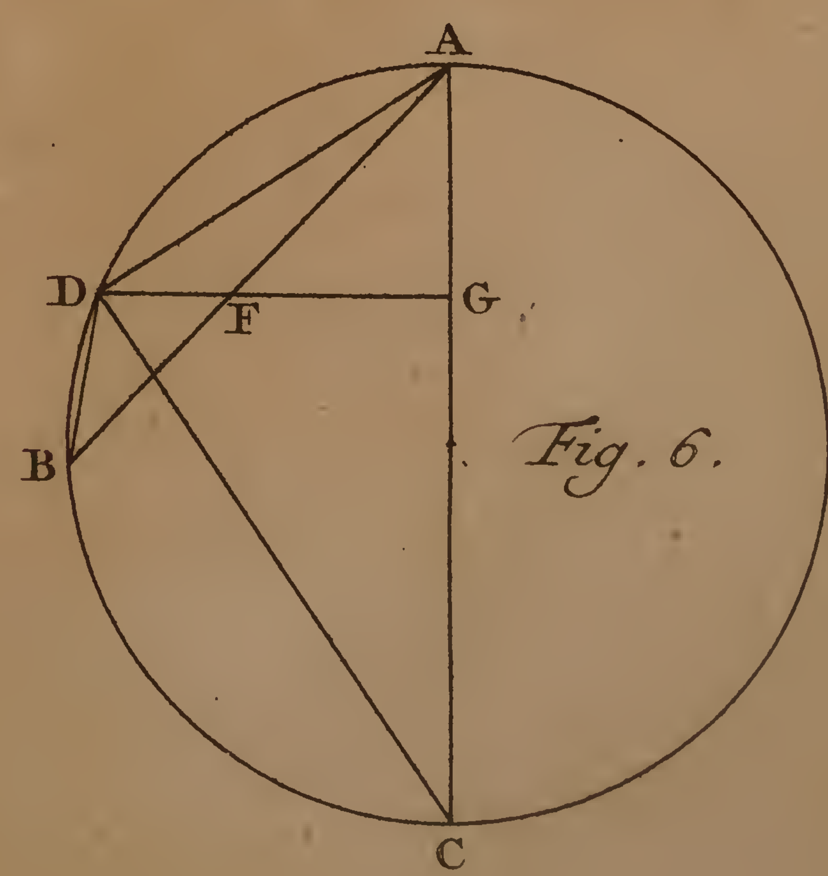


Fig. 6.

PROPOSITIO XV.

De descensu gravium.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat. TAB. VII. Fig. 2.

Circa axem cycloidis A D deſcribatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela baſi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diverſum, ac primo verſus ſuperiora velut H, & per H ducantur recta baſi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L eſt æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc eſt, rectâ E B, ſive M H; unde apparet punctum H eſſe extra cycloidem.

Deinde in recta H N ſumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, baſi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis eſt arcui O A; O P autem major arcu O E; erit P Q minor arcu E A, hoc eſt, rectâ E B, ſive P N. Unde apparet rurſus punctum N eſſe extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N ſumptum, ſit extra cycloidem, conſtat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonſtrandum.

Huic demonſtrationi an locum ſuum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei abſimilem à clariſſimo Wrennio editam inveniam in libro Walliſii de Cycloide. Poteſt autem & univerſali conſtructione propoſitum abſolvi, quæ non cycloidi tantum ſed & aliis curvis, ex cujuſlibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo ſit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ TAB. VII. Fig. 3.

O L ſuper regula L D; deſcribente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L ſumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum deſcribens eſſet in A: quod punctum contactus ſemper inveniri poteſt, ſiquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter ſe parallelæ ducendæ ſint, quarum altera tranſeat per punctum deſcribens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter ſe diſtent quantum diſtat punctum datum A ab regula L D: dico ipſam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, ſive circumferentiam M A F deſcriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C, per punctum A, ducta curvam ibidem continget.

Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod diſtet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ poſitus in B E D, cum punctum deſcribens eſſet in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum deſcribens eſſet in A, hìc jam ſublatum ſit in E; & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

Quia ergo recta C D æqualis eſt curvæ E D; eâdem vero curva major eſt utraque ſimul E H, H D; erit E H major quam C H. Unde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis eſt L C A, ad K E C, fit angulus C E B: & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. ſed E B æquale patet eſſe C A, cum ſit idemmet ipſum unà cum figura tranſpoſitum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc eſt, quam C F. unde conſtat punctum B eſſe extra circumferentiam M A F.

Sit rurſus punctum N in curva ſumptum inter regulam L D & punctum A. Cumque punctum deſcribens eſſet in N, ponatur ſitus figuræ fuiſſe in V L, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, ſit jam

ſubla-

ſublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A; imo erit ipſa C A translata in V N. Jam quia recta L C æquatur curvæ L V, ac proinde major eſt recta L V, erit in triangulo C L V angulus L V C major quam L C V. Quare addito inſuper angulo L V N ad L V C, fiet totus N V C major utique quam L C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars eſt L C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc eſt quam C M. Unde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum. De descensu gravium.

Eſt autem eadem quoque tum conſtructio tum demonſtratio, ſi curva genita ſit à puncto deſcribente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ ſumpto. Niſi quod, hoc poſteriori caſu, pars quædam curvæ infra regulam deſcendit, unde nonnulla in demonſtratione oritur diverſitas.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda eſt, datum in parte curvæ N A B, quæ infra regulam C L deſcendit, deſcripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam ſumpto, ſed certam poſitionem in eodem ipſius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum deſcribens eſſet in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, ſive circumferentiam radio C A centro C deſcriptam tangere curvam N A B in puncto A. Oſtendetur autem exterius ipſam contingere, cum in curvæ parte ſupra regulam C D poſita interius contingat. TAB. VIII. Fig. 1.

Poſitis enim & deſcriptis iiſdem omnibus quæ prius, oſtenditur rurſus angulus E C H major quam C E H. atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B; & à C E H auferendo H E B, qui æqualis eſt D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B. ſed ipſi E B æqualis eſt C A, ſive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F eſt ultra curvam N A B à centro remotum.

Item

De descensu gravium.

Item rurſus oſtenditur angulus L V C major L C V. Quare C V P, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulum D C N, fit V C N; & auferendo ab C V P angulum P V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Eſt autem ipſi V N æqualis C A ſive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B à centro C remotum. Itaque conſtat circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi punctum curvæ per quod tangens ducenda eſt, ſit illud ipſum ubi regula curvam ſecat, erit tangens quæſita ſemper regulæ perpendicularis; ut facile eſſet oſtendere.

PROPOSITIO XVI.

De motu in Cycloide. TAB. VIII. Fig. 2.

SI circuli circumferentiam, cujus centrum E, *ſecent rectæ duæ parallelæ* A F, B G, *quarum utraque ad eandem partem centri tranſeat, vel altera* A F *per centrum ipſum: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam ſecat, ducatur recta ipſam contingens: dico partem hujus* A B, *à parallela utraque interceptam, minorem eſſe arcu* A C, *ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui A C ſubtenſa recta A C. Quia ergo angulus B A F eſt æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major eſt ſemicirculo vel ſemicirculus, erit proinde angulus B A F, vel minor recto vel rectus; ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B ſubtenſum, majus erit latere A B. ſed idem latus A C minus eſt arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.

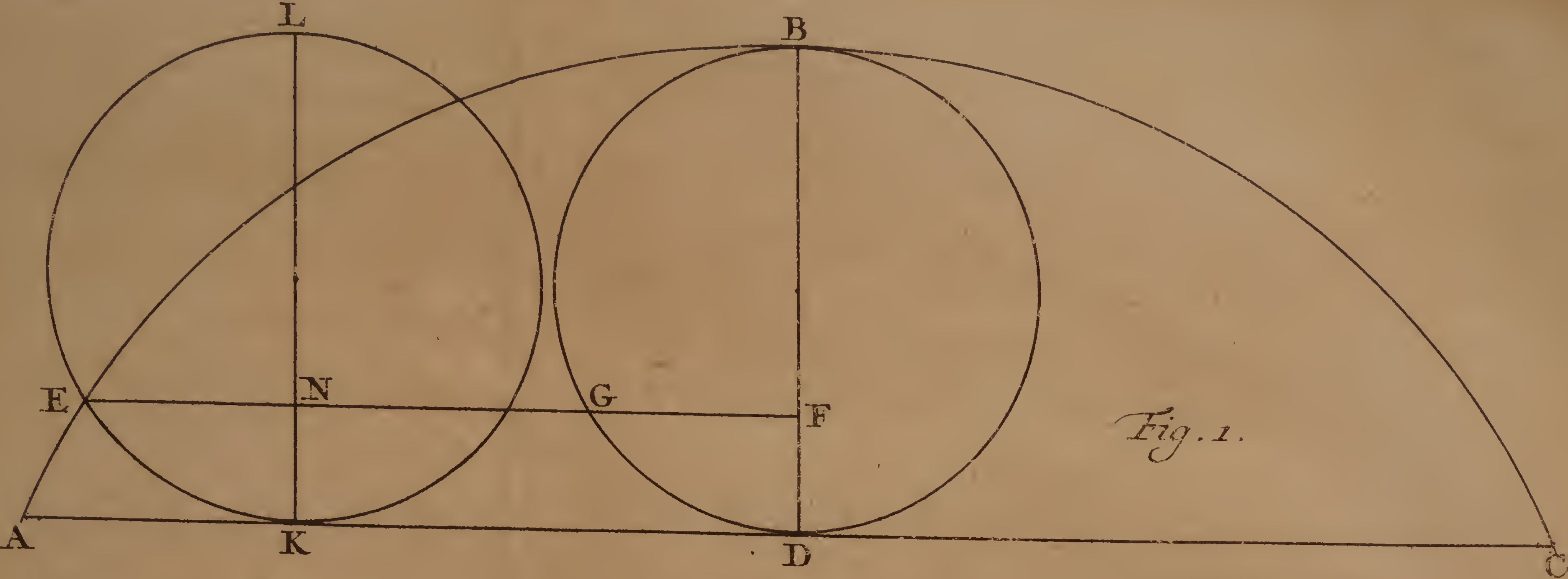


Fig. 1.

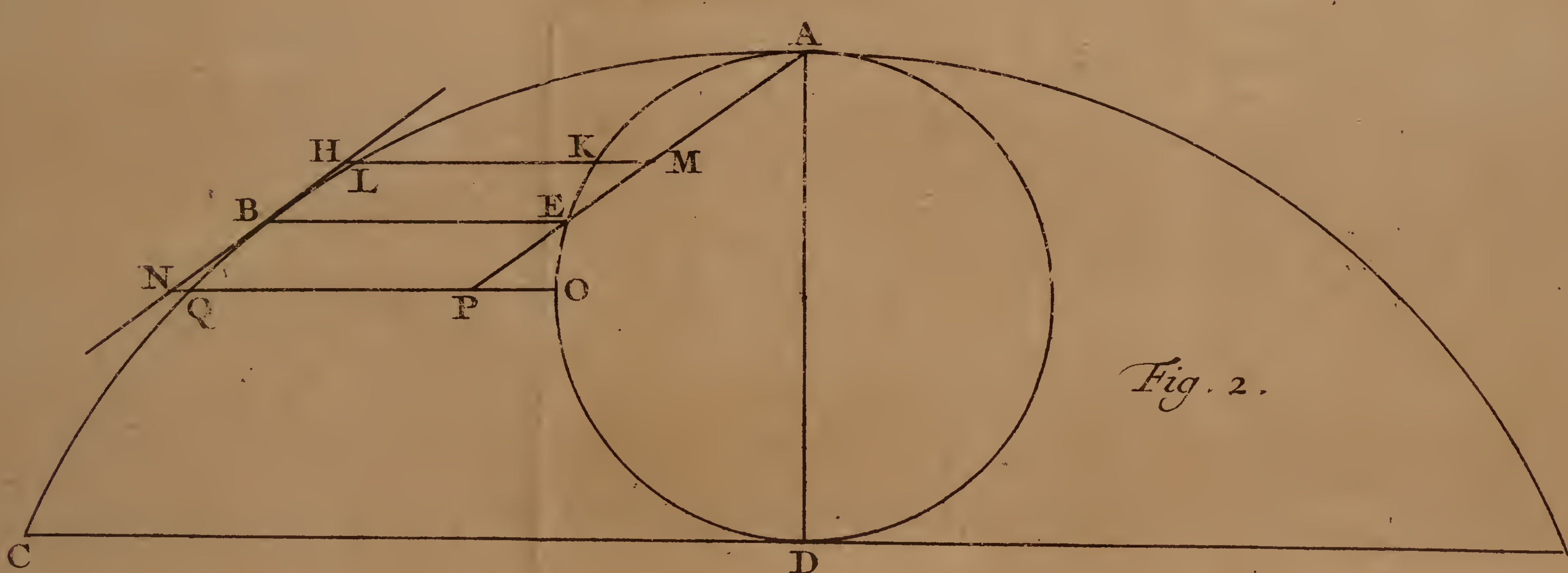


Fig. 2.

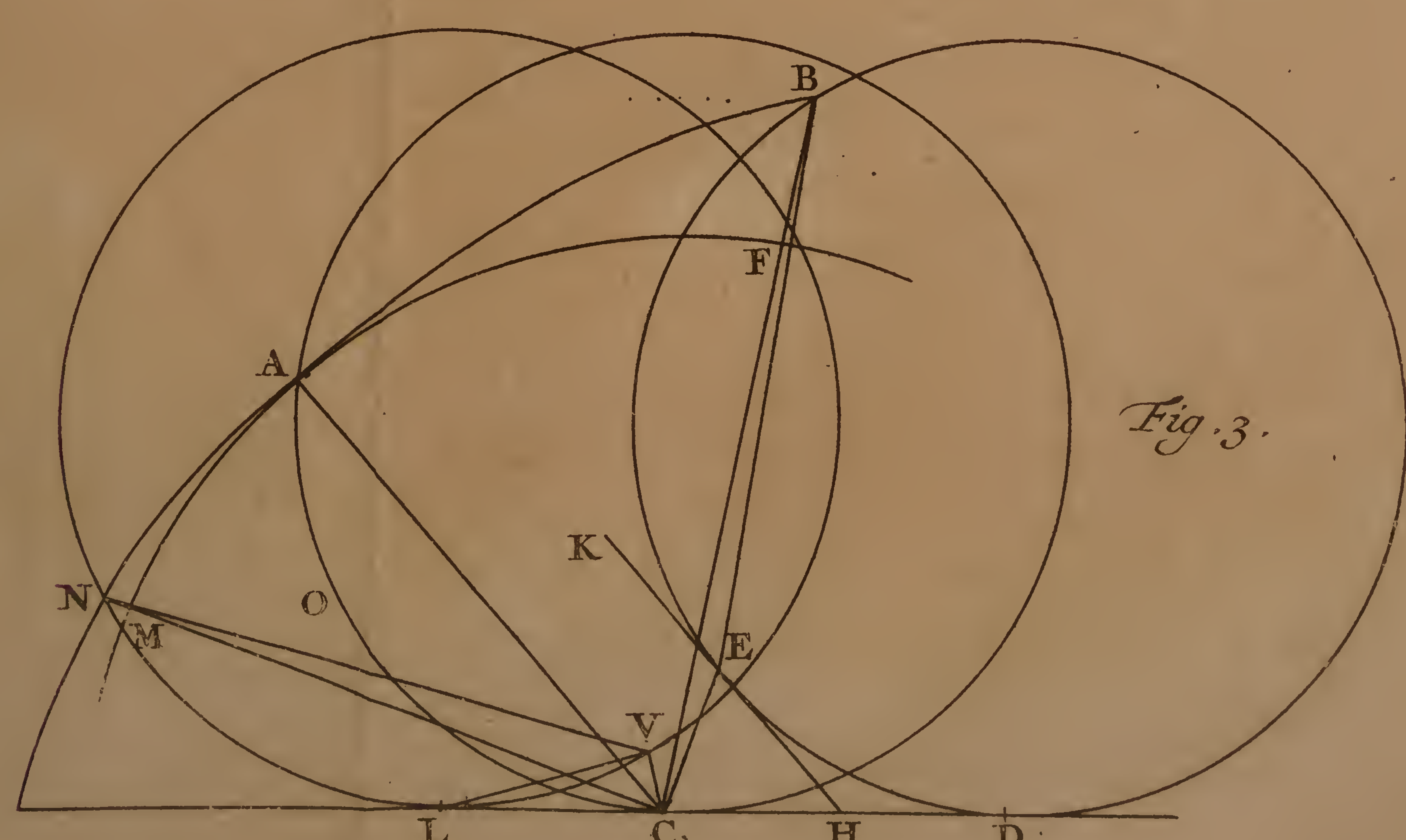


Fig. 3.

PROPOSITIO XVII.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

TAB. VIII. Fig. 3.

Iſdem poſitis, ſi tertia recta prioribus parallela D K, *circulum ſecuerit, quæ ab ea quæ centro propior eſt* A F, *tantundem diſtet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *à primis duabus parallelis intercepto minorem eſſe.*

Hoc enim patet quum A D ipſi A B æqualis ſit, quam antea oſtendimus arcu A C minorem eſſe.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. VIII. Fig. 4.

Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ ſecuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior eſt, vel tantundem atque altera diſtat, circumferentiæ occurrit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iiſdem parallelis intercepto* B C.

Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo igitur A C L, angulus C æqualis eſt angulo M C F, hoc eſt, ei quem capit portio circuli C B F. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum ſit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel ulterius diſtet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & conſequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores ſunt arcu C B. Ergo & A L una cum L B, hoc eſt, tan-

K gens

De motu in Cycloide.

gens A B, eodem arcu C B major erit. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

Tab. VIII. Fig. 5.

Isdem poſitis, ſi tertia recta prioribus parallela D K *circulum ſecet, quæ tantundem diſtet ab ea quæ remotior eſt à centro quantum hæc à reliqua* A F: *Erit pars tangentis in* B, *à parallela media, & ultimo addita* D K, *intercepta, nimirum* B D, *major arcu* B C.

Hoc enim manifeſtum eſt cum B D fiat ipſi B A æqualis, quam oſtendimus arcu B C majorem eſſe.

PROPOSITIO XX.

Tab. VIII. Fig. 6.

Si arcus circuli, ſemicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet ſecetur lineis rectis parallelis, quæ & inter ſe, & cum rectis ſibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla conſtituant, quales ſunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia ſectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi ſunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *ſimul ſumptas, minores eſſe arcu propoſito* A B. *Easdem vero omnes, non omiſſa* A C, *majores eſſe arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc eſt, majores arcu* A N.

Ponamus enim primo perallelarum aliquas tranſire ab utra-

traque parte centri Z, & ſit G H, earum quæ ſunt à parte B, centro proxima, vel per ipſum centrum tranſeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehenſæ, ut H K, L M, N O, ſingulæ ſuis arcubus minores ſunt *. Porro autem & tangens G F, arcu ſequente F D minor eſt *, & ſimiliter tangens E D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores ſunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, ſive arcu B A, quod erat primo oſtendendum.

De motu in Cycloide.

* Prop. 16. huj.

* Prop. 17. huj.

Porro jam demonſtrabimus tangentes omnes inter B O & A majores eſſe arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z tranſit quam parallela E F, quam pono proximam eſſe earum quæ à parte A tranſeunt, vel erit remotior, vel æque diſtabit.

Quod ſi E F longius à centro vel æque remota eſt ac G H, erit tangens F G major arcu ſuo F H, & reliquæ tangentes verſus A, nimirum E D, C A majores ſingulæ arcubus ſuis *; adeo ut omnes ſimul G F, E D, C A majores ſint arcu H A. ſed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu L N tangens N O; itaque tangentes omnes, præter H K; majores ſimul erunt arcu A N; multoque magis, accedente ipſa H K, tangentes omnes inter A & B comprehenſæ arcu eodem A N majores erunt.

* Prop. 18. huj.

* Prop. 19. huj.

Si vero G H à centro longius diſtat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M L ut ante major arcu L H, & tangens O N major arcu N L, & omnes proinde tangentes O N, M L, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major eſt arcu ſuo F D *, & tangens C A major ſimiliter arcu ſuo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc eſt, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop. 19. huj.

* Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonſtratio manifeſta eſt in caſibus aliis, qualiscunque ſemicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem ſit ubique, vel pars tantum præcedentis demonſtrationis.

K 2 PRO-

De motu in Cycloide.

PROPOSITIO XXI.

SI mobile deſcendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rurſus ex pari altitudine deſcendat per plana totidem contigua, ita comparata ut ſingula altitudine reſpondeant ſingulis priorum planorum, ſed majori quam illa ſint inclinatione. Dico tempus deſcenſus per minus inclinata, brevius eſſe tempore deſcenſus per magis inclinata.

TAB. IX. Fig. 1. Sint ſeries duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehenſæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut bina quæque ſibi correſpondentia plana utriusque ſeriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero ſeriei F G H K L magis inclinatum ſit ad horizontem quam planum ſibi altitudine reſpondens ſeriei A B C D E. Dico breviori tempore abſolvi deſcenſum per A B C D E, quam per F G H K L.

Nam primo quidem tempus deſcenſus per A B, brevius eſſe conſtat tempore deſcenſus per F G, quum ſit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G*, ſitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam ſurſum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C poſt A B, æquale eſt tempori per eandem B C poſt M B, cum in puncto B eadem celeritas contingat, ſive per A B, ſive per M B deſcendenti *. ſimiliterque tempus per G H poſt F G, æquale erit tempori per eandem G H poſt N G. Eſt autem tempus per B C poſt M B ad tempus per G H poſt N G, ut B C ad G H longitudine, ſive ut C M ad H N, cum hanc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G*, ideoque etiam tempora reliqua. Eſtque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C poſt M B ſive poſt

* Prop. 7. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

A B,

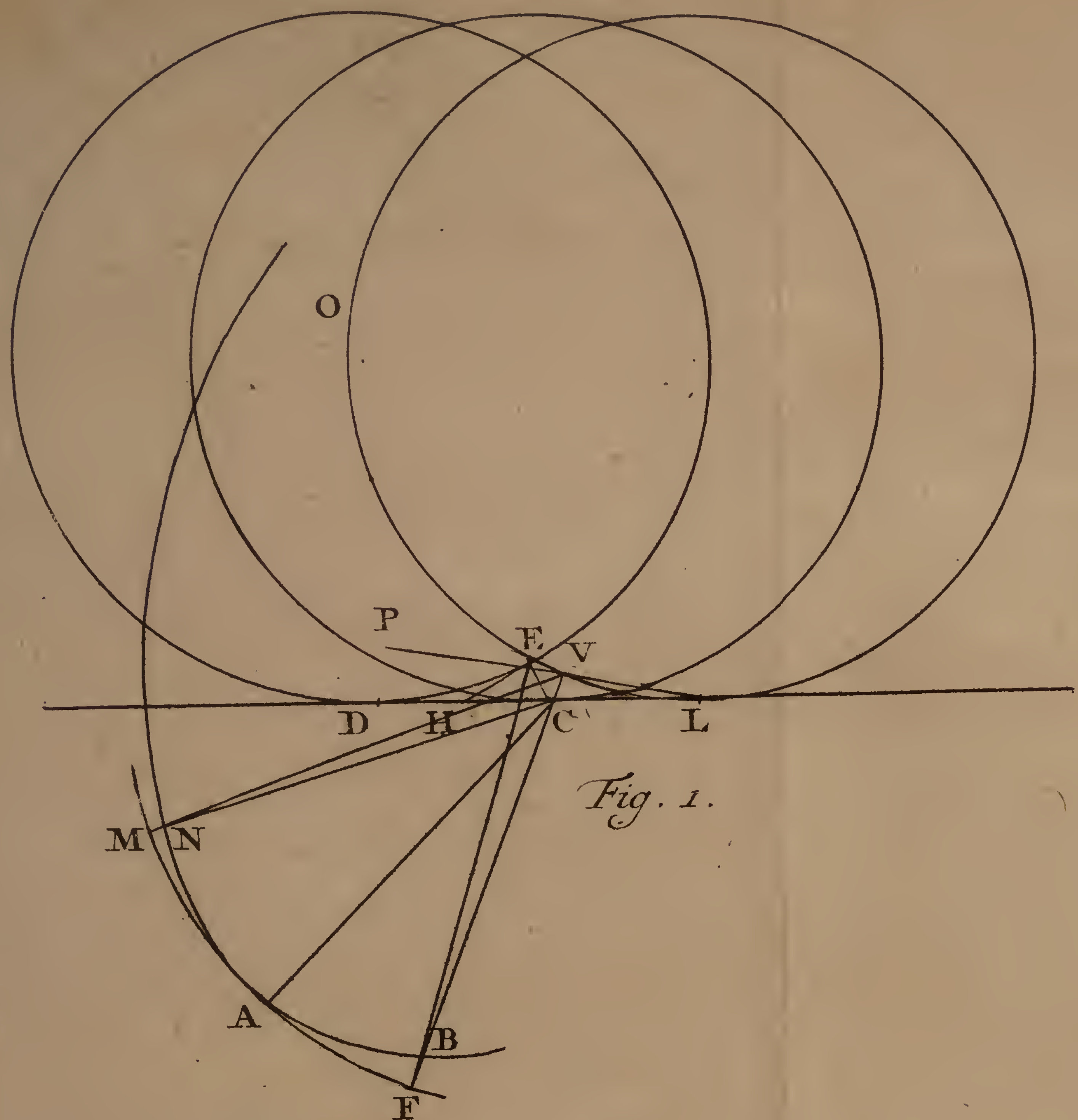


Fig. 1.

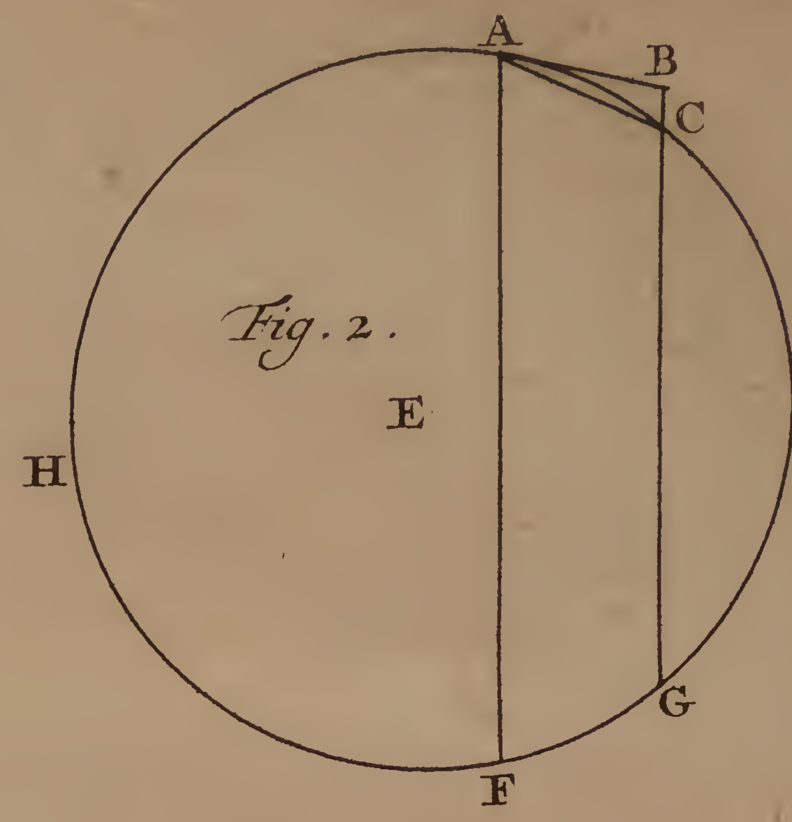


Fig. 2.

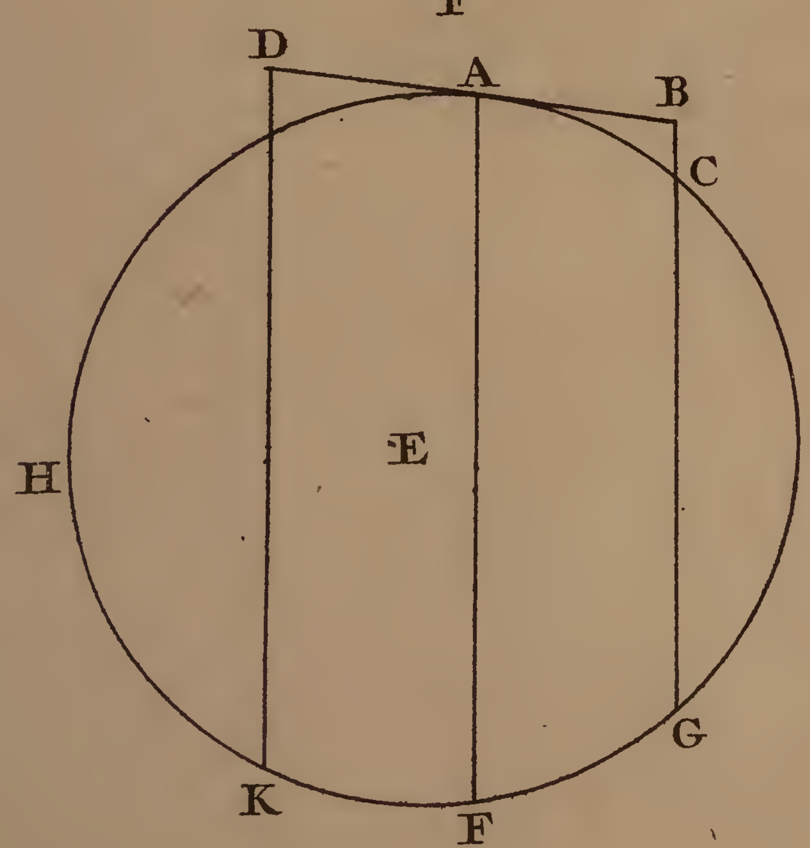


Fig. 3.

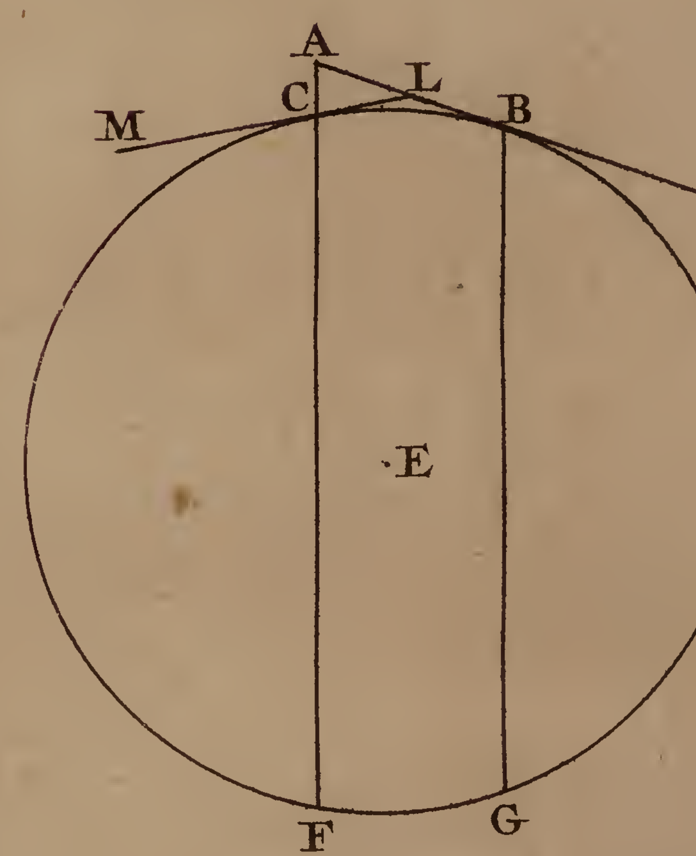


Fig. 4.

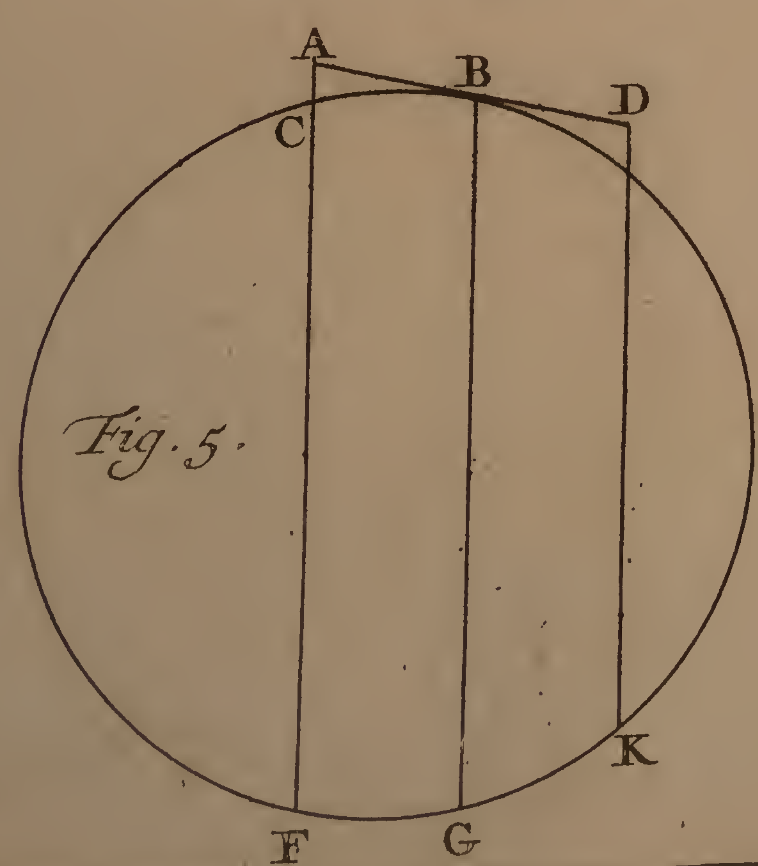


Fig. 5.

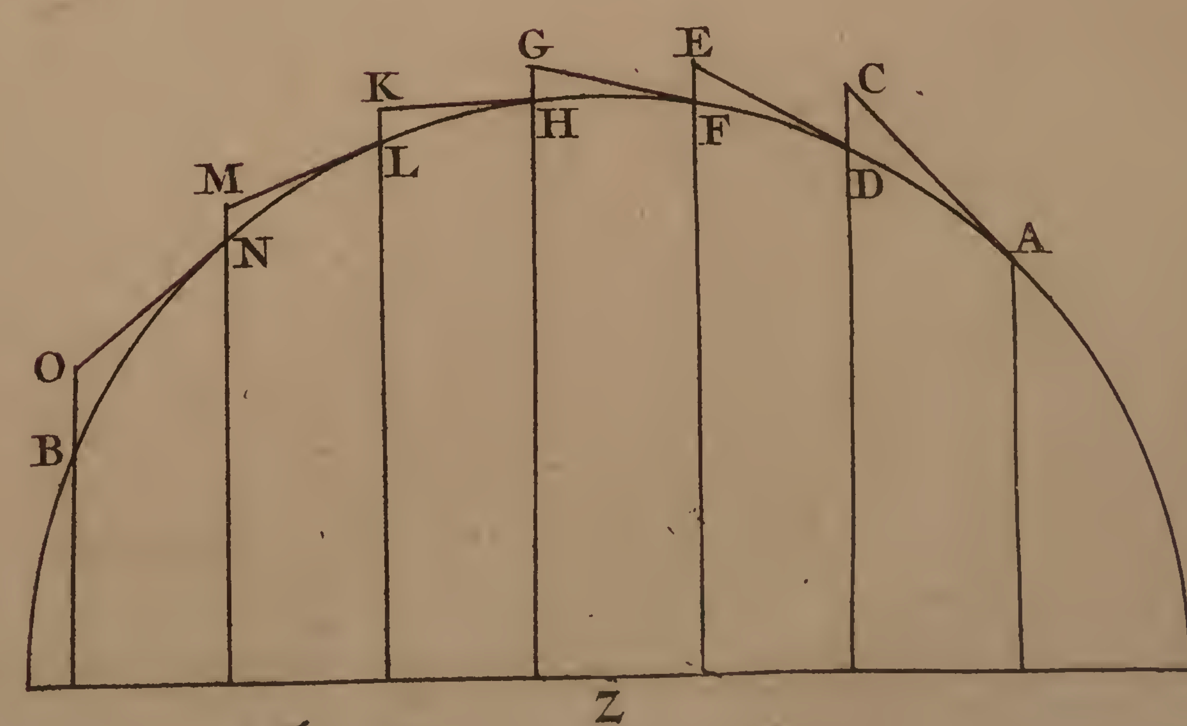


Fig. 6.

A B, brevius eſſe tempore per G H poſt N G ſive poſt F G. Similiter oſtendetur, productis D C, K H ſurſum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D poſt A B C, ſive poſt O C, brevius eſſe tempore per H K poſt F G H ſive poſt P H. Ac denique tempus per D E poſt A B C D, brevius eſſe tempore per K L poſt F G H K. Quare totum tempus deſcenſus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonſtrandum. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Hinc vero manifeſtum eſt, conſiderando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compoſitas, ſi fuerint duæ ſuperficies, ſecundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major ſemper ſit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave deſcenſurum quam per magis inclinatam.

Velut ſi ſint duæ ſuperficies inclinatæ ſecundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major ſit inclinatio ipſius C D quam A B, hoc eſt, ut recta tangens curvam C D in F, magis inclinata ſit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus deſcenſus per A B brevius quam per C D. TAB. IX. Fig. 2.

Idemque continget ſi altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique eſt eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet ſui puncto.

PROPOSITIO XXII.

SI in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus ſtat, vertice deorſum ſpectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, ſed quarum altera propior ſit vertici; erit tempus deſcenſus per ſuperiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorſum ſpectet; & accipiantur in ea por- TAB. IX. Fig. 3.

De motu in Cycloide.

tiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc eſt, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ ſuperiorem portionem B D includunt, æque inter ſe diſtent ac E G, F K, inferiorem partionem E F includentes. Dico tempus deſcenſus per curvam B D brevius fore tempore per E F.

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, & in E F punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe A C ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Eſt autem ipſi N A parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipſi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata eſt quam curva E F in puncto M. Quod ſi igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per B D brevius erit tempore per *e f**, ſive, quod idem eſt, per E F. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 15. huj.

* Prop. præced.

LEMMA.

Tab. IX. Fig. 4.

Esto circulus diametro A C, *quem ſecet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* D E *in* F. *Dico tres haſce*, A B, A D, A F, *proportionales eſſe.*

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui B D recta ſubtenſa ducatur. Quia igitur arcus æquales ſunt A E,

A D,

A D, erunt anguli ad circumferentiam ipſis inſiſtentes, E D A, A B D æquales. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique eſt angulus ad A. Ergo dicti trianguli ſimiles erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Sit jam punctum interſectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D E, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque ſecundum jam demonſtrata erit ut D A ad A *b*, ita A *b* ad A H, hoc eſt, ita A *f* ad A D: Ideoque rurſus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XXIII.

S*It Cycloïs* A B C, *cujus vertex* A *deorſum converſus ſit, axe* A D *ad perpendiculum erecto; ſumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorſum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, terminetur-que recta horizontali* A I. *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & diviſa bifariam* F A *in* X, *ſuper ea deſcribatur ſemicirculus* F H A. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *ſumptum, rectâ* Σ G *parallelâ* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* H, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iiſdem duabus horizontalibus* M S, N T *interceptæ ſint* M N, S T. *Iiſdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, *& axis* D A *pars* Q R. TAB. IX. Fig. 5.

Quibus ita ſe habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quan-*

De motu in Cycloide.

quanta acquiritur deſcendendo per arcum Cycloidis B G, *fore ad tempus quo percurretur recta* O P, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur deſcendendo per totam tangentem* B I, *ſicut eſt tangens* S T *ad partem axis* Q R.

Deſcribatur enim ſuper axe A D ſemicirculus D V A ſecans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V ſecans rectas O Q, P R, G Σ in E K & Λ. Jungantur item H F, H A, H X & A Φ; quæ poſtrema ſecet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipſarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipſæ percurruntur, contrarie ſumpta *, hoc eſt, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I ſive ex F A, ad celeritatem ex B G, ſive ex F Σ *. Atqui tota celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ, eſt in ſubduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ *, ac proinde eadem quæ F A ad F H. Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Itaque tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compoſitam ex rationibus M N ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem oſtendetur quæ F H ad H Σ.

* Prop. 5. Galil. de motu æquab.
* Prop. 8. huj.
* Prop. 3. huj.

Eſt enim tangens Cycloidis B I parallela rectæ V A, ſimiliterque tangens M G N parallela rectæ Φ A; ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem eſt quæ Δ Π ad E K; hoc eſt, Δ A ad E A; hoc eſt, Φ A ad Λ A; hoc eſt V A ad Φ A *. Eſt autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H; nam quia quadratum V A æquale eſt rectangulo D A F, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula ſunt inter ſe ut F A ad Σ A, hoc eſt ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H; atque etiam

* Lemma præced.

etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc eſt, propter triangula ſimilia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideoque eadem erit quæ F X ſive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita eſt tangens S T ad rectam Q R; hoc enim facile perſpicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P conſtat eſſe ſicut S T ad Q R. quod erat demonſtrandum. DE MOTU IN CYCLOIDE.

PROPOSITIO XXIV.

Sit rurſus ut in præcedenti propoſitione Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorſum ſpectet, axis* A D *ad horizontem erectus ſit; & ſumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorſum recta* B Θ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* A Θ *in* Θ: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & ſuper* F A *deſcribatur ſemicirculus* F H A. *Deinde alia recta* G E, *parallela* F B, *ſecet Cycloidem in* E, *rectam* B Θ *in* I, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G. TAB. X. Fig. 1.

Dico tempus deſcenſus per arcum Cycloidis B E, *eſſe ad tempus per tangentem* B I *cum celeritate dimidia ex* B Θ, *ſicut arcus* F H *ad rectam* F G.

Si enim hoc verum non eſt, habebit tempus per arcum B E ad dictum tempus per B I, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, ſi fieri poteſt, majorem.

L Ita-

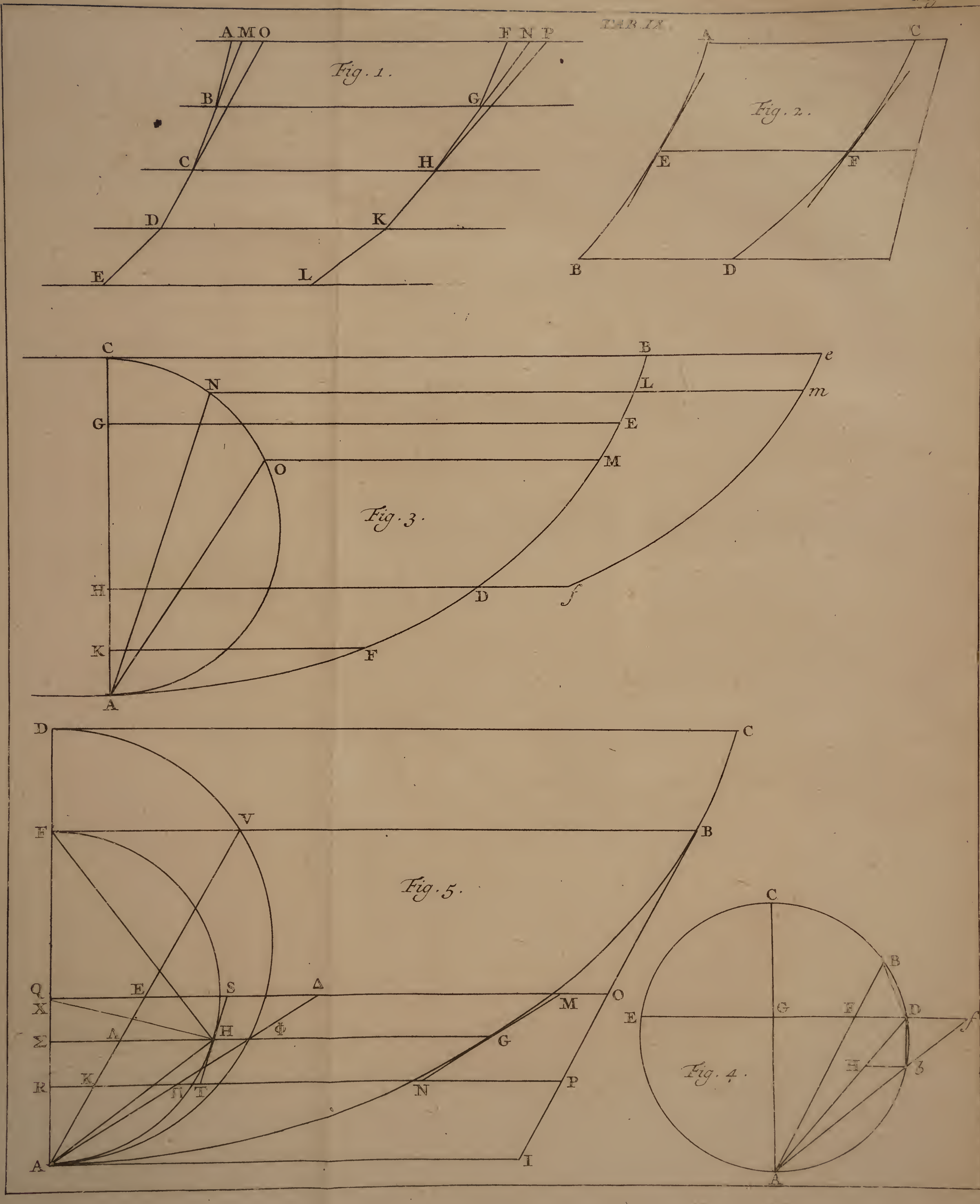
De motu in Cycloide.

Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (ſit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod ſi jam in Cycloide ſupra punctum B ſumatur punctum aliud N, erit tempus per B E poſt N B, brevius tempore per B E. Manifeſtum eſt autem punctum N tam propinquum ſumi poſſe ipſi B, ut differentia eorum temporum ſit quamlibet exigua, ac proinde ut minor ſit ea qua tempus Z ſuperatur à tempore per B E. Sit itaque punctum N ita ſumptum. unde quidem tempus per B E poſt N B majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex B Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G.

Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor ſit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O; hoc enim fieri poſſe manifeſtum eſt; & à punctis diviſionum agantur rectæ, baſi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ P Λ, Q Ξ, &c. Quibusque in punctis hæ ſecant circumferentiam F H, ab iis, itemque à puncto H, tangentes ſurſum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes ſurſum ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æquali iis quæ ex diviſione, ductâque R Φ parallelâ ſimiliter ipſi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor eſt altitudine puncti H ſupra O. Jam vero ſic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus eſt tempore motus continue accelerati per arcum B S poſt N B. Nam celeritas ex B S minor eſt celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquiſita ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor

in-


TAB. IX.
Fig. 1.
A M O
F N P
B
G
C
H
D
K
E
L
Fig. 2.
A
C
E
F
B
D
Fig. 3.
C
B
e
N
L
m
G
E
O
M
H
D
f
K
F
A
Fig. 5.
D
C
F
V
B
Q
E
S
Δ
M
O
X
Σ
Λ
H
Φ
G
R
K
Π
T
N
P
A
I
Fig. 4.
C
B
E
G
F
D
f
H
b
A

inſuper eſt tangente V S, omnibusque partibus ſuis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus ſit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S poſt N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T poſt N S, & tempus per tangentem Π Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y poſt N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per ſingulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipſarum contactus, majora ſimul erunt tempore per arcum B E poſt N B. Eadem vero & minora eſſent, ut nunc oſtendemus.

De motu in Cycloide.

Conſiderentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et eſt quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B Λ cum celeritate dimidia ex F A, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem axis F P*. Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam Λ Ξ cum eadem dimidia celeritate ex F A, ut tangens Γ Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps ſingula tempora per tangentes cycloidis, quæ ſunt eadem ſupradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes ſibi reſpondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ſicut tangentes circumferentiæ F H, iisdem parallelis comprehenſæ, ad partes rectæ F G ipſis reſpondentes.

* Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora ſcilicet quibus percurruntur rectæ B Λ, Λ Ξ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad ſequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque poſteriorum ad ſuam ſequentem; ſunt enim utrobique inter ſe æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli Δ X, Γ Σ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine poſteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus

DE MOTU IN CYCLOIDE.

qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, ſicut ſe habent omnes ſimul priores ad omnes eas ad quas ipſæ referuntur, hoc eſt, ſicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c *. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G; ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G; quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major eſt dictis omnibus arcus F H tangentibus *. Atqui tempus per B E poſt N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, poſuimus eſſe ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora ſimul erunt tempore per B E poſt N B, cum antea majora eſſe oſtenſum ſit; quod eſt abſurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, (ſit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

TAB. X. Fig. 2.

Quod ſi jam ſumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B E, ſed cujus terminus ſuperior N ſit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E *. Manifeſtum autem quod punctum N tam propinquum ſumi poteſt puncto B, ut differentia dictorum temporum ſit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z ſuperat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita ſumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

* Prop. 22. huj.

Dividatur jam F G in partes æquales F P, P Q, &c.

qua-

quarum unaquæque minor ſit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F L; & additâ ad F G unâ earum partium G ζ, ducantur à punctis diviſionum rectæ baſi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c; itemque à puncto ζ recta ζ Ω quæ ſecet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ ſecant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorſum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θ Δ, Γ Σ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζ Ω in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorſum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζ Ω in R.

De motu in Cycloide.

Quia igitur P ζ æqualis eſt F G altitudini arcus B E, cui æqualis eſt ex conſtructione altitudo arcus N M, erit & P ζ æqualis altitudini arcus N M. Eſt autem recta P O ex conſtructione ſuperior termino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, ſuperius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis ſit altitudinis cum arcu N M, ſed termino S ſublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M *. (* Prop. 22. huj.)

Atqui tempus per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S Λ transmiſſa ponitur, æqualis eſt celeritati ex S T *, (* Prop. 8. huj.) quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur; ipſaque S Λ minor eſt quam S T. Similiter tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum T Y poſt S T; quum celeritas ex B T, qua tota T Ξ transmiſſa ponitur, ſit æqualis celeritati ex S Y, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T Y poſt S T; ipſaque T Ξ minor ſit arcu T Y. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per ſingulas quantæ acquiruntur deſcendendo ex B usque ad punctum ipſarum contactus, breviora ſimul erunt tempore deſcenſus accelerati

DE MOTU IN CYCLOIDE.

per arcum S V. Eadem vero & longiora eſſent, ut nunc oſtendemus.

Eſt enim tempus dictum per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ſicut tangens ſemicirculi θ Δ ad rectam P Q *: ſimiliterque tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, eſt ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps ſingula tempora per tangentes cycloidis, quæ ſunt eadem ſupra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes ſibi reſpondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ η, iisdem parallelis incluſæ, ad partes rectæ P ζ ipſis reſpondentes. Unde, ut in priori parte demonſtrationis, concludetur omnes ſimul rectas P Q, Q Π &c. hoc eſt, totam P ζ eſſe ad omnes ſimul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. ſicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis S Λ, T Ξ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, ſive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus θ η ad rectam P ζ vel F G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam F G; eſt enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ η *. Sed tempus per N M poſuimus ab initio ad idem tempus per B I ſe habere ut arcus L H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod eſt abſurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus oſtenſum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere oſtenſum fuit. Ergo eandem habeat neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.

* Prop. præced.

* Prop. 20. huj.

P R O-

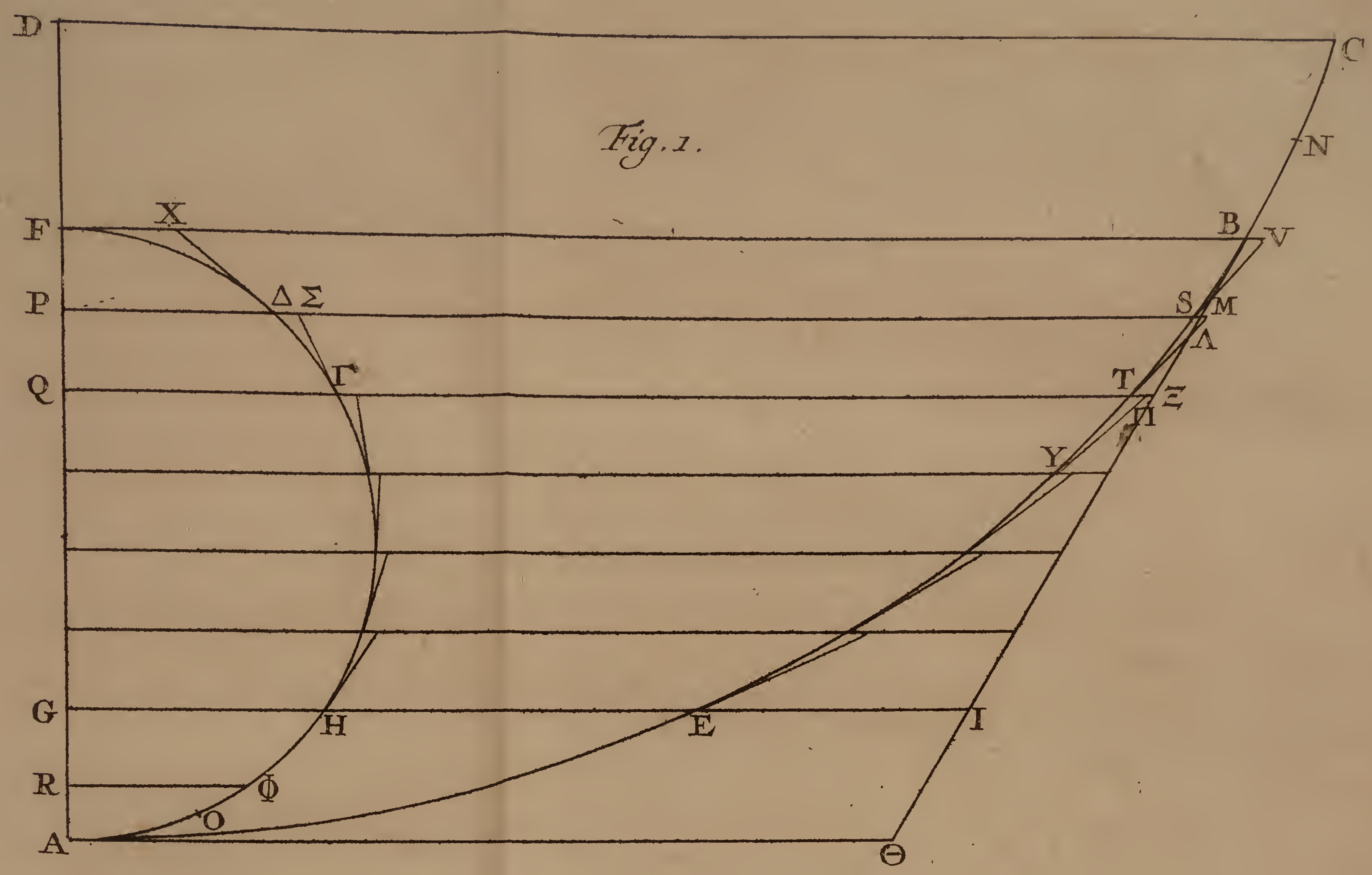

D
C
N
F
X
B
V
P
Δ Σ
S
M
Λ
Q
Γ
T
Ξ
Π
Y
G
H
E
I
R
Φ
O
A
Θ

Fig. 1.

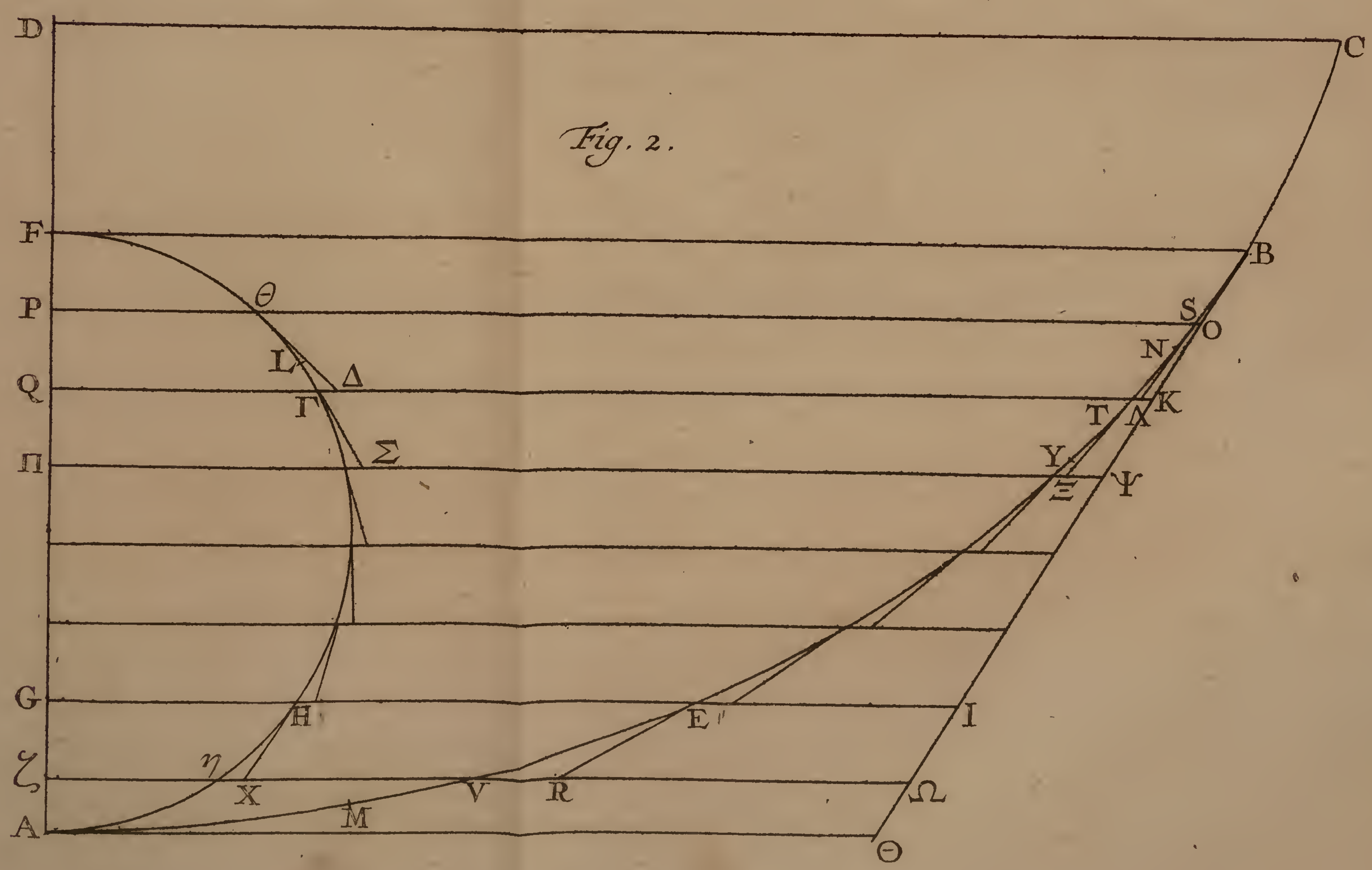

D
C
F
B
P
θ
S
O
N
L
Δ
Q
Γ
T
Λ
K
Π
Σ
Y
Ξ
Ψ
G
H
E
I
ζ
η
X
V
R
Ω
A
M
Θ

Fig. 2.

PROPOSITIO XXV.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

Eſto cyclois A B C cujus vertex A deorſum ſpectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus ſit, & à puncto quovis in cycloide ſumpto, velut B; deſcendat mobile impetu naturali per arcum B A, ſive per ſuperficiem ita inflexam. Dico tempus deſcenſus hujus eſſe ad tempus caſus per axem D A, ſicut ſemicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonſtrato, etiam tempora deſcenſus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter ſe æqualia eſſe conſtabit. TAB. XI. Fig. 1.

Deſcribatur ſuper axe D A ſemicirculus, cujus circumferentiam ſecet recta B F, baſi D C parallela, in E; junctâque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: ſitque etiam ſuper F A deſcriptus ſemicirculus F H A.

Eſt igitur, per præcedentem, tempus deſcenſus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, ſicut arcus ſemicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori deſcenſus naturaliter accelerati per eandem B G, ſive per E A, quæ ipſi parallela eſt & æqualis, hoc eſt, tempori deſcenſus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus deſcenſus per axem D A, ut ſemicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

Quod

De motu in Cycloide.

Quod ſi tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, conſtat mobile, poſtquam per arcum B A deſcenderit, inde continuato motu per alterum ipſi æqualem arcum aſcenſurum*, atque in eo tantundem temporis atque deſcendendo conſumpturum*. Deinde rurſus per A ad B perventurum, ac ſingularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parviſve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus caſus perpendicularis per axem D A, ſicut circumferentia circuli tota ad diametrum ſuam.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XXVI.

TAB. XI. Fig. 1.

Iisdem poſitis, ſi ducatur inſuper recta horizontalis H I quæ arcum B A ſecet in I, circumferentiam vero F H A in H: dico tempus per arcum B I, ad tempus per arcum I A poſt B I, eam rationem habere quam arcus circumferentiæ F H ad H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Eſt itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G cum celeritate dimidia ex B G, ſicut arcus F H A ad rectam F A*. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, eſt ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, ſicut B G ad B K longitudine, hoc eſt, ſicut F A ad F L. Et rurſus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, ſicut F L ad arcum F H*. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A poſt B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 24. huj.

* Prop. 24. huj.

H O-

De lineARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimenſione.

DEFINITIONES.

I.

LINEA *in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quaſdam rectas lineas habuerit, hæ ipſæ productæ pro tangentibus habentur.*

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obverſa ſit ad cavitatem alterius, quales ſunt in figura adſcripta curvæ A B C, A D E, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.* TAB. XI. Fig. 2.

III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum ſeu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ ſoluta eſt ſemper extenſa maneat; manifeſtum eſt curvam quandam aliam hac fili extremitate deſcribi. Vocetur autem ea, Deſcripta ex evolutione.

De linearum curvarum evolutione.

IV.

TAB. XI. Fig. 2.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura ſuperiori, A B C *eſt evoluta,* A D E *deſcripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extenſa ſit* D B *recta, reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifeſtum eſt autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

R*Ecta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione deſcriptæ ad angulos rectos.*

TAB. XI. Fig. 3.

Sit A B evoluta, A H vero quæ ex evolutione illius deſcripta eſt. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc eſt, ſi ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipſam referre poſitionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod ſi igitur oſtenderimus filum, in tota reliqua deſcriptione curvæ A C H, nuſquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, manifeſtum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod ſit H, ſitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera eſſe H G, cum extremitate ſua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum deſcribitur pars curvæ C H, evolutus ſit arcus D G, occurret C D à parte D producta ipſi H G, ut in F. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ ſimul D F, F G, majores ſunt quam D G, ſive curva ea fuerit ſive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C F, F G ſimul majores ſint recta

C D

C D & ipſa D G. Sed propter evolutionem, apparet utriſque ſimul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ ſimul C F, F G majores quoque erunt recta H G; & ablata communi F G, erit C F major quam H F. Sed F E major eſt quam F C, quia angulus C trianguli F C E eſt rectus. Ergo F E omnino major quam F H. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam C E. De linearum curvarum evolutione.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C, ſitque fili poſitio H G, tunc cum ejus extremitas eſſet in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E: apparet autem D G rectam non poſſe eſſe in directum ipſi H G, adeoque H G D fore triangulum. Jam quia recta D G vel minor eſt quam D K G, vel eadem, ſi nempe evolutæ pars D G recta ſit; additâ utrique G H, erunt rectæ D G, G H ſimul minores vel æquales duabus iſtis, ſcilicet D K G & G H, ſive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor eſt recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major eſt quam D C, quia in triangulo D C E angulus C eſt rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm eſt ergo punctum H, hoc eſt extremitas fili G H, intra angulum D C E. Unde apparet neque inter A & C uſquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C; ac proinde D C, cui C E ducta eſt perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonſtrandum. TAB. XII. Fig. 1.

Hinc etiam manifeſtum eſt curvam A H C in partem unam inflexam eſſe, & in eandem partem cavam ac ipſa A G B, cujus evolutione deſcripta eſt. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra ſpatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum ſpatium. unde liquet cavitatem A H C reſpicere convexitatem A G D.

De linearum curvarum evolutione. Tab. XII. Fig. 2.

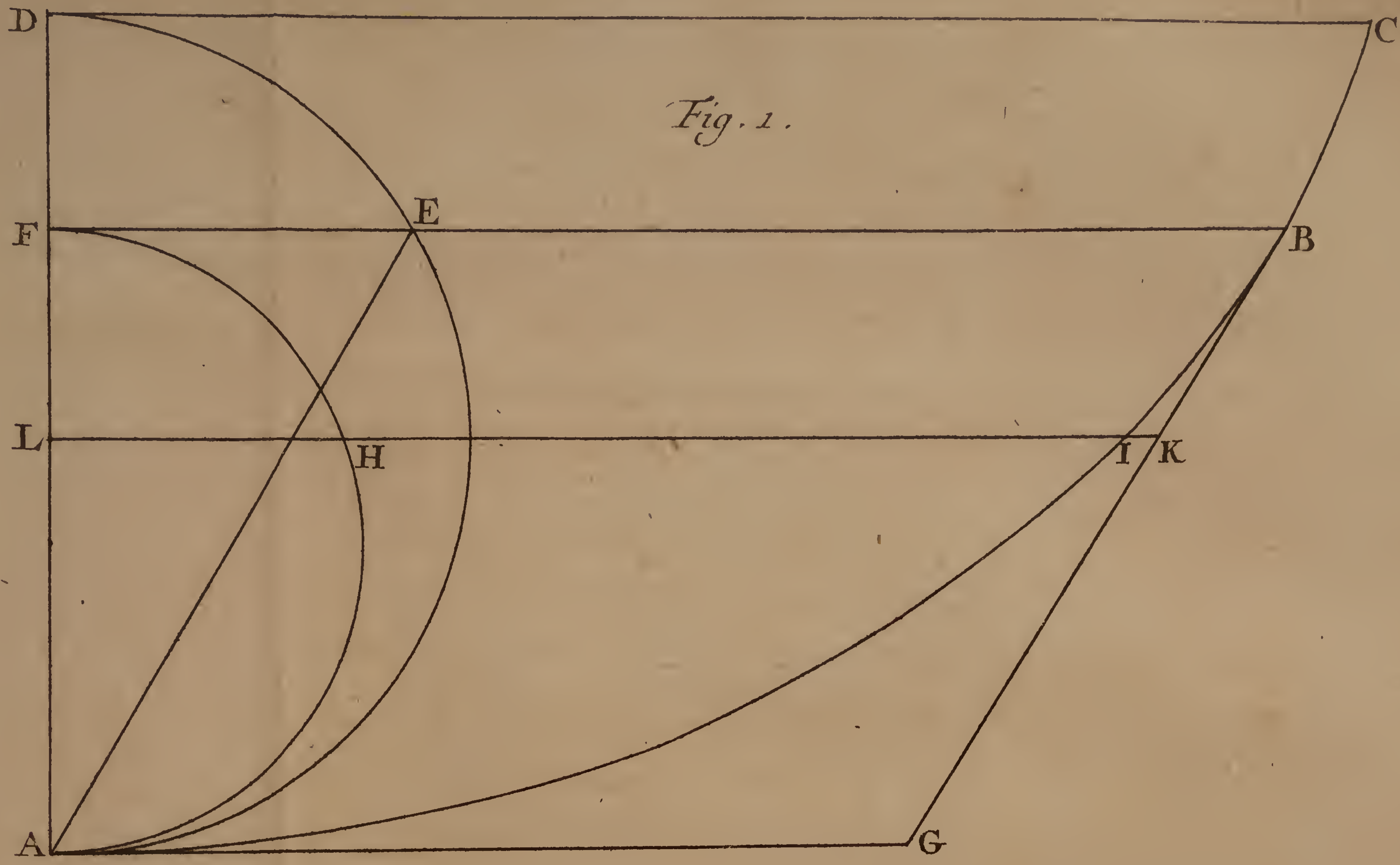
PROPOSITIO II.

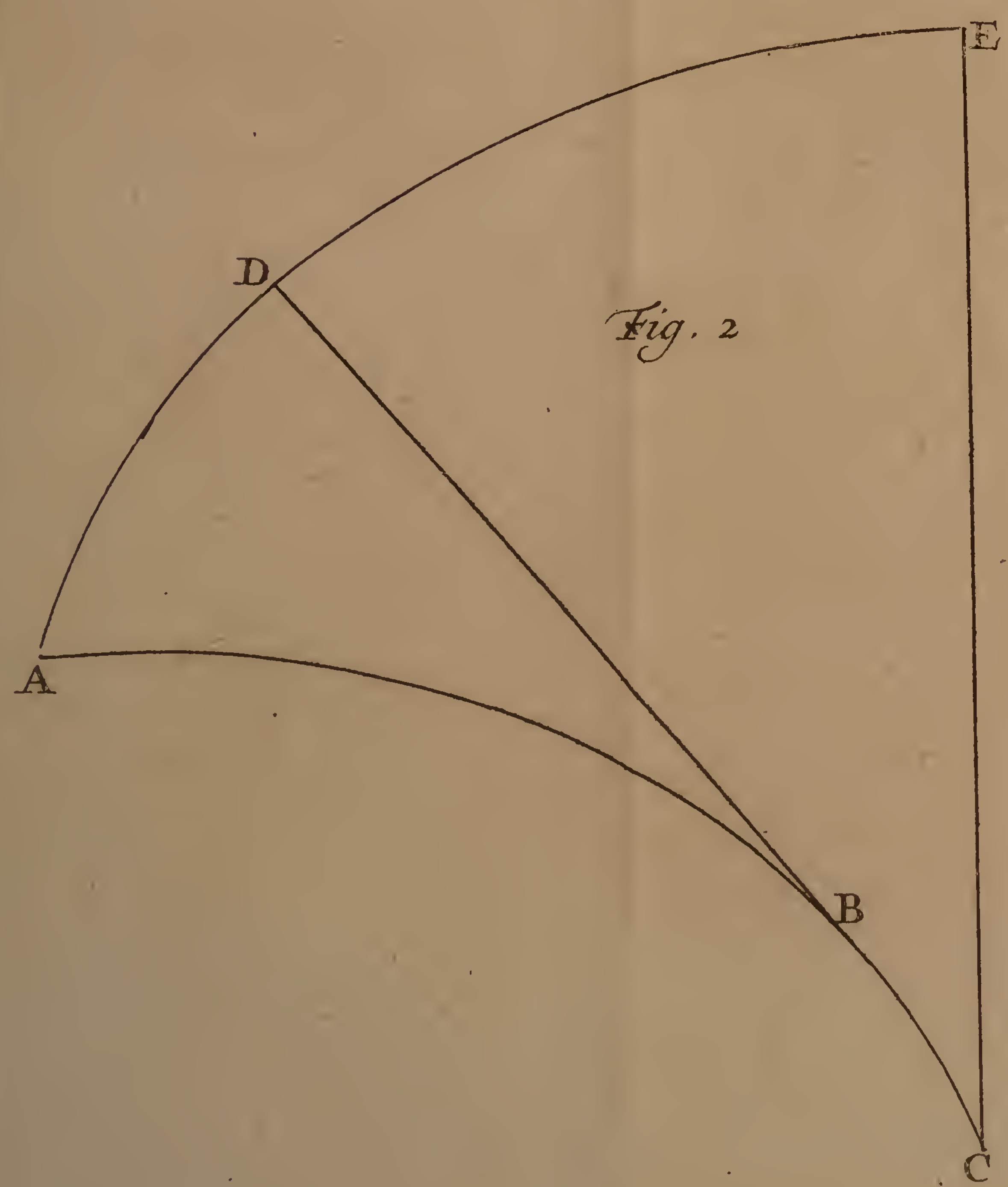
Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *ut poteſt in tot partes dividi, ut ſi ſingulis partibus ſubtenſæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D; *& à ſingulis item diviſionis punctis, ipſaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis, quæ in proxime ſequentibus diviſionis punctis curvæ ad angulos rectos inſiſtunt, quales ſunt lineæ* B N, C O, D P; *ut inquam ſubtenſa quæque habeat ad ſibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione propoſita.*

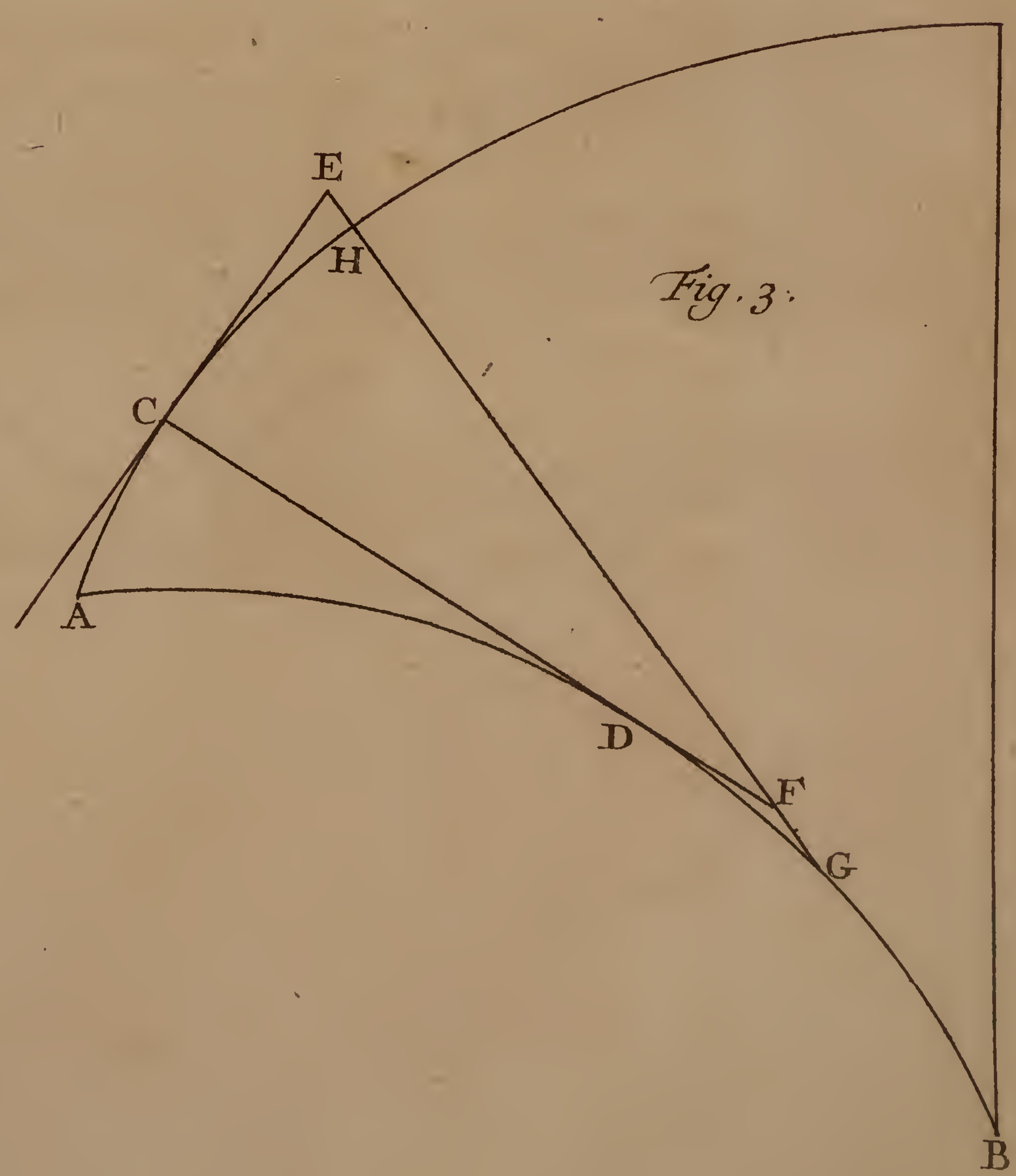
Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas ſecta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter ſe proxima puncta curvam contingunt, occurrant ſibi mutuo ſecundum angulos qui ſinguli majores ſint angulo F E H; quales ſunt anguli A K B, B L C, C M D. quod quidem fieri poſſe evidentius eſt quam ut demonſtratione indigeat. Ductis jam ſubtenſis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes ſingulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores eſſe ratione E F ad F G.

Quia enim angulus A K B major eſt angulo H E F, erit reſiduus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. Angulus autem B trianguli K B N eſt rectus, ſicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo ma-


D
C
Fig. 1.
F
E
B
L
H
I
K
A
G


E
D
Fig. 2
A
B
C


E
H
Fig. 3.
C
A
D
F
G
B

major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major eſt quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B eſt obtuſus, eſt enim major angulo H E F qui eſt obtuſus ex conſtructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major oſtendetur ratione E F ad F G. Itaque conſtat propoſitum. De linearum curvarum evolutione.

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in eaſdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad ſe invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, ſimiliter occurrat & reliquæ.

Sint enim, ſi fieri poteſt, hujuſmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & ſumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, ſit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E. TAB. XIII. Fig. 3.

Poteſt jam recta quædam ſumi major curva K G A, quæ ſit Q. Diviſa autem intelligatur ipſa K G A, ut in propoſitione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut ſubtenſæ ſingulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ ſibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes ſimul dictæ ſubtenſæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypotheſi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipſi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque neceſſario rectæ M D inter D & M. Unde

 cum

De linearum curvarum evolutione.

cum K E ſit breviſſima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor oſtendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum ſit ergo P A major quam F B, erunt duæ ſimul P A, O F majores quam O B. Item quum O B ſit major quam G C, erunt duæ ſimul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres ſimul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rurſus, quia N C major quam H D, erunt duæ ſimul N C, M H majores quam M D. Unde, ſi loco N C ſumantur tres hæ ipſa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipſa M D major erat quam K E. Diximus autem ſubtenſas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam ſit K E, habebunt dictæ ſubtenſæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo ſubtenſæ ſimul ſumptæ majores erunt rectâ Q. Hæc autem ipſa curvâ A G K major ſumpta fuit. Ergo ſubtenſæ A F, F G, G H, H K ſimul majores erunt curva A G K cujus partibus ſubtenduntur; quod eſt abſurdum, cum ſingulæ ſuis arcubus ſint minores. Non igitur poterunt eſſe duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit ſeſe habeant. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; poſterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, deſcribetur.

Sun-

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum utraque in eaſdem partes cava exiſtat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C, velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipſius A B C, à termino A incepta, deſcribi A D E.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

TAB. XII. Fig. 4.

Si enim fieri poteſt, deſcribatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipſi A F G ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D E, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipſa A B C; nam de linea A D E conſtat ex hypotheſi, de A F G vero ex propoſitione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri ſimiliter occurrunt. quod quidem fieri non poſſe antea oſtenſum eſt *. Quare conſtat ipſam A D E deſcriptum iri evolutione lineæ A B C. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, ſuper qua, tanquam baſi, alia cyclois priori ſimilis & æqualis conſtituatur, initium ſumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret ſuperioris portioni, ſibi ſuperpoſitæ, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, ſuper qua, tanquam baſi, ſimilis alia cyclois conſtituta ſit A E F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A E F ad angulos rectos.

TAB. XVI. Fig. 1.

Deſcribatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

culus genitor A H D, cui occurrat B H, baſi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, conſtat eam parallelam eſſe rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum eſt, ac proinde A K æqualis H B, hoc eſt, arcui A H *. Sit porro jam deſcriptus circulus K M, genitori circulo, hoc eſt ipſi A H D, æqualis, qui tangat baſin A G in K, rectam vero B K productam ſecet in puncto E. Quia ergo ipſi A H parallela eſt B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifeſtum eſt B K productam abſcindere à circulo K M arcum æqualem ei quem à circulo A H D abſcindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis eſt arcui A H, hoc eſt rectæ H B, hoc eſt rectæ K A. Hinc vero ſequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum deſcribens fuiſſe in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi in E ad angulos rectos *. Eſt autem K E ipſa B K producta. Ergo patet productam B K occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonſtrandum.

* Propoſ. 15. partis 2.

* Propoſ. 14. partis 2.

* Propoſ. 15. partis 2.

PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia ſemicyclois deſcribitur evolutæ æqualis & ſimilis, cujus baſis eſt in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

TAB. XVI. Fig. 1.

Sit ſemicyclois A B C, cui ſuperimpoſita ſit alia ſimilis A E F, quemadmodum in propoſitione præcedenti. Dico, ſi linea flexilis, circa ſemicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam deſcribere extremitate ſua ipſam ſemicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur ſemicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes ſemicycloidis A B C occurrant ſemicycloidi A E F ad angulos rectos, ſequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, deſcribi *. quod erat demonſtrandum.

* Propoſ. 4. huj.

Et

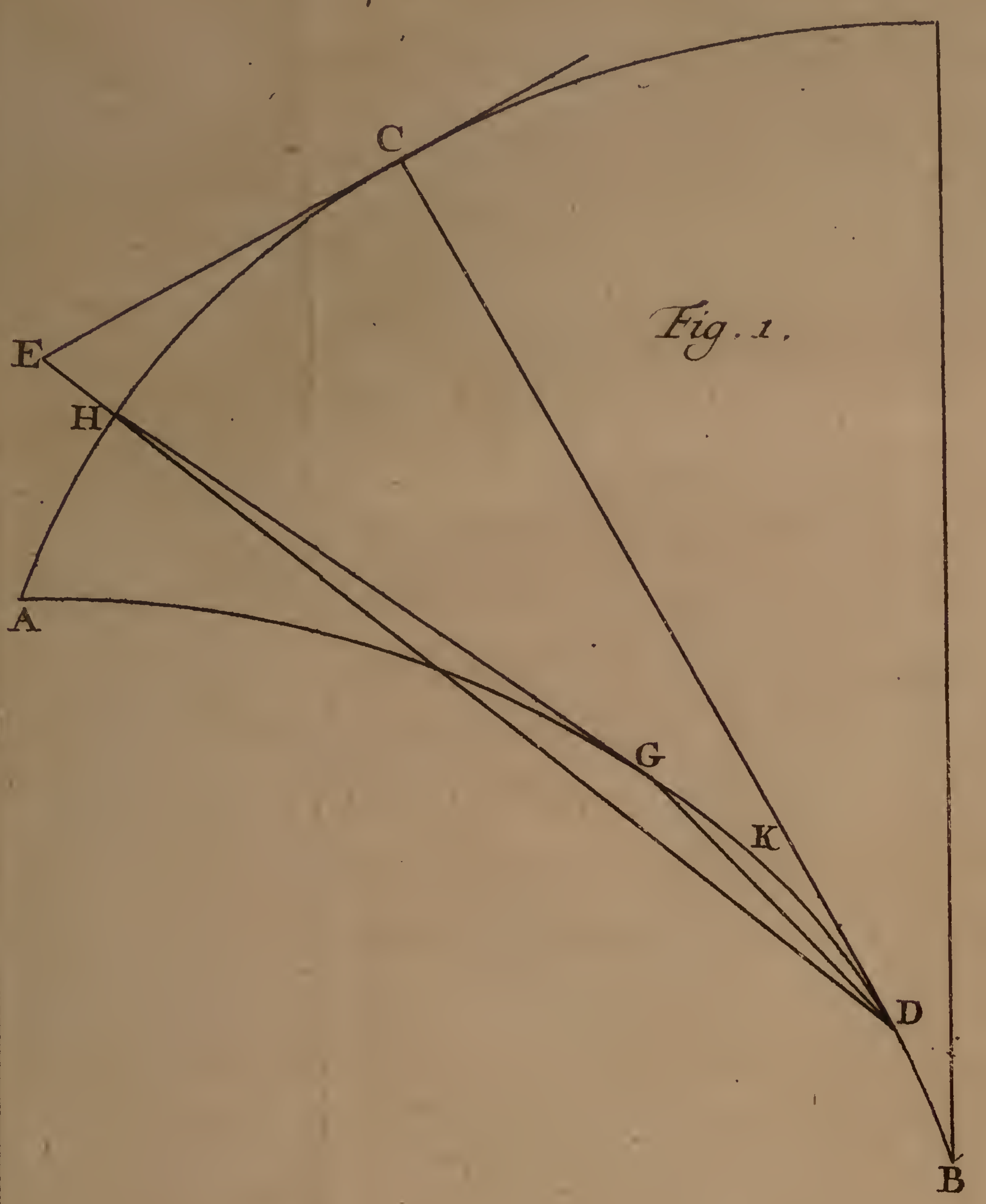


Fig. 1.

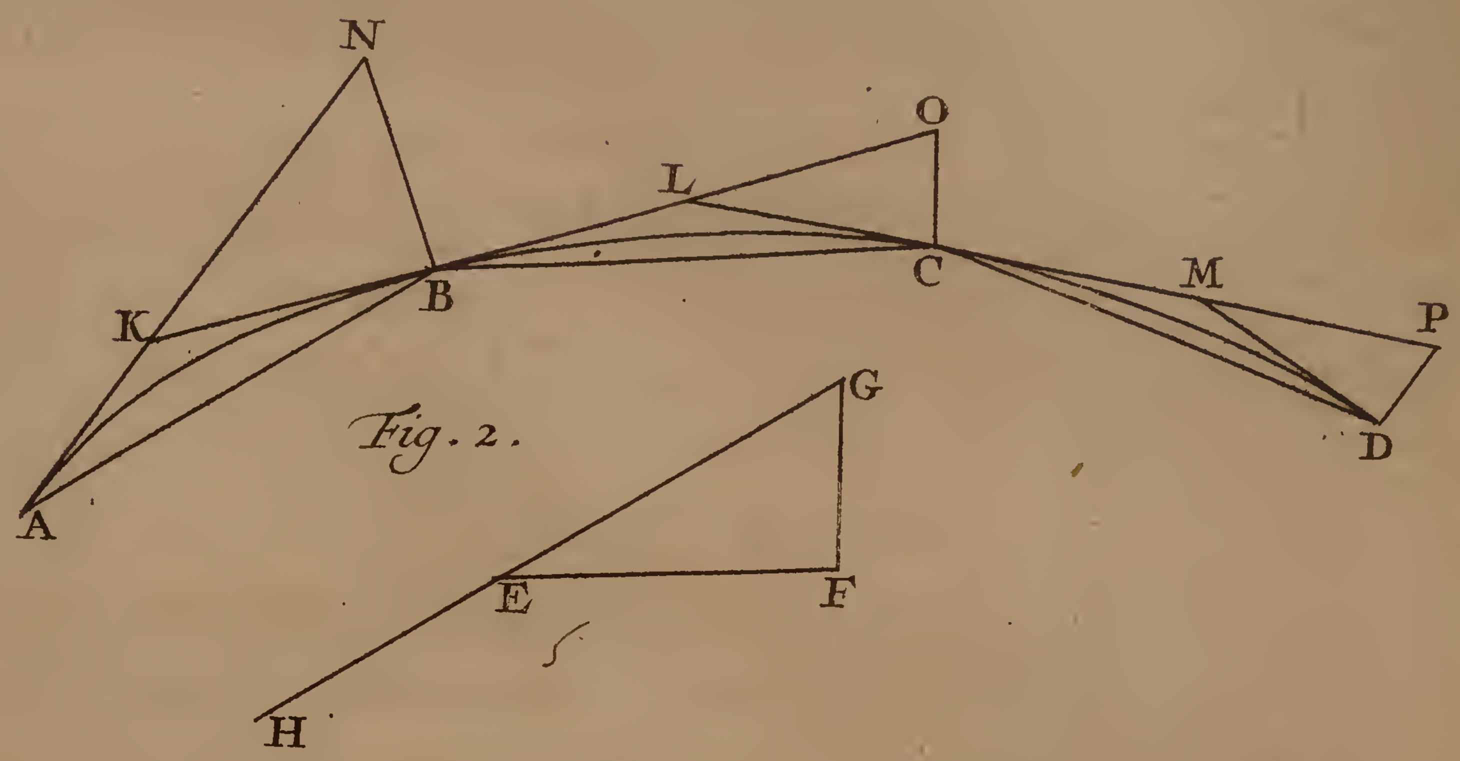


Fig. 2.

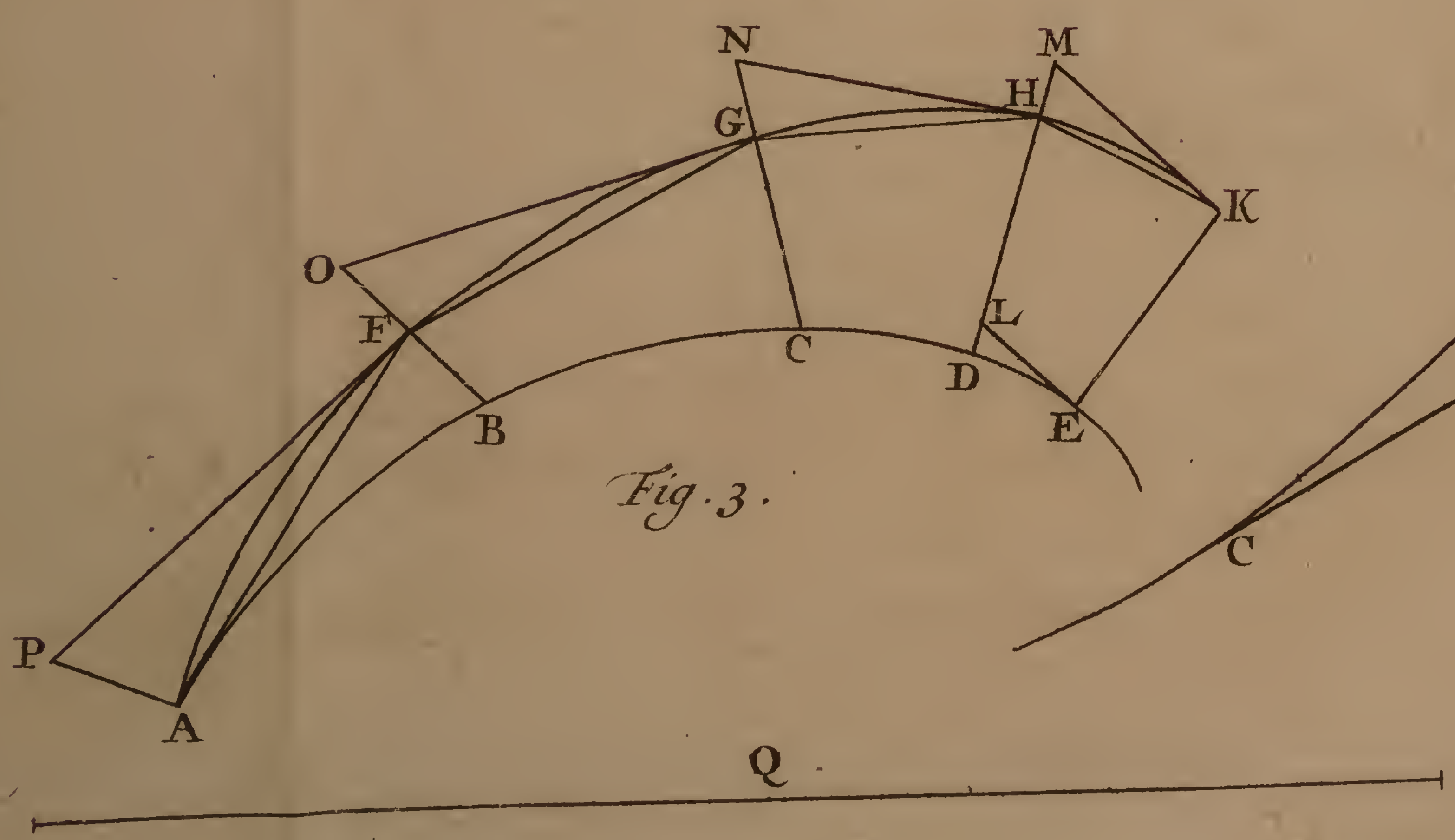


Fig. 3.

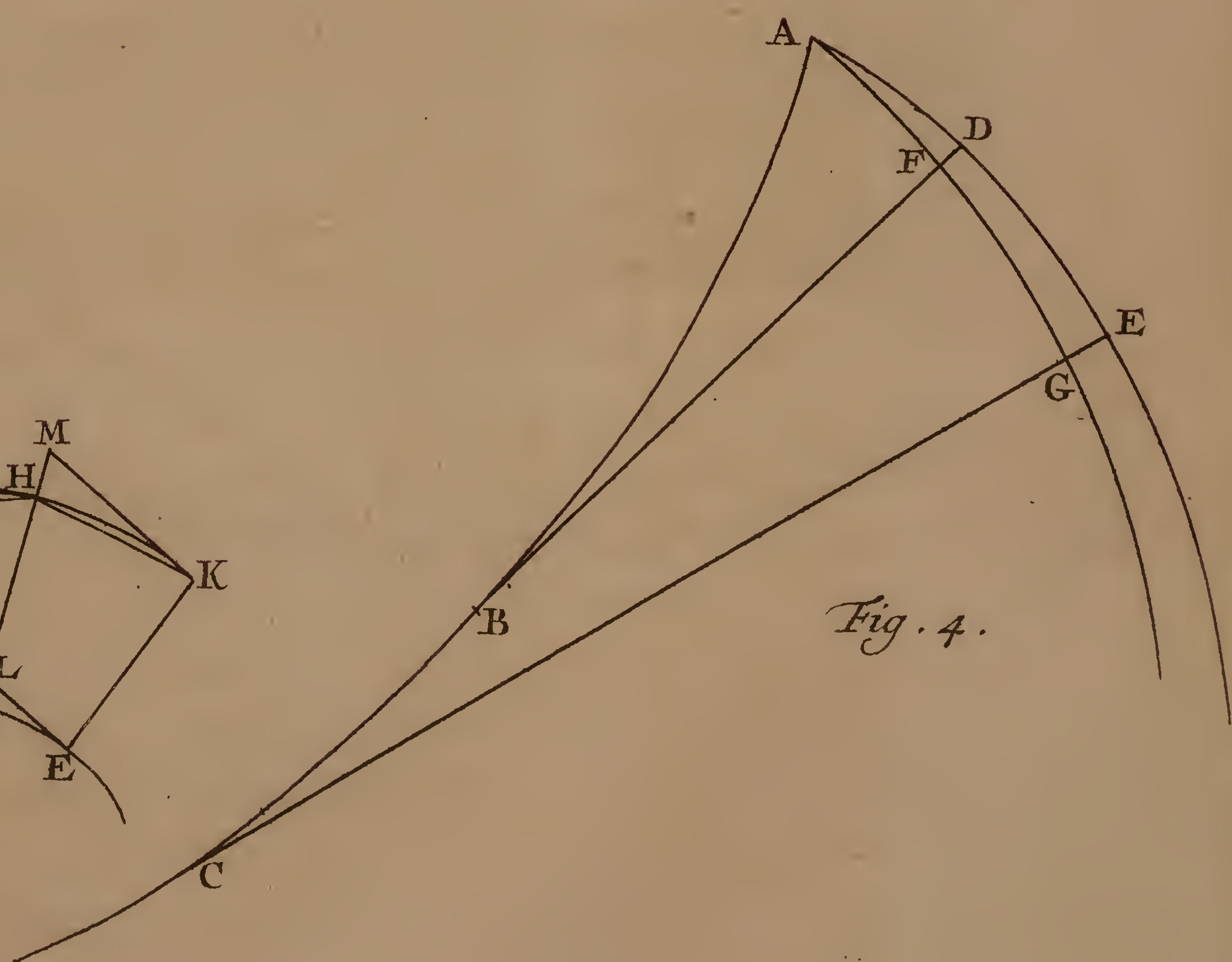


Fig. 4.

Et apparet, ſi dimidiam cycloidem, ipſi A B C gemellam, contrario ſitu ab altera parte lineæ C G diſponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extenſum in C F, circa eam replicatur, alteram ſemicycloidem F N fili extremitate deſcriptum iri, quæ ſimul cum priore A E F integram conſtituat. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Atque ex his, & propoſitione 25 de deſcenſu gravium, manifeſtum jam eſt quod ſupra in Conſtructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, ſecundum ſemicycloidem inflexas, ſuſpenſum agitatumque, motu ſuo cycloidis arcum deſcribere, ac proinde æqualibus temporibus quaſlibet ejus reciprocationes abſolvi. Non refert enim utrum in ſuperficie, ſecundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipſam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea ſui axis; ſive diametri circuli genitoris, quadrupla eſt.

Repetita enim figura præcedenti: cum poſt totam ſemicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla eſt A D, proptarea quod axes cycloidum A B C, A E F ſunt æquales; apparet ſemicycloidem ipſam A B C, filo ſibi circum applicito æqualem, duplam eſſe ſui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis ſui quadruplam. TAB. XVI. Fig. 1.

Apparet etiam tangentem B E, quæ refert partem fili extenſam, antea curvæ parti B A applicatam, huic ipſi longitudine æquari. Eſt autem B E dupla ipſius B K, ſive A H, quoniam in propoſitione quinta oſtenſum eſt K E ipſi A H æqualem eſſe. Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, ſive B K, dupla erit: exiſtente nimirum B H parallela baſi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B ſumptum fuerit.

De linearum curvarum evolutione.

Hanc cycloidis dimenſionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Chriſtophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonſtratione confirmavit, quæ edita eſt in libro de cycloide viri clariſſimi Ioannis Walliſij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa noſtri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occaſionem præbuere problemata quædam à Blaſio Paſchalio Gallo propoſita, qui in his ſtudiis præcellebat. Is cum ſua, tum aliorum inventa recenſens, primum omnium Merſennum lineam hanc in rerum natura advertiſſe ait. Primum Robervallium tangentes ejus definiviſſe, ac plana & ſolida dimenſum eſſe. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus inveniſſe. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dediſſe. Me quoque primum reperiſſe dimenſionem abſolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, baſi parallelâ, abſcinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abeſt. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem deſcripto. Seipſum denique ſolidorum ac ſemiſolidorum, tam circa baſin quàm circa axem, centra gravitatis definiviſſe, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipſius (Sed hæc poſt acceptam à Wrennio dimenſionem) centrum gravitatis inveniſſe, & dimenſionem ſuperficierum convexarum, quibus ſolida iſta eorumque partes comprehenduntur; earumque ſuperficierum centra gravitatis. Ac denique dimenſionem curvarum cujuſvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc eſt earum quæ deſcribuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris ſumpto. Et horum quidem demonſtrationes à Paſchalio ſunt editæ. A quibus ſuas quoque, de eadem linea, ſubtiliſſimas meditationes expoſuit Cl. Walliſius, atque eadem illa omnia ſuo Marte ſe reperiſſe, ac problemata à Paſchalio propoſita ſolviſſe contendit. Quod idem & doctiſſimus Lovera ſibi vindicat. Quantum vero unicuique debeatur, ex ſcriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod ſilentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum eſt, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut

peni-

penitiùs quam cycloïs cognita ſit. Methodum vero noſtram, qua in hac metienda uſi ſumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere.

Sit paraboloides A B, cujus axis A D; vertex A; proprietas autem iſta, ut ordinatim ad axem applicatâ B D, cubus abſciſſæ ad verticem D A æquetur ſolido, baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipſius M. Jam ſi filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico deſcriptam ex evolutione eſſe parabolam E F, cujus axis E A G, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A.

TAB. XIII. Fig. 1.

Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipſo tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F; & ſit ipſi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget; & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Eſt igitur K G æqualis dimidio lateri recto, hoc eſt, ipſi E A; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque A K, erit E K æqualis A G. Eſt autem A G triens ipſius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonſtrari poteſt. Ergo & E K æqualis eſt trienti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla eſt K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis eſt $\frac{8}{27}$ cubi ex A D, hoc eſt, ſolido baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc eſt, ipſi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc eſt ad K G. Erat autem K H æqualis $\frac{2}{3}$ A D, hoc eſt ipſi G D. Ergo

 ut

De linearum curvarum evolutione.

ut quadratum B D ad quadratum D G ita eſt H K ad K G. Ut autem H K ad K G, ita eſt quadratum F K ad quadratum K G. Ergo ſicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde ſicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Unde ſequitur B G F eſſe lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad angulos rectos. Idque ſimiliter de quavis illius tangente demonſtrabitur. Ergo conſtat ex evolutione lineæ E A B, à termino E incepta, deſcribi parabolam E F *. quod erat demonſtrandum.

* Propoſ. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut cubi abſciſſarum ad verticem.

TAB. XIII. Fig. 2.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifeſtum eſt. Parabola vero E F ad conſtructionem non requiritur, quæ ſic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem ſi A G fuerit tertia pars A D, inter verticem & ordinatim applicatam B D interceptæ. Porro ſumpta A E æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum eſt paraboloidis A B, ducatur E F parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela eſt B D, in F. Jam ſi ad rectam B G addatur N F, exceſſus rectæ E F ſupra E A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonſtratio ex ante dictis facile perſpicitur.

Semper ergo curva A B tantum ſuperat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rurſus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimenſi ſunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemenſis rectæ æqualem oſtendit, cujus demonſtratio poſt commentarios Joh. Schotenii in Carteſii Geo-

Geometriam, eodem anno editam, adjecta eſt. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geometricè definiuntur, ad hanc menſuram reduxit, cum ſub idem tempus Cycloidis longitudinem dediſſet Wrennius, non minus ingenioſo epicheremate.

De linearum curvarum evolutione.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctiſſimum Walliſium Wilhelmo Nelio, nobili apud ſuos juveni, idem attribuere voluiſſe, in libro de Ciſſoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuiſſe, neque tamen plane id adſecutum eſſe. Nam neque ex demonſtratione ejus, quam Walliſius affert, apparet illum ſatis perſpexiſſe quænam foret curva illa, cujus, ſi conſtrueretur, menſuram datam fore videbat. Et credibile eſt, ſi ſciviſſet ex earum numero eſſe quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipſum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuiſſe, quod, ſi quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejuſdem inventi, tanquam à ſe profecti, etiam Fermatius, Tholoſanus ſenator ac Geometra peritiſſimus, demonſtrationes conſcripſit, quæ anno 1660 excuſæ ſunt; ſed illæ ſero utique.

Cum vero in his ſimus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: ſiquidem & Heuratio ut eo perveniret occaſionem præbuimus, & dimenſionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars eſt, ante ipſum atque omnium primi reperimus. Etenim ſub finem anni 1657 in hæc duo ſimul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimenſionem, & ſuperficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliiſque item amicorum, per literas indicaſſemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis ſeſe obtuliſſe, eorumque alterum eſſe conoidicæ ſuperficiei extenſionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutiſſimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis iſtius ſuperficiei affinem eſſe dimenſionem ipſius cur-

De linearum curvarum evolutione.

væ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde inveſtigans, in alias iſtas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales abſolute inveniuntur.

Ac de Conoidis quidem ſuperficie in planum redacta, ne quis forte teſtimonium deſideret, pauca hæc adſcribere viſum eſt ex literis viri clariſſimi, atque inter præcipuos hodie Geometras cenſendi, Franc. Sluſii, quibus eo ipſo anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus eſt. In quibus literis 24. Decemb. anni 1657. datis, iſta habentur. *Duo tantum addo, unum* &c. *Alterum eſt, me has omnes curvas, ipſumque adeo locum linearem integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo ſuperficiei in conoide parabolico rationem ad circulum ſuæ baſeos demonſtraſti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, ſi ita juſſeris, data occaſione communicabo.*

Anno autem inſequenti etiam ſuperficies conoidum hyperbolicorum & ſphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci poſſent, conſtructionesque eorum problematum, non addita tamen demonſtratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paſchalio aliisque, in Anglia Walliſio impertii, qui non multo poſt ſua quoque ſuper his, una cum aliis multis ſubtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut noſtris demonſtrationibus perficiendis ſuperſederem. Quoniam vero non inelegantes viſæ ſunt conſtructiones noſtræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adſcribere.

Conoidis parabolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire.

Tab. XIII. Fig. 3.

Sit datum conoides cujus ſectio per axem parabola A B C; axis ejus B D, vertex B, diameter baſis A C, quæ ſit axi B D ad angulos rectos. Et oporteat ſuperficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

Pro-

Producto axe à parte verticis, ſumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro ſecetur A D in G, ut ſit A G ad G D ſicut E A ad A D. Et utriſque ſimul A E, D G æqualis ſtatuatur recta H. Item trienti baſis A C æqualis ſit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus deſcribatur. Is æqualis erit ſuperficiei curvæ conoidis A B C. Hinc ſequitur, ſi fuerit A E dupla A D, ſuperficiem conoidis curvam ad circulum baſeos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 13 ad 6. ſi A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita ſemper fore ut numerus ad numerum, ſi A E ad A D ejusmodi rationem habuerit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sphæroidis oblongi ſuperficiei circulum æqualem invenire.

Esto ſphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, ſectio per axem ellipſis A D B E, cujus minor diameter D E.

TAB. XIII. Fig. 4.

Ponatur D F æqualis C B, ſeu ponatur F alter focorum ellipſeos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ E D in G. centroque G, radio G B, deſcribatur ſuper axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque ſemidiametrum C D & rectam utriſque æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis ſit recta K. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis A D B E æqualis ſit.

Sphæroidis lati ſive compreſſi ſuperficiei circulum æqualem invenire.

Sit ſphæroides latum cujus axis A B, centrum C, ſectio per axem ellipſis A D B E.

TAB. XIII. Fig. 5.

Sit rurſus focorum alteruter F, diviſâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ baſin habeat axem A B, verticem vero punctum G. Sitque inter dimatrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media propor-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

portionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis propoſiti æqualis ſit.

Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIV. Fig. 1.

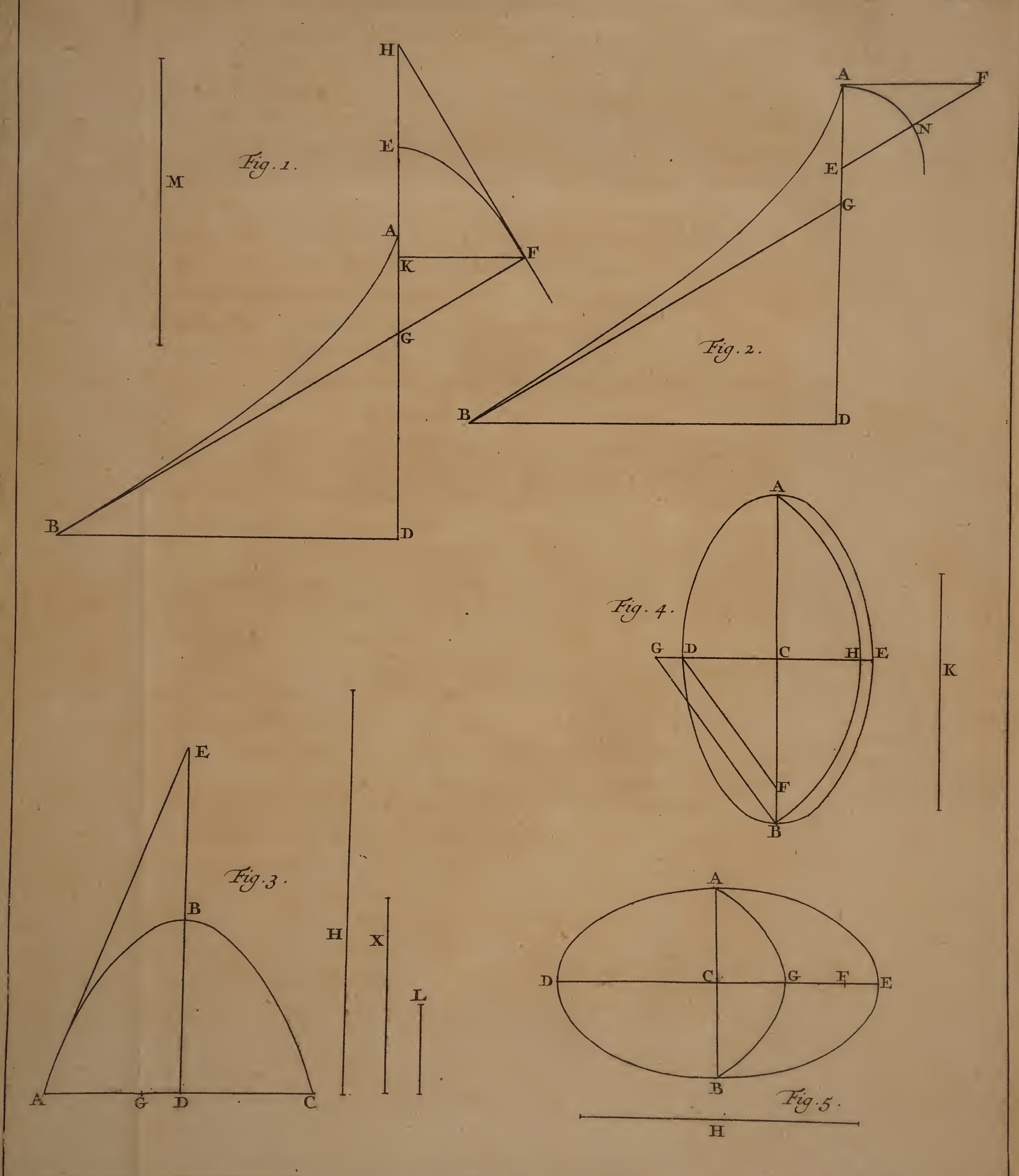
Esto conoides hyperbolicum cujus axis A B, ſectio per axem hyperbola C A D, cujus latus tranſverſum E A, centrum F, latus rectum A G.

Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio lateri recto A G. & ut H F ad A F longitudine ita, ſit A F ad F K potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola deſcripta K L M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transverſum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipſi producta B C in M, ſitque A L parallela B C. Erit jam ſicut ſpatium A L M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehenſum, ad dimidium quadratum ex B C, ita ſuperficies conoidis curva ad circulum baſeos ſuæ, cujus diameter C D. Unde conſtructio reliqua facile abſolvetur, poſitâ hyperbolæ quadraturâ.

Quum igitur conoidis parabolici ſuperficies ad circulum redigatur, æque ac ſuperficies ſphæræ, ex notis geometriæ regulis; in ſuperficie ſphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum eſt arcus circumferentiæ longitudinem æquari poſſe lineæ rectæ. Ad ſphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici ſuperficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in ſphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox oſtendemus.

Verum, quod non indignum animadverſione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ ſuppoſitione, circulum æqualem conſtrui ſuperficiei utrique ſimul, ſphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

Dato enim ſphæroide quovis lato, poſſe inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, poſſe inveniri ſphæroides latum ejusmodi, ut utriusque ſimul


Fig. 1.
H
E
M
A
K
F
G
B
D
Fig. 2.
A
F
N
E
G
B
D
Fig. 4.
A
G
D
C
H
E
K
F
B
Fig. 3.
E
B
H
X
L
A
G
D
C
Fig. 5.
A
D
C
G
F
E
B
H

mul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in caſu uno cæteris ſimpliciore ſufficiet attuliſſe. De linearum curvarum evolutione.

Sit ſphæroides latum cujus axis S I, ſectio per axem ellipſis S T I K; cujus ellipſis centrum O, axis major T K. ponatur autem ellipſis hæc ejusmodi, ut latus transverſum T K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta, ad partem ſui majorem. TAB. XIV. Fig. 2.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & ſint hæ quatuor continue proportionales B C, B A, B F, B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, ſive $\frac{1}{2}$ latus transverſum F B; dimidium latus rectum æquale B C.

Hujus conoidis ſuperficies curva, unà cum ſuperficie ſphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe poſſit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.

Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, baſis A C axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire. TAB. XIV. Fig. 3.

Accipiatur baſi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut ſit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto baſis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I deſcriptæ, cujusque diameter ſit E H; baſis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu ſumi poteſt. Quod ſi jam ſuper baſi D F intelligatur parallelogrammum conſtitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale ſit; ejus latus P Q ita ſecabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I ſit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla eſt A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ menſura, & illa ab hac viciſſim.

De linearum curvarum evolutione.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hiſce reducuntur, quamlibet veræ proximam ſolutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Eſt autem regula hujusmodi.

Tab. XV. Fig. 1.

Sit D A B portio hyperbolæ, cujus aſymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis aſymptoto S C.

Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter ſe rationem habentibus quam rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarithmus hic (qui ſemper eſt idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui ſpatium D E V B A D deſignabit, tribus rectis & curva D A B comprehenſi, in partibus qualium parallelogrammum D C eſt 100000, 00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis D A B.

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008, logar°. 36.
auferatur	0, 69897, 00043. logar^{us}. 5.
Erit	0, 85733, 24965. differ. logar^{orum}.
Et	9, 93314, 92856. logar^{us}. differentiæ.
Cui addatur	0, 36221, 56887. logar^{us}. ſemper addendus.
Fit	10, 29536, 49743. logar^{us}. ſpatii D E V B A D.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteriſtica ſit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus eſt 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula ſequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, ſcribendi poſt priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Eſt ergo area ſpatii D E V B A D proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum D C eſt 100000, 00000.

PRO-

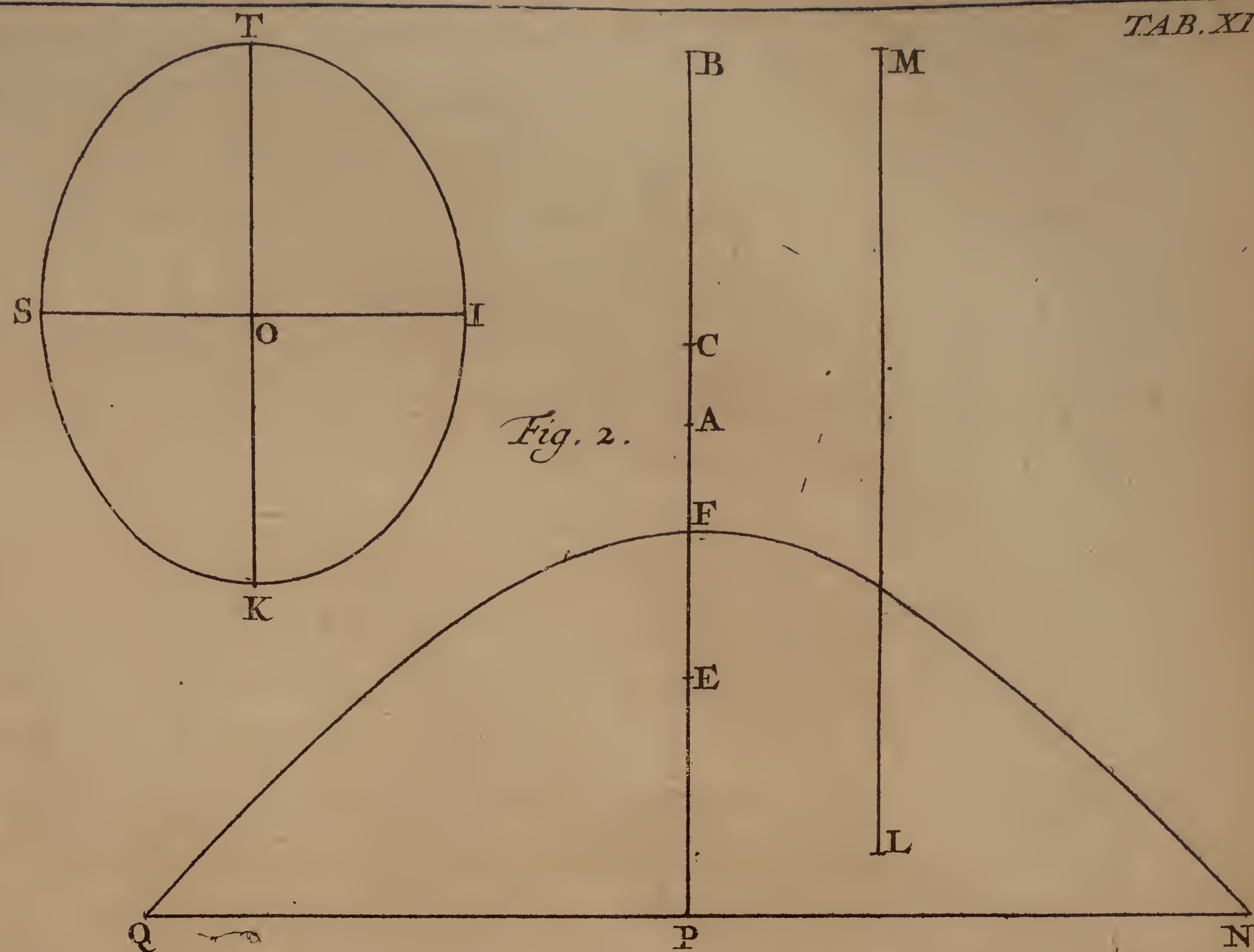


Fig. 2.

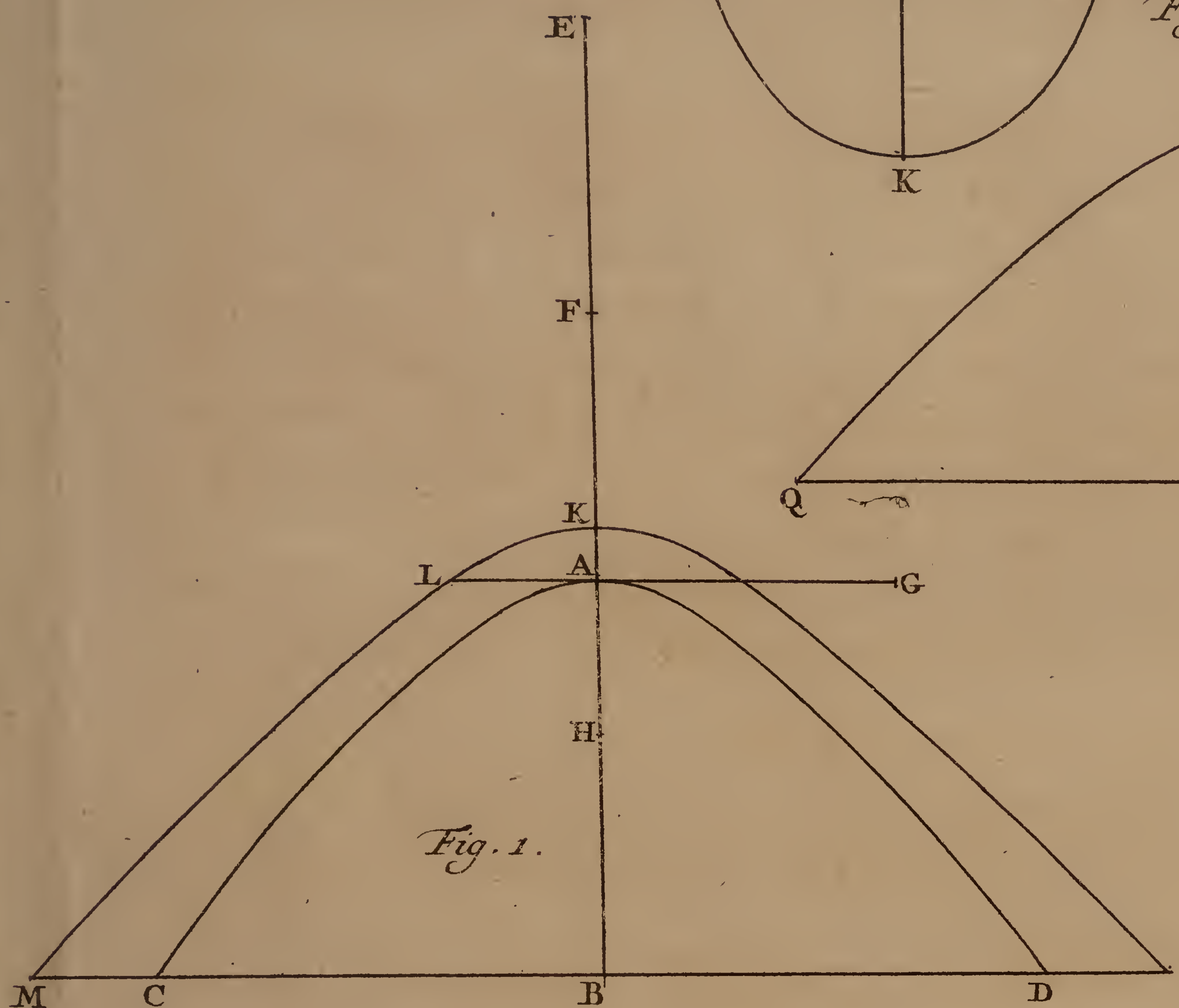


Fig. 1.

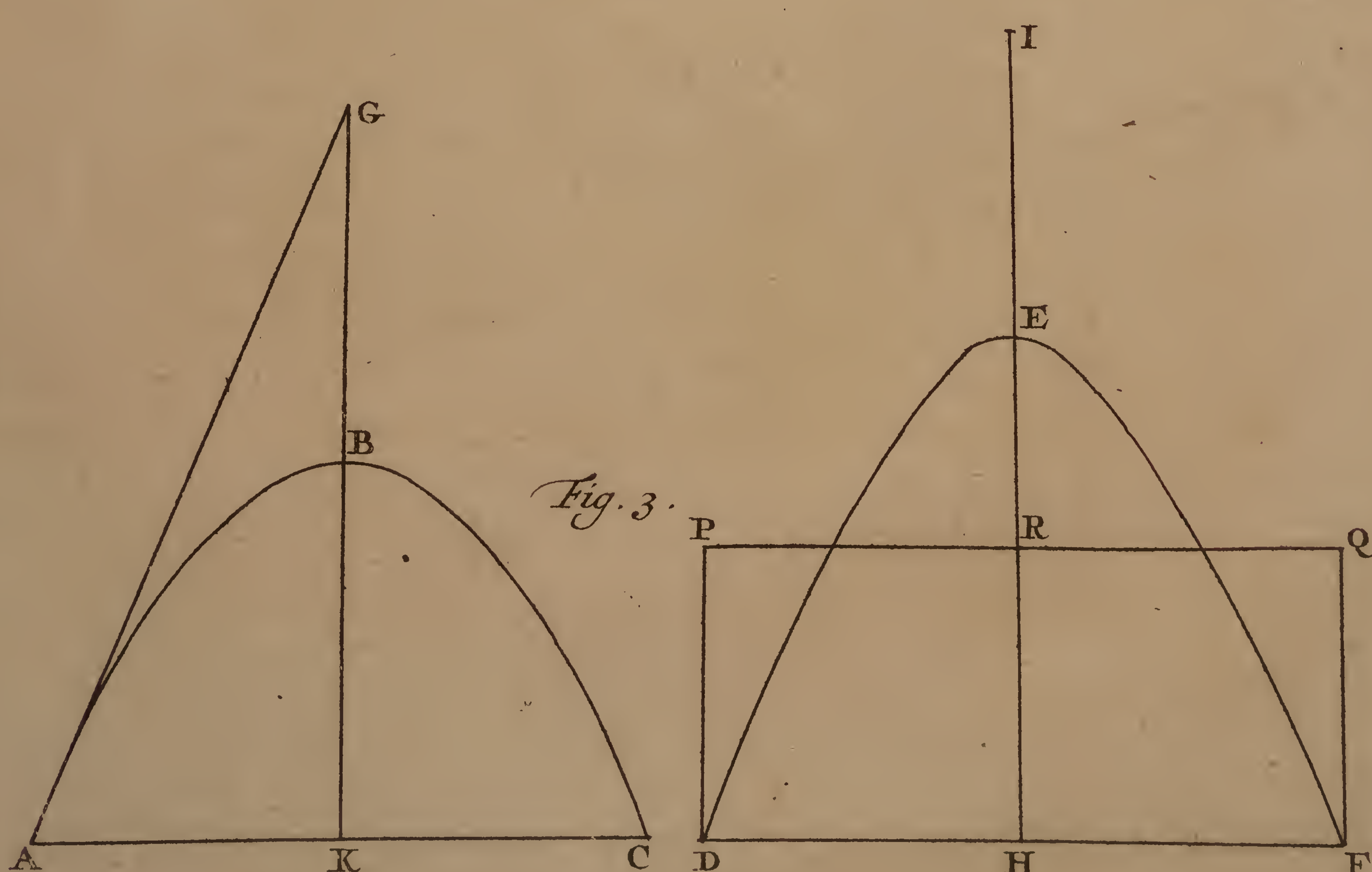
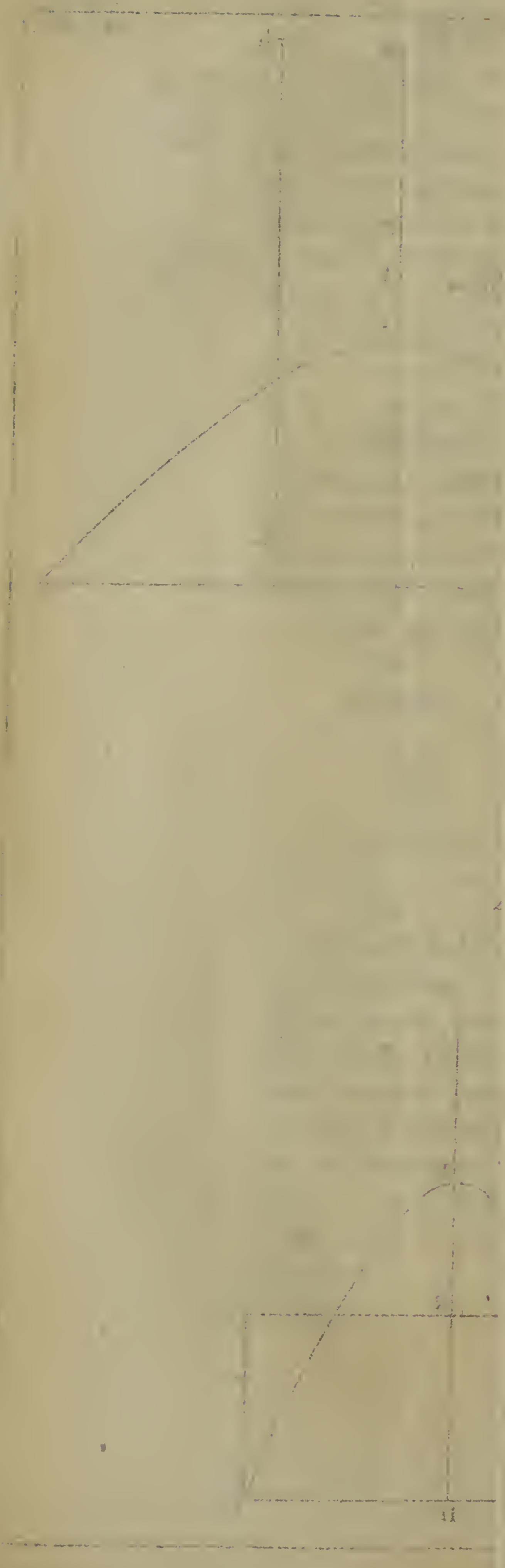


Fig. 3.



PROPOSITIO X.

De linearum curvarum evolutione.

Ineas curvas exhibere quarum evolutione ellipſes & hyperbolæ deſcribantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales.

Sit ellipſis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis transverſus A C; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipſius A E. Et ſumpto in ſectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; ſitque B G ipſi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G usque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E. TAB. XV. Fig. 2. & 3.

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, eſſe eam cujus evolutione, unà cum recta E A, deſcribetur ſectio A B. Ipſam autem B H tangere curvam in H, & eſſe toti H E A æqualem. Quamobrem, ſi ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, eſſe eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ cenſentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad ſextam dimenſionem aſcendere invenio; minimumque habere terminorum, ſi fuerit A B hyperbola cujus latera transverſum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N; vocatâque A C, *a;* C N, *x;* & N H, *y;* erit ſemper cubus ab *x x-y y-a a* æqualis 27 *x x y y a a*. Sed hoc caſu brevius quoque multo, quam prædicta conſtructione, curvæ E H M puncta reperiri poſſunt, ut in ſequentibus oſtendetur.

Cæterum notandum eſt, in ellipſi ſingulos quadrantes ſingularum linearum evolutione deſcribi; ſicut quadrans A B L

De linearum curvarum evolutione.

evolutione lineæ A E H M, quadrans C L evolutione ſimilis huic oppoſitæ C O M. Eſt enim hæc in ſectione utraque diverſitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipſi quam in hyperbola, ſit punctum E, ſumpta A E æquali ½ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipſi finitur in puncto axis minoris M, ſumpta L M æquali ½ lateris recti, ſecundum quod poſſunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos eſſe hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus conſideranti, quodque in ellipſi eſt ſicut A D ad D E, ita L M ad M D.

Horum autem demonſtrationi non immorabimur, ſed ad ipſam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex ſectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuſcunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa deſcribatur; & oſtendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica exiſtat, cui recta linea æqualis dari poſſit.

Tab. XV. Fig. 4. & 5.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipſa A B F deſcribatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ D E, neceſſe eſt occurrere lineæ A B F, ex evolutione deſcriptæ, ad angulos rectos; patet quoque viciſſim eas quæ ipſi A B F ad rectos angulos inſiſtunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

Intelligantur autem puncta B, F, inter ſe proxima; & ſiquidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriuſque inde diſtet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D diſta-

ſtabit ab A; interſectio vero rectarum B D, F E, quæ eſt G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipſas B D, F E neceſſe eſt, cum curvæ B F ad partem cavam inſiſtant rectis angulis.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quanto autem punctum F ipſi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, ſi interſtitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F cenſebitur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F L: ſecetque F L rectam B O in P, & ſint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipſi K L. Quia igitur ratio B G ad G M eſt eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa; & quia recta B M datur magnitudine ac poſitione, dabitur & punctum G in producta B M, ſive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N, ſimpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam inveſtigavimus, invenimuſque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compoſitionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, ſive N H ad L H, & ex B P ſive K L ad M N; patet, ſi rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compoſitam rationem B O ad M N datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in ſequentibus patebit; ac proinde iis ſemper curvas adſignari poſſe, quarum evolutione deſcribantur, quæque ideo ad rectas lineas ſint reducibiles.

Ponatur primò parabola eſſe A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, ſint parabolæ ad angulos rectos; ductæque ſint ad axem A Q perpendiculares B K, F L; erunt, ex proprietate parabolæ, ſingulæ M K, N L dimidio lateri recto æquales; & ablata communi L M, æquales inter ſe K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, ſitque earum poſterior ratio

TAB. XVI. Fig. 2.

 æqua-

æqualitatis; liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L; & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N L ad L H, ſive M K ad K H; nam L H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem eſt ratio M K ad K H, dato puncto B; quoniam tam M K, quam K H dantur magnitudine; nam M K æquatur dimidio lateri recto, K H vero duplæ K A. Dataque etiam eſt poſitione & magnitudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, ſive D, in curva R D E; quod nempe invenitur productâ B M uſque in G, ut ſit B M ad M G ſicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam K A.

Et ſic quidem, adſumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, ſimili ratione, invenientur; atque hoc ipſo lineam R D E geometricam eſſe conſtat, unáque proprietas ejus innoteſcit, ex qua cæteræ deduci poſſunt. Ut ſi inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ C D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a; A K, b; A Q, x; Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc eſt, K M ad M Q, eſt ea quæ $\frac{1}{2}a$ ad $2b$, eſtque ipſa K M $\propto \frac{1}{2}a$, erit & M Q æqualis $2b$. Eſt autem M A $\propto \frac{1}{2}a + b$. ergo A Q ſive x æqualis $3b + \frac{1}{2}a$. Unde $b \propto \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Porro quoniam, ſicut quadratum M K, hoc eſt, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum K B, hoc eſt, ab, ita qu. M Q, hoc eſt, $4bb$ ad qu. Q D; erit qu. Q D, ſive $yy \propto \frac{16b^3}{a}$. Ubi, ſi in locum b ſubſtituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$, quod illi æquale inventum eſt, fiet $yy \propto 16$. cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ diviſis per a. Ac proinde $\frac{27}{16}ayy \propto$ cubo ab $x - \frac{1}{2}a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $\propto \frac{1}{2}a$; eritque R Q $\propto x - \frac{1}{2}a$. Curvam igitur C D ejus naturæ eſſe liquet, ut ſemper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus baſis qu. Q D, altitudo $\frac{27}{16}a$; ac proinde ipſam paraboloidem eſſe, cujus evolutione deſcribi parabolam A B ſupra oſtendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

Quo-

Quomodo porro ratio O B ad B P, ſive N H ad H L, non tantum cum A B F parabola eſt, ſed etiam alia quælibet curva geometrica, ſemper inveniri poſſit manifeſtum eſt. Quoniam tantum recta F H ducenda eſt, quæ curvam in adſumpto puncto F tangat, & F N ipſi F H perpendicularis: unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

De linearum curvarum evolutione.

TAB XV. Fig 4. & 5.

At non æque liquet quo pacto ratio K L ad M N innoteſcat, quam tamen ſemper quoque reperiri poſſe ſic oſten-demus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares ſuper K L, ſitque K T æqualis K M, & L V æqualis L N, & ducatur V X parallela L N, quæ occurrat ipſi K T in X. Quoniam ergo ſemper eadem eſt differentia duarum L K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc eſt, quæ duarum L V, K T; eſt autem differentiæ ipſarum L V, K T æqualis X T, & X V ipſi L K; erit proinde N M æqualis duabus ſimul V X, X T, vel ei quo V X ipſam X T ſuperat. Atque adeo, ſi data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque ſimul V X, X T, vel ad exceſſum V X ſupra X T, hoc eſt, data erit ratio V X ſive L K ad N M.

Sciendum eſt autem, quoniam K T ipſi K M, & L V ipſi L N, æquales ſumptæ ſunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox oſtendetur. Et ſiquidem ſit linea recta; ut contingit ſi A B F coni ſectio fuerit, & K L axis ejus; conſtat rationem V X ad X T datam fore, data poſitione ipſius lineæ V T, quæ locus eſt puuctorum V, T; ſemperque eandem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L.

At ſi locus alia linea curva fuerit, diverſa erit ratio V X ad X T, prout majus minuſve fuerit intervallum K L. Inquirendum eſt autem quænam futura ſit iſta ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem poſuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum eſt; unde recta V T, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; poteſt enim duci quoniam

De linearum curvarum evolutione.

niam curva, ad quam ſunt puncta T, V, geometrica eſt. Ratio igitur Y K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T. ex qua etiam rationem L K ad N M dari oſtendimus.

Quænam vero ſit linea ad quam ſunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, x; K T, y. Nam quia data eſt curva A B F, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ K M, per methodum tangentium à Carteſio traditam, quæ ipſi K T, ſive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ T V innoteſcet, ad quam deinde tangens ducenda eſt. Sed clariora omnia fient ſequenti exemplo.

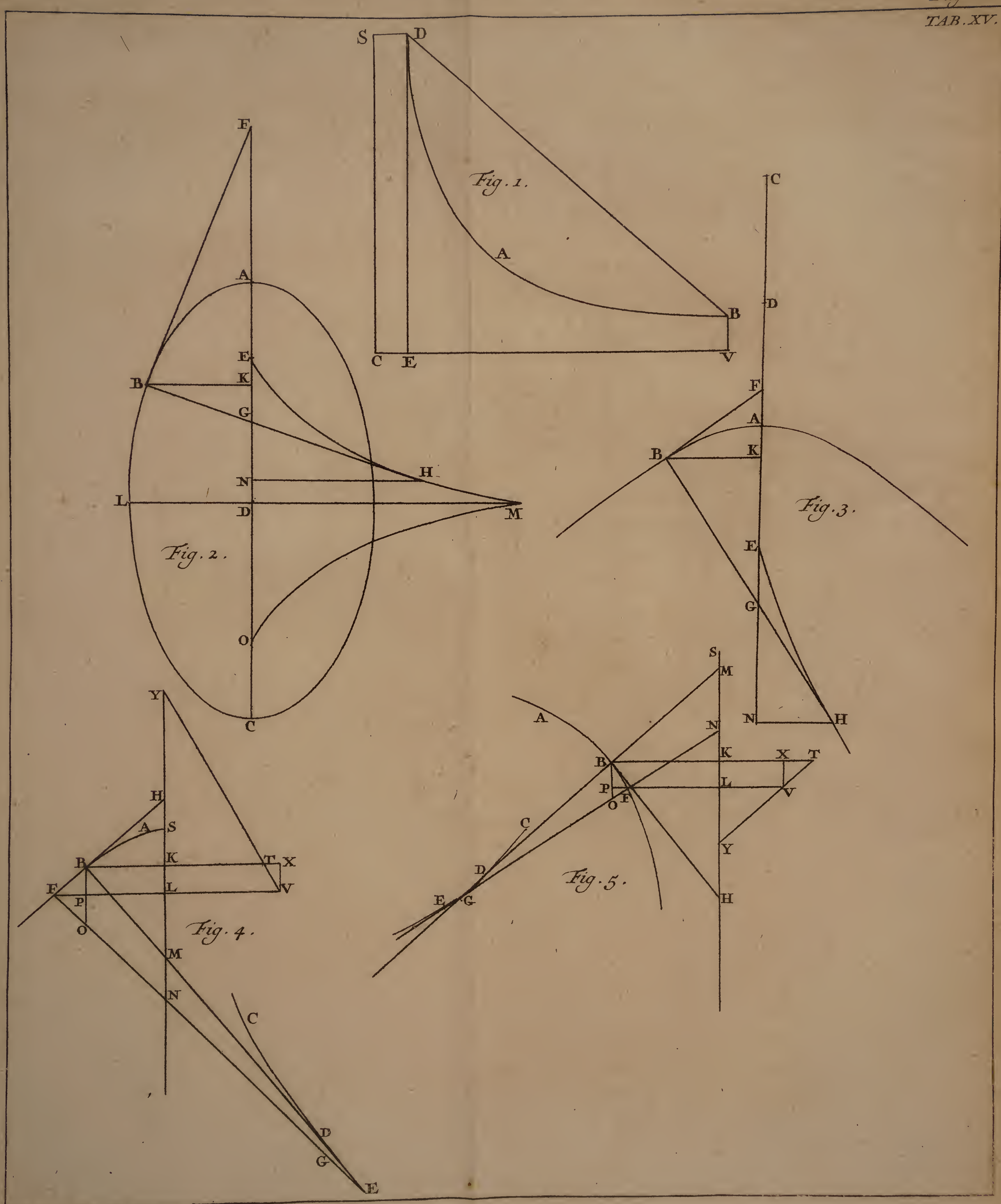
TAB. XVI. Fig. 3.

Sit A B F paraboloides illa, cui ſuperius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, ſint inter ſe ſicut quadrata ex ipſa S K abſciſſarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione paraboloides S B F deſcribatur.

Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci ſcimus, ſumpta S H æquali $\frac{1}{2}$ S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos inſiſtat, dantur jam lineæ M H, H K, ac proinde earum inter ſe ratio, quæ eſt eadem quæ O B ad B P.

Ut autem ratio B P, ſive K L ad M N innoteſcat, ponantur ad K L perpendiculares rectæ K T, L V, æquales ſingulis K M, L N, ſitque V X parallela L K. Jam quia ex duabus ſimul K L, L N, auferendo K M, relinquitur M N *; hoc eſt, auferendo ex duabus X V, V L, ſive X V,

* *In Exemplari ſuo ad marginem ſcripſit Auctor.* ſupponitur hic rectam L N majorem eſſe quam K M, quod melius fuerat antea probari, etſi verum eſt. *Demonſtratio autem haud difficilis eſt, ſit abſciſſa* S K ∞ x; *perpendicularis* K B ∞ u; *latus rectum paraboloidis* ∞ a. *Quia* S H $\infty \frac{1}{2}$ SK, *eſt* H K $\infty \frac{3}{2}$SK ($\frac{3}{2}$x). *Propter angulum rectum* H B M, *triangula rectangula* H B K, K B M *ſimilia ſunt, &* H K ($\frac{1}{2}$x), K B (u), K M, *ſunt in continua proportione; ergo* K M $\infty \frac{2uu}{3x}$, *cujus quadratum eſt* $\frac{4u^4}{9xx} \infty \frac{4au^4}{9axx}$; *ſed ut notavit auctor ex natura Paraboloidis* A B F, $u^3 \infty axx$; *ergo quadratum lineæ* K M $\infty \frac{4au^4}{9axx} \infty \frac{4au^4}{9u^3} \infty \frac{4}{9}au$ *unde ſequitur ipſam* K M, *augeri ſi creſcat* B K (u). *Cum autem* L F *excedat* B K, L N *ſuperabit* K M, quod demonſtrandum erat.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

XV, XK, ipſam KT; hinc autem relinqui apparet VX & XT: erunt igitur hæ duæ VX, XT ipſi MN æquales, ac proinde ratio KL ad MN eadem quæ VX ad duas ſimul VX, XT. Ut autem hæc ratio innoteſcat cum intervallum KL eſt minimum; oportet ſecundum prædicta inquirere quis ſit locus, ſive linea ad quam ſunt puncta T, V. Quod ut fiat ſit latus rectum paraboloidis ABF ∞ a; SK ∞ x; KT ∞ y.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quia igitur proportionales ſunt KH, KB, KM, eſtque HK ∞ $\frac{1}{2}x$: KB ex natura paraboloidis æqualis R. cub. axx: fiet KM, hoc eſt KT ∞ $\frac{2}{3}$ R. cub. aax ∞ y, ac proinde $\frac{8}{27}aax$ ∞ y^3. Unde patet locum punctorum T, V, eſſe paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, ſumptâ SY duplâ ipſius SK, junctâque YT. Et jam quidem ratio VX ad duas ſimul VX, XT, quam diximus eandem eſſe ac KL ad MN, erit ea quæ YK ad utramque ſimul YK, KT. Hæc autem ratio data eſt, ergo & ratio KL ad MN. Sed & rationem OB ad PB datam eſſe oſtenſum eſt. Ergo, cum ex duabus hiſce componatur ratio BD ad DM, ut ſupra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio BM ad MD; adeoque & punctum D in curva DE.

Ad conſtructionem autem breviſſimam hoc pacto hic perveniemus. KT ſive KM dicta fuit y. Itaque MH erit $y + \frac{3}{2}x$. Et MH ad HK, ſive OB ad BP, ut $y + \frac{3}{2}x$ ad $\frac{3}{2}x$. ſive, ſumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia YK ∞ $3x$, erit YK ad YK + KT, ſive per prædicta, KL ad MN, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus OB ad BP, & KL ad MN, componi diximus rationem BD ad DM. Ergo ratio BD ad DM erit compoſita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio BM ad MD, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit SZ perpendicularis ad SK, eique occurrat MB producta in Z. Quia ergo ratio BM ad MD inventa eſt ea quæ y ad $y + 3x$, hoc eſt quæ MK ad MK + 3KS. Sicut au-

P tem

De linearum curvarum evolutione.

tem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Unde liquet M D æqualem ſumendam ipſi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Conſtat autem geometricam eſſe, & ſi velimus, poſſumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipſius ad puncta axis S K.

Tab. XVII. Fig. 1.

Simili modo autem, ſi inquiramus in paraboloide illa ſive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut portiones axis abſciſſæ, inveniemus curvam cujus evolutione deſcribitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori conſtructione per puncta determinari. Nam ſi fuerit illa S A B; axis S M; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus ſit ejusmodi, ut ductâ S Z, quæ ſecet S M ad angulos rectos, ea portiones ſimiles curvæ habeat ad partes oppoſitas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide ſumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos ſecet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde ſumatur B D æqualis dimidiæ B M, unà cum ſesquialtera B Z. Eritque D unum è punctis curvæ quæſitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, deſcribetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum eſt, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipſius A R D, in infinitum porro continuatæ, deſcribatur paraboloidis pars infinita A B F; evolutione autem totius A R I, ſimiliter in infinitum extenſæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, ſumptâ S P quæ ſit ad latus rectum paraboloidis, ſicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus eſt ex 45) applicatâque ordinatim P A. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur ſicut cætera omnia harum

TAB. XVI.

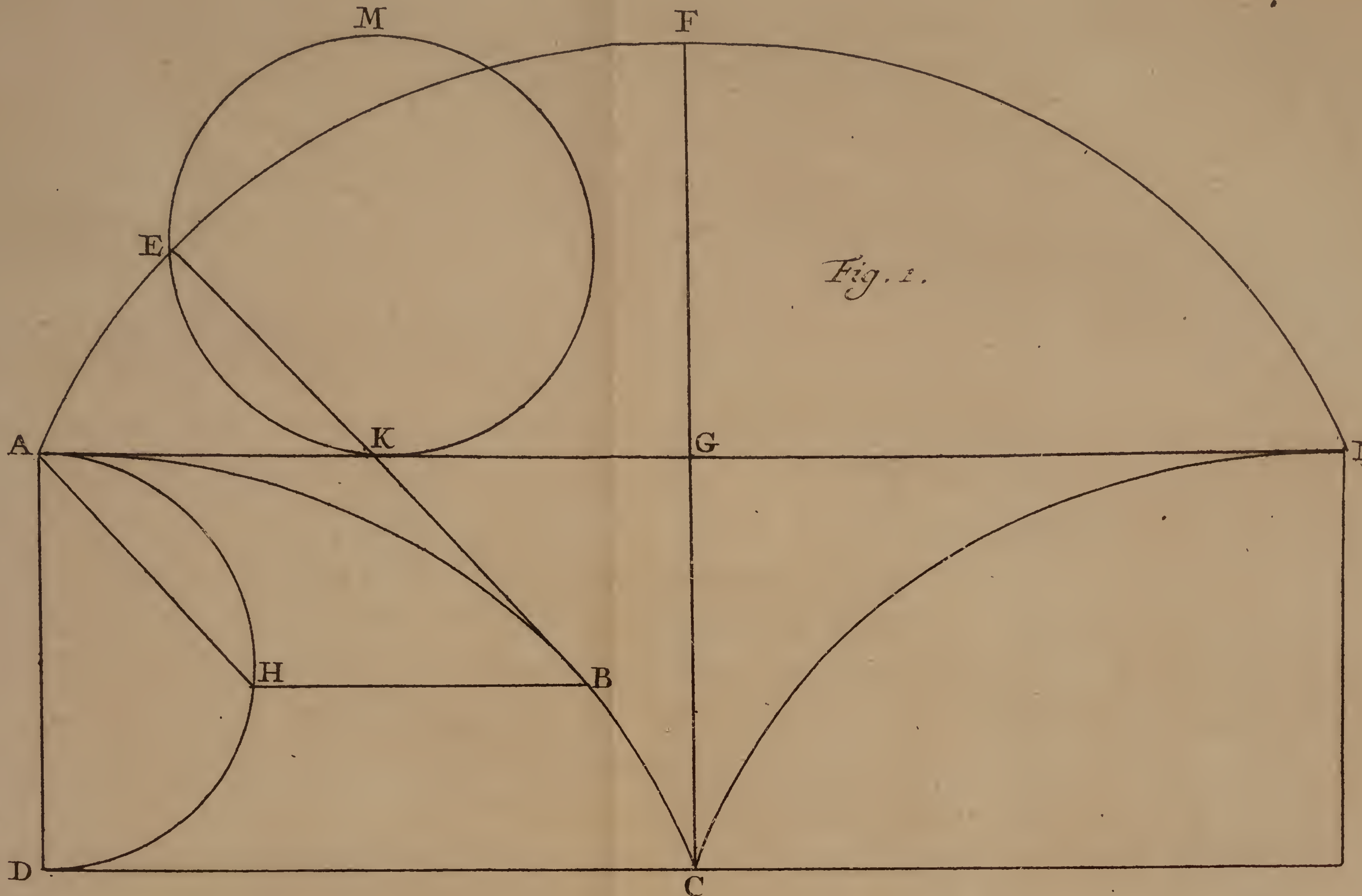


Fig. 1.

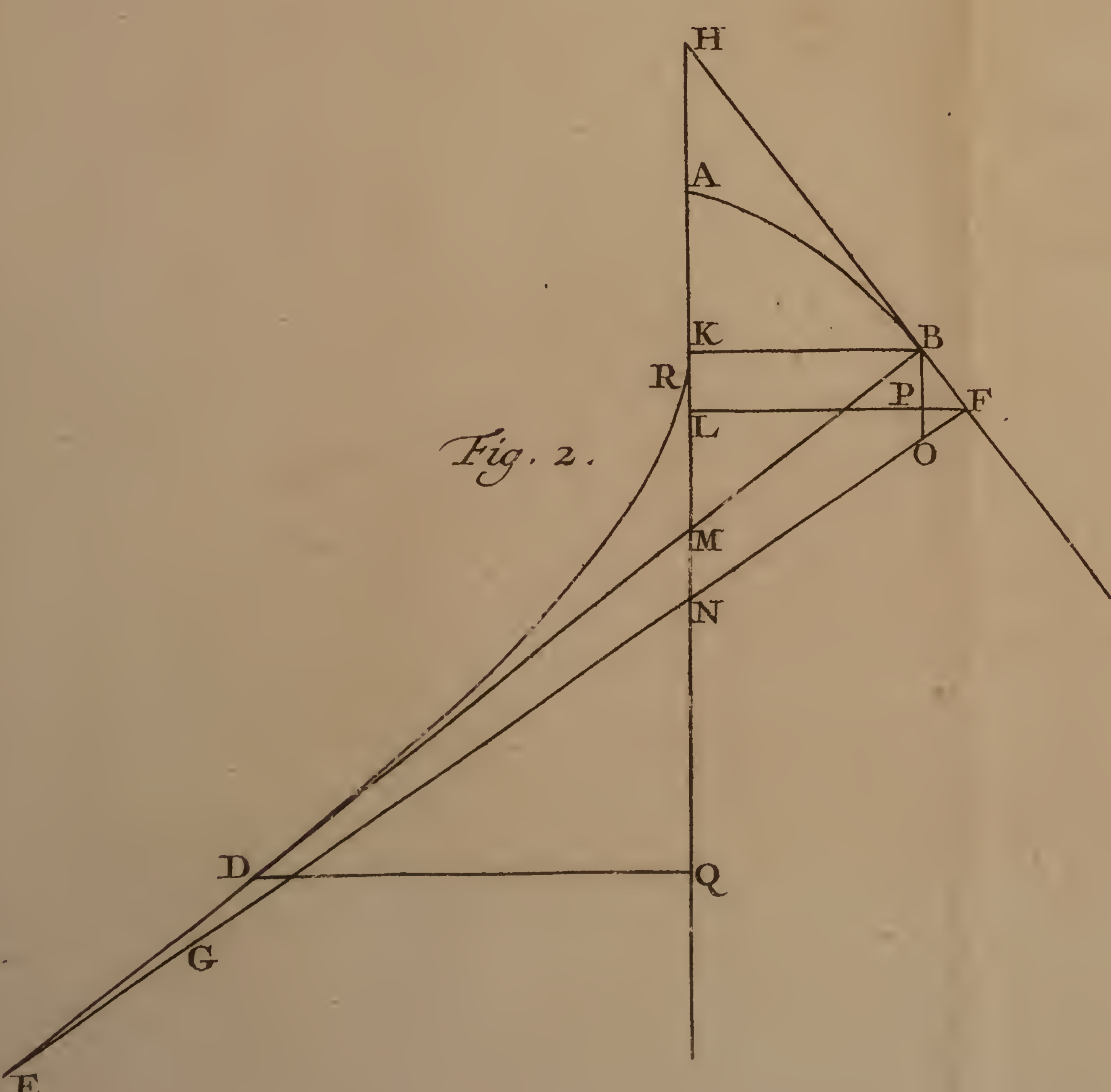


Fig. 2.

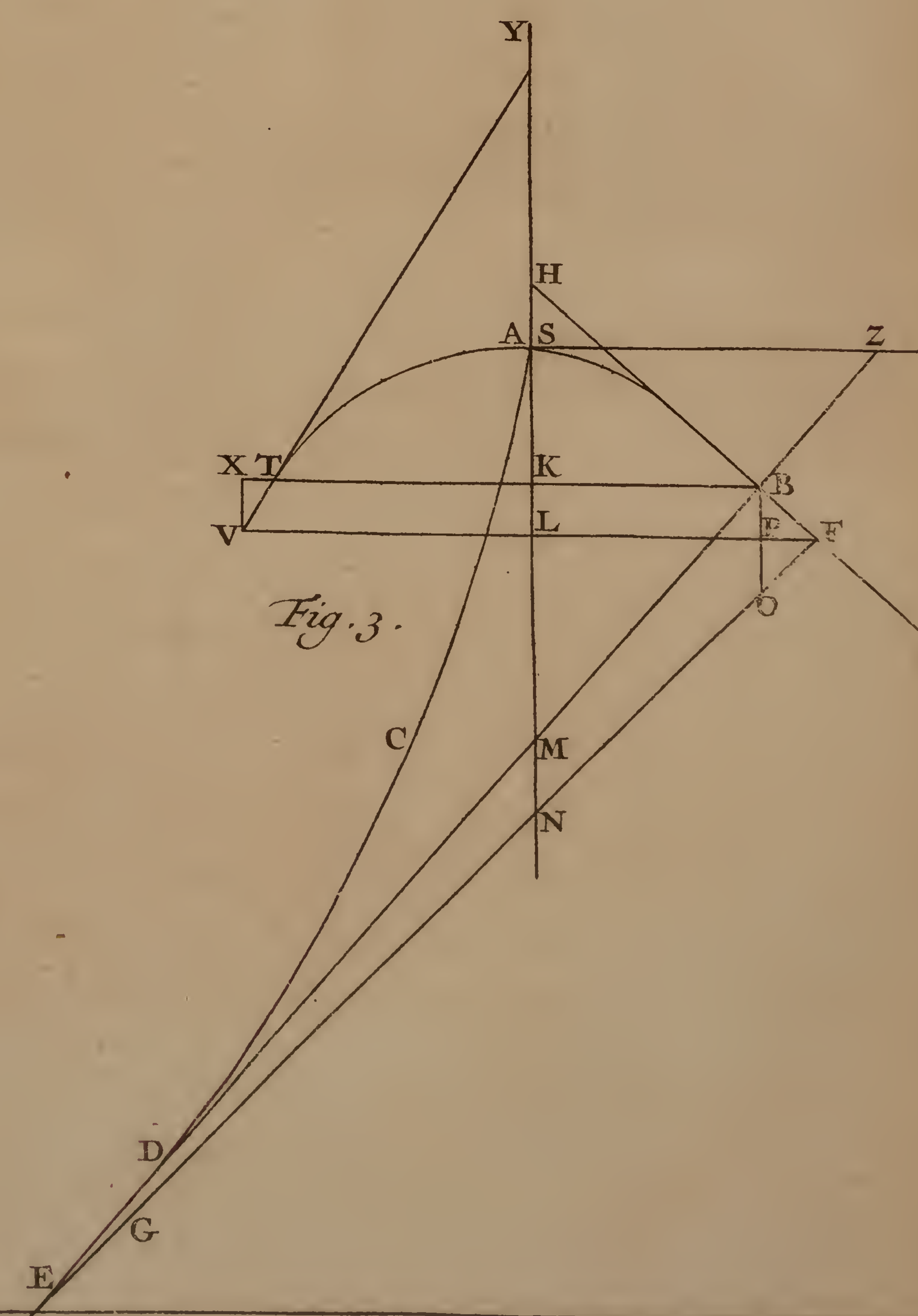


Fig. 3.

rum curvarum, hoc eſt, ſicut punctum D modo inventum fuit. De linearum curvarum evolutione.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, ſemper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipſa deſcribatur, quæque propterea rectæ adæquari poſſit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo conſtructionem univerſalem ſequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si}\ \left\{\begin{array}{l} a\,x \infty y^2 \\ a^2 x \infty y^3 \\ a\,x^2 \infty y^3 \\ a\,x^3 \infty y^4 \\ a^3 x \infty y^4 \end{array}\right.\quad \text{Erit}\ \left\{\begin{array}{l} \text{B M} + 2\,\text{B Z} \\ \tfrac{1}{2}\text{B M} + \tfrac{3}{2}\text{B Z} \\ 2\,\text{B M} + 3\,\text{B Z} \\ 3\,\text{B M} + 4\,\text{B Z} \\ \tfrac{1}{3}\text{B M} + \tfrac{4}{3}\text{B Z} \end{array}\right\} \infty\ \text{B D}.$$

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipſa quidem S K ſemper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K ∞ *x*; B K ∞ *y*, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis eſt ipſi S K; & latere recto curvæ ∞ *a*; prior pars tabellæ, quæ ad ſiniſtram eſt, naturam ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ ſi curvæ S B inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D in curva quæſita C D. Exempli gratia, ſi S B eſt parabola quæ ex coni ſectione fit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $a\,x \infty y^2$; cui reſpondet ab altera parte B M + 2 B Z ∞ B D. Unde longitudo lineæ B D cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ. TAB. XVII. Fig. 2.

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut B M ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis *x* in æquatione; B Z vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis *y*; ex his autem utriſque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis *a*.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Præter haſce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non abſimili conſtructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Aſſimilantur autem hyperbolis, eo quod aſymptotos ſuas habent, ſed tantum angulum rectum conſtituentes. Et harum primam quidem ſtatuimus hyperbolam ipſam, quæ eſt è coni ſectione.

TAB. XVII. Fig. 3. Reliquarum vero naturam ut explicemus; ſunto P S, S K, aſymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, ſitque S K ∞ x; K B ∞ y. Si igitur hyperbola ſit A B, ſcimus rectangulum linearum S K, K B, hoc eſt, rectangulum $x\,y$ ſemper eidem quadrato æquale eſſe, quod vocetur $a\,a$.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua ſolidum ex quadrato lineæ S K, in altitudinem K B ductum, hoc eſt, ſolidum $x\,x\,y$, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides exiſtunt, quarum proprietatem ſequens tabella ſingulis æquationibus exhibet, ſimulque rationem conſtruendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} x\,y \infty a^2 \\ x^2 y \infty a^3 \\ x\,y^2 \infty a^3 \\ x^3 y \infty a^4 \\ x\,y^3 \infty a^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}BM + \frac{1}{2}BZ \\ \frac{2}{3}BM + \frac{1}{3}BZ \\ \frac{1}{3}BM + \frac{2}{3}BZ \\ \frac{3}{4}BM + \frac{1}{4}BZ \\ \frac{1}{4}BM + \frac{3}{4}BZ \end{array}\right\} \infty BD.$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, ſecat ad angulos rectos, occurritque aſymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio eſt $x\,y \infty a^2$, ſumetur B D ∞ $\frac{1}{2}$ B M + $\frac{1}{2}$ B Z, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva D C quæſita, cujus alia quotlibet puncta ſic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa eſt curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ ſuperius æquatione expreſſimus. Conſtructio autem tabellæ hujus plane eadem eſt quæ ſuperioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum

rum quæ ex paraboloidibus naſcuntur conſtructionem, ducendæ ſunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B ſecent curvas A B, ſive ipſarum tangentes B H, ad angulos rectos; dicemus in univerſum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, conſiderare oportet quæ ſint exponentes poteſtatum x & y, & facere ut, ſicut exponens poteſtatis x ad exponentem poteſtatis y, ita ſit S K ad K H. Juncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio eſt $x y^2 \propto a^3$: quia exponens poteſtatis x eſt 1, poteſtatis autem y exponens 2; oportet eſſe ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonſtrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non ſolum paraboloidum iſtarum, ſed & ſpatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & aſymptotos interjectorum, plana ſolidaque dimenſi ſunt. Quod quidem & nos, facili atque univerſali methodo, expedire poſſemus, ex ſola tangentium proprietate ſumpta demonſtratione. Sed illa non ſunt hujus loci.

De lineARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUARTA.

De centro Oſcillationis.

CEntrorum Oſcillationis, ſeu Agitationis, inveſtigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliiſque multis, doctiſſimus Merſennus propoſuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Carteſii haud pridem editis, quibus ad Merſennianas ſuper his rebus reſponſum continetur. Poſtulabat autem centra illa ut invenirem in circuli ſectori-

 bus,

De centro oscillationis.

bus, tam ab angulo quam à medio arcu ſuſpenſis, atque in latus agitatis, item in circuli ſegmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media baſi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum ſimplex, hoc eſt, pondus filo appenſum reperiatur ea longitudine, ut oſcillationes faciat temporum eorundem ac figuræ iſtæ, uti dictum eſt, ſuſpenſæ. Simul vero pretium operæ, ſi forte quæſitis ſatisfeciſſem, magnum ſane & invidioſum pollicebatur. Sed a nemine id quod deſiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam pateſceret; velut à limine repulſus, longiori inveſtigatione tunc quidem abſtinui. Qui vero rem ſeſe confeciſſe ſperabant viri inſignes, Carteſius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam ſcopum attigerunt, niſi in paucis quibuſdam facilioribus, ſed quorum tamen demonſtrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifeſtum fore ſpero, ſi quis forte quæ ab illis tradita ſunt, cum noſtris hiſce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonſtrata arbitror, & experimentis prorſus convenientia reperi. Occaſio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati noſtri temperandorum ratione oblata eſt, dum pondus mobile, præter id quod in imo eſt, illis applico, ut in deſcriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auſpiciis atque à prima origine rem exorſus, tandem difficultates omnes ſuperavi, nec tantum problematum Merſennianorum ſolutionem, ſed alia quoque illis difficiliora reperi, & viam denique, qua in lineis, ſuperficiebus, ſolidiſque corporibus certa ratione centrum illud inveſtigare liceret. Unde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæſita fuerant, cognoſcendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Acceſſit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, ſæculiſque omnibus duraturæ, menſuræ definitionem abſolutiſſimam per hæc tradere poſſem; qualis eſt ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DE-

DEFINITIONES.

De centro oscillationis.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum, ita ſuſpenſa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis ſuæ continuare poſſit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oſcillationis.

III.

Pendulum ſimplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, conſtare intelligitur, ima ſui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, cenſenda eſt.

IV.

Pendulum verò compoſitum, quod pluribus ponderibus conſtat, immutabiles diſtantias ſervantibus, tum inter ſe, tum ab axe Oſcillationis. Hinc figura quælibet ſuſpenſa, ac gravitate prædita, pendulum compoſitum dici poteſt, quatenus cogitatu in partes quotlibet eſt diviſibilis.

V.

Pendula iſochrona vocentur, quorum Oſcillationes,

nes, per arcus ſimiles, æqualibus temporibus peraguntur.

V I.

Planum Oſcillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ ſuſpenſæ duci intelligitur, ad axem oſcillationis rectum.

V I I.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oſcillationis perpendicularis.

V I I I.

Linea perpendiculi, recta in plano oſcillationis, ducta ab axe oſcillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

I X.

Centrum oſcillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oſcillationis diſtans, quanta eſt longitudo penduli ſimplicis quod figuræ iſochronum ſit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ tranſiens.

X I.

Figura plana, vel linea in plano ſita, in planum agitari dicatur, cum axis oſcillationis in eodem cum figura lineave eſt plano.

XII.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oſcillationis ad figuræ lineæve planum rectus eſt.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita eſt intelligendum, ac ſi numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter ſe mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

SI pondera quotlibet, vi gravitatis ſuæ, moveri incipiant; non poſſe centrum gravitatis ex ipſis compoſitæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, aſcendere.

Altitudo autem in his ſecundum diſtantiam à plano horizontali conſideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, ſecundum rectas ipſi perpendiculares, deſcendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expreſſe, vel à legentibus ſupplendum eſt, cum abſque eo centri gravitatis conſideratio locum non habeat.

Ipſa vero hypotheſis noſtra quominus ſcrupulum moveat, nihil aliud ſibi velle eam oſtendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe ſurſum non ferri. Nam primo, ſi unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis ſuæ altius aſcendere non poſſe extra dubium eſt. aſcendere autem tunc intelligitur ſcilicet, cum ejus centrum gravitatis aſcendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter ſe per lineas inflexiles conjunctis, concedi neceſſe eſt, quoniam nihil vetat ipſa tanquam unum aliquod conſiderari.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro aſcendere poterit.

Quod ſi jam pondera quotlibet non inter ſe connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis eſſe ſcimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compoſitæ altitudinem cenſeri debere; ſiquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci poſſunt, nullâ aliâ accerſitâ potentiâ quam quæ ipſis ponderibus ineſt, ſed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus eſt. Quare, ſicut fieri non poteſt ut pondera quædam, in plano eodem horizontali poſita, ſupra illud planum, vi gravitatis ſuæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque diſpoſitorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum tranſiens, perduci poſſe, ſic oſtendetur.

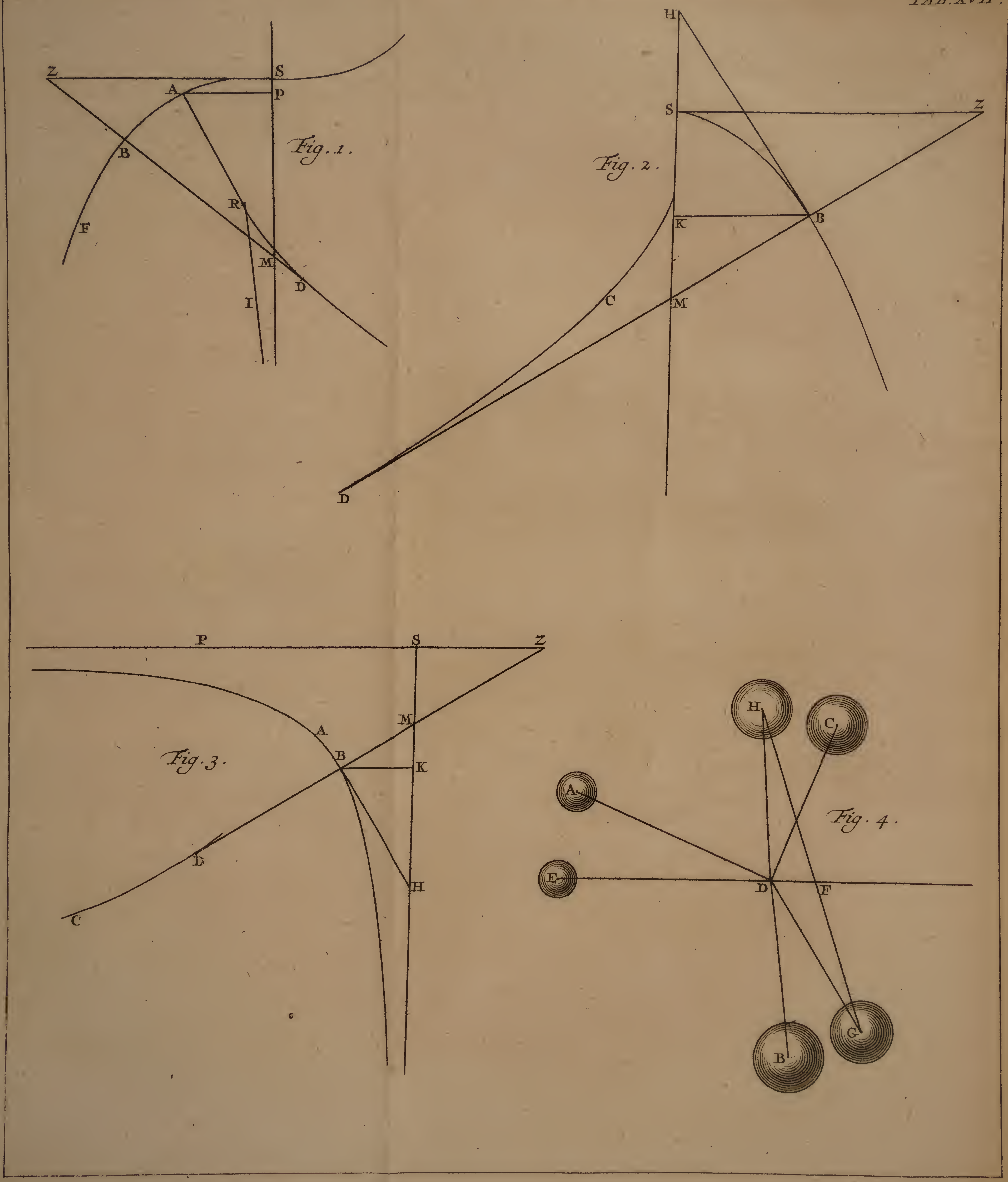
TAB. XVII. Fig. 4.

Sint pondera A, B, C, poſitione data, quorum commune gravitatis centrum ſit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus ſectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera ſibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A ſit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rurſus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ ſecet planum E F in F; ubi neceſſario quoque erit centrum gravitatis binorum iſtorum ponderum connexorum, cum trium, in E, G, H, poſitorum, centrum gravitatis ſit D, & ejus quod eſt in E, centrum gravitatis ſit quoque in plano E D F. Moventur igitur rurſus pondera H, G, ſuper puncto F, velut axe, abſque vi ulla, ac ſimul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipſam ſui centri gravitatis D altitudinem,

ſuo

TAB. XVII.


Fig. 1.
Z
S
A
P
B
R
F
M
D
I
Fig. 2.
H
S
Z
K
B
C
M
D
Fig. 3.
P
S
Z
M
A
B
K
D
H
C
Fig. 4.
H
C
A
E
D
F
G
B

ſuo ipſorum æquilibrio, translata appareat. quod erat oſtendendum. Eademque de quotcunque aliis eſt demonſtratio. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Hæc autem hypotheſis noſtra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non ſolum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonſtrari poſſunt, ſed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et ſanè, ſi hac eadem uti ſcirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile ſuos ipſi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam poſſibilem eſſe.

I I.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifeſto, quemadmodum in ſequentibus demonſtrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus deſcendendo ac aſcendendo percurrere.

De pendulo ſimplici hoc demonſtratum eſt propoſitione 9 de Deſcenſu gravium. Idem vero & de compoſito tenendum eſſe declarat experientia; ſiquidem, quæcunque fuerit penduli figura, æque apta continuando motui reperitur, niſi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani exiſtentibus, ſi à ſingulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ ſingulæ in ſua pondera ductæ, tantundem ſimul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C, ſita ad eandem partem plani, TAB. XVIII. Fig. 1.

 cu-

De centro oscillationis.

cujus ſectio recta D F, inque ipſum à ſingulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico ſummam productorum, quæ fiunt à ſingulis ponderibus in ſuas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.

Intelligantur enim perpendiculares, à ſingulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani D F, ſintque ſingulæ D K, E L, F M, ipſi H G æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ ſingulæ cum ſibi oppoſitis A, B, C, æquilibrium faciant ad interſectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, ſicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, ſive G H, ductæ in K. Similiter E B in B æquabitur E L, ſive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, ſive G H, in M. Ergo ſumma productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur ſummæ productorum ex G H in omnes K,L,M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipſis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipſorum gravitatis G ſuſpenſis, æquiponderabunt. Unde, cum diſtantia G H æqualis ſit ſingulis D K, E L, F M, neceſſe eſt magnitudines A, B, C, ſimul ſumptas, æquari ipſis K, L, M. Itaque & ſumma productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonſtrandum.

Etſi vero in demonſtratione poſitæ fuerint rectæ A K, B L, C M, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, ſi omnia ſimul in alium quemlibet ſitum transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes ſint eædem quæ prius. Quare conſtat propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO II.

De centro oscillationis. TAB. XVIII. Fig. 1.

POſitis quæ prius, ſi pondera omnia A, B, C, ſint æqualia; dico ſummam omnium perpendicularium A D, B E, C F, æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ, G H, multiplici ſecundum ponderum numerum.

Quum enim ſumma productorum, à ponderibus ſingulis in ſuas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; ſitque hìc, propter ponderum æqualitatem, ſumma illa productorum æqualis producto ex uno pondere in ſummam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem ſecundum ponderum numerum: patet ſummam perpendicularium neceſſario jam æquari ipſi G H, multiplici ſecundum ponderum numerum. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

SI magnitudines quædam deſcendant omnes, vel aſcendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines deſcenſus vel aſcenſus cujusque, in ipſam magnitudinem ductæ, efficient ſummam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine deſcenſus vel aſcenſus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, deſcendant in D, E, F; vel ex D, E, F, aſcendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum ſunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero ſunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico ſummam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C. TAB. XVIII. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. Intelligatur enim planum horizontale cujus ſectio recta M P, atque in ipſum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P.

Quia igitur ſumma productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis eſt facto ex G P in omnes A, B, C*. Similiterque ſumma productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; ſequitur & exceſſum priorum productorum ſupra poſteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero exceſſum æquari manifeſtum eſt productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc ſimul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO IV.

SI pendulum è pluribus ponderibus compoſitum, atque è quiete dimiſſum, partem quamcunque oſcillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus ſingula, relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quouſque poſſunt aſcendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compoſitæ, ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam oſcillationem obtinebat.

TAB. XVIII. Fig. 3. 4. Sit pendulum compoſitum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel ſuperficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque ſuſpenſum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conſpicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, poſitum ſit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo uſque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oſcillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto

ᴄto deinceps communi vinculo, ſingula intelligantur acquiſitas celeritates ſurſum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quouſque poſſunt aſcendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, ſit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine eſſe cum puncto E.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Nam primum quidem, conſtat P non altius eſſe quam E, ex prima ſumptarum hypotheſium. Sed nec humilius fore ſic oſtendemus. Sit enim, ſi poteſt, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iiſdem, ad quas aſcenderunt, altitudinibus recidere, quæ ſunt L G, M H, N K. Unde quidem eaſdem celeritates ipſis acquiri conſtat, quas habebant ad aſcendendum ad iſtas altitudines *, hoc eſt, eas ipſas quas acquiſierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, ſi cum dictis celeritatibus ad virgam ſuperficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique ſimul adhæreſcant, motumque ſecundum inceptos arcus continuent; quod fiet, ſi priuſquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercuſſa intelligantur; abſolvet, hoc modo reſtitutum pendulum, oſcillationis partem reliquam, æquè ac ſi abſque ulla interruptione motum continuaſſet. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, deſcendendo ac aſcendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E eſſe altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, poſitorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapſorum centrum gravitatis, altius, quam unde deſcenderat, aſcendiſſet. quod eſt abſurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius eſt quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum ſit neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.

* Propoſ. 4. part. 2.

* Hypoth. 1. huj.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum

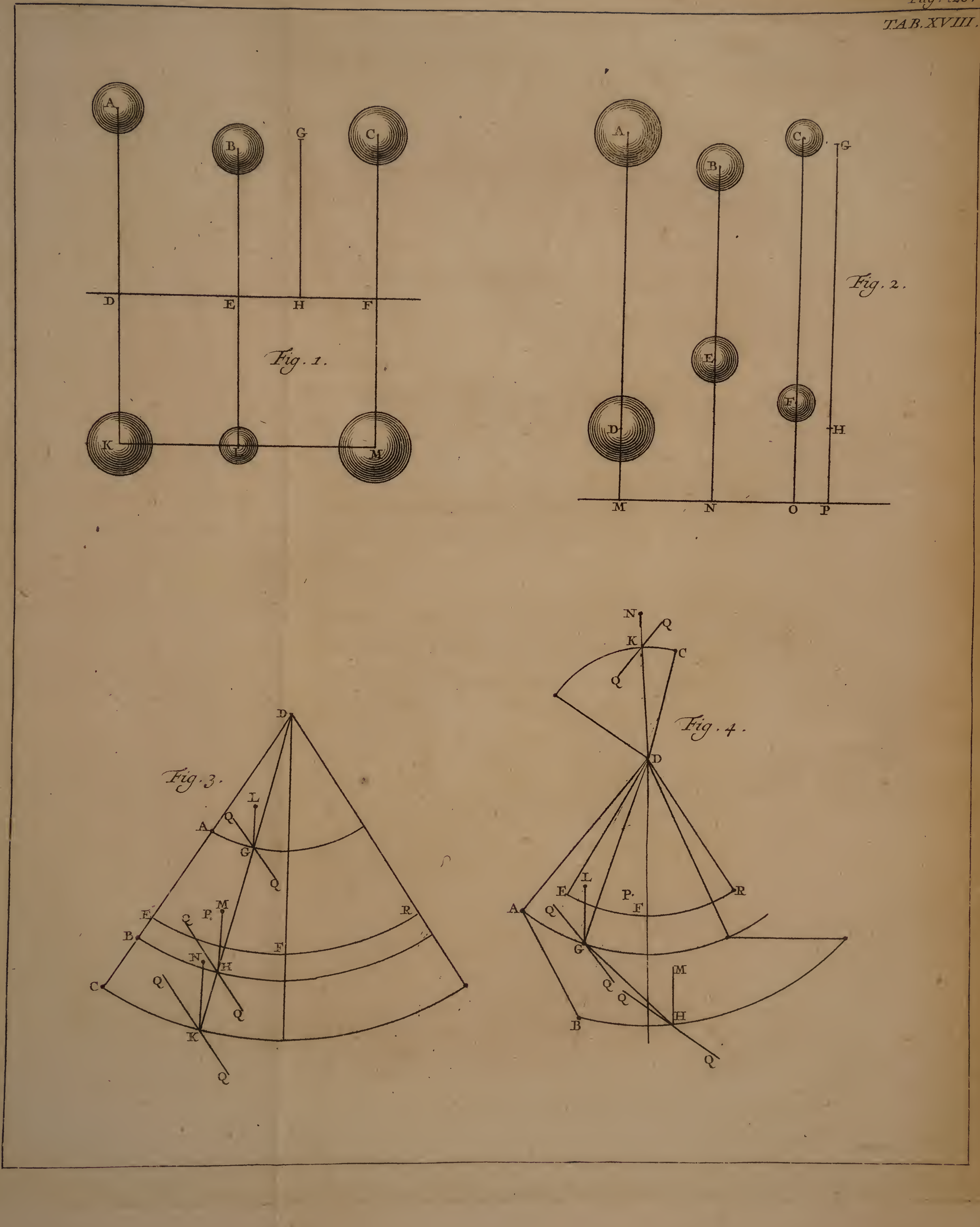
ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti.

Tab. XIX. Fig. 1.2. Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, ſed gravitas tantum conſideretur), A, B, C, ſuſpenſa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conſpicitur, rectus intelligitur. In quo plano ſit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diverſis eſſe nihil refert. Diſtantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur d. Item ponderis A diſtantia A D, ſit e; B D, f; C D, g. Ducendo itaque ſingula pondera in quadrata ſuarum diſtantiarum, erit productorum ſumma $aee + bff + cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + ca}$. Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis F G, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe.

* Prop. 1. huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimiſſa librari, & in recta D E ſumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oſcillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium ſecabit. punctum vero L arcum illi ſimilem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum E I. Quod ſi in arcubus G M, N L, ſumptis punctis quibuslibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P; conſtabit inde æqualibus temporibus utrosque

TAB. XVIII.


Fig. 1.
A B G C
D E H F
K L M
Fig. 2.
A B C G
E F D H
M N O P
Fig. 3.
D
L Q A G Q
E P. M B N H F R C Q Q K Q
Fig. 4.
N Q K C Q
D
L P. E F R A Q G
Q Q M H B Q

que arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtendetur autem hoc modo. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Conſtat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant ſubtenſis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur y. Unde, cum ſit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipſi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem P S. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſimiles arcus percurrunt ipſi L P, nimirum A T, B V, C X. Eſtque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, ſicut diſtantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quò hac celeritate aſcendi poteſt *. Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ D L, quod eſt $x\,x$, ad quadratum diſtantiæ D A, quod eſt $e\,e$, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quum eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam P S ſive y,) ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T; ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo, ſeorſim motum ſuum ſurſum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$. * Prop. 3. & 4. part. 2.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam aſcenderet pondus B, celeritate acquiſita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam aſcenderet pondus C, celeritate acquiſita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis ſingulis al-

R titu-

titudinibus iſtis in ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + gg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quousque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt RQ, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem.

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Unde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex F G compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum facto-

rum

rum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, applicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sint poſita eadem quæ prius, ſed pondera omnia inter ſe æqualia intelligantur, & ſingula dicantur *a*. Rurſus vero nulla eorum magnitudo conſideretur, ſed pro minimis habeantur, quantum ad extenſionem.

Itaque penduli ſimplicis iſochroni longitudo, per propoſitionem antecedentem, erit $\frac{aee+aff+agg}{ad+ad+ad}$. Vel, quia quantitas diviſa ac dividens utraque per *a* dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee+ff+gg}{3d}$. Quo ſignificatur ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ab axe oſcillationis, applicata ad diſtantiam centri gravitatis omnium ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum numerum ipſorum ponderum, qui hic eſt 3. facile enim perſpicitur numerum hunc, in quem ducitur diſtantia *d*, reſpondere neceſſario ipſi ponderum numero. Quare conſtat propoſitum.

Quod ſi pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta ſint, atque ex termino ejus ſuperiore ſuſpenſa; conſtat diſtantiam centri gravitatis, ex omnibus compoſitæ, ab axe oſcillationis, multiplicem ſecundum ponderum numerum, æquari ſummæ diſtantiarum omnium ponderum ab eodem oſcillationis axe*; ac proinde, hoc caſu, habebitur quoque longitudo penduli ſimplicis, compoſito iſochroni, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ſingulorum ab axe oſcillationis, dividatur per ſummam earundem omnium diſtantiarum.

* Prop. 2. huj.

De centro oscillationis.

DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipſam extrinſecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, ſuperficiemque quandam deſcribat, quæ deinde ſecetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; ſolidum comprehenſum à duobus planis iſtis, & parte ſuperficiei deſcriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus ſuper figura illa, tanquam baſi, abſciſſus.

Tab. XXI. Fig. 3. In ſchemate adjecto, eſt A B E C figura data; recta eam tangens M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F; cuneus autem figura ſolida planis A B E C, M F G, & parte ſuperficiei, à recta E F deſcriptæ, comprehenſa.

DEFINITIO XV.

DIſtantia inter rectam, per quam cuneus abſciſſus eſt, & punctum baſeos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

Tab. XIX. Fig. 3. Nempe in figura eadem, ſi K ſit centrum gravitatis cunei, recta vero K I ad baſin ejus A B E C perpendicularis ducta ſit, & rurſus I M perpendicularis ad M D; erit I M, quam ſubcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

CUneus ſuper plana figura qualibet abſciſſus, plano inclinato ad angulum ſemirectum, æqualis

lis eſt ſolido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem diſtantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abſciſſus eſt cuneus. De centro oscillationis.

Sit, ſuper figura plana A C B, cuneus A B D abſciſſus plano ad angulum ſemirectum inclinato, ac tranſeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano ſitam. Centrum vero gravitatis figuræ ſit F, unde in rectam E E ducta ſit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem eſſe ſolido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipſi F A æqualem. TAB. XIX. Fig. 4.

Intelligatur enim figura A C B diviſa in particulas minimas æquales quarum una G. Itaque conſtat, ſi harum ſingulæ ducantur in diſtantiam ſuam ab recta E E, ſummam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc eſt, ei quod fit ducendo figuram ipſam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ ſingulæ ut G, in diſtantias ſuas G H ductæ, æquales ſunt parallelepipedis, vel priſmatibus minimis, ſuper ipſas erectis, atque ad ſuperficiem obliquam A D terminatis, quale eſt G K; quia horum altitudines ipſis diſtantiis G H æquantur, propter angulum ſemirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipſe æquabitur ſolido ſuper baſi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO VIII.

SI figuram planam linea recta tangat, diviſaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à ſingulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, ſimul ſumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum; quod

De centro oscillationis.

nempe rectangulum ſit à diſtantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à ſubcentrica cunei, qui per illam ſuper figura abſcinditur.

TAB. XIX. Fig. 4.

Poſitis enim cæteris omnibus quæ in conſtructione præcedenti, ſit L A cunei A B D ſubcentrica in rectam E E. Oportet igitur oſtendere, ſummam quadratorum omnium à diſtantiis particularum figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici ſecundum particularum numerum.

Et conſtat quidem ex demonſtratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum ſingulorum, ut G K, æquales eſſe diſtantiis particularum, quæ ipſorum baſes ſunt, ut G, ab recta A E. Quare, ſi jam parallelepipedum G K ducamus in diſtantiam G H, perinde eſt ac ſi particula G ducatur in quadratum diſtantiæ G H. Eodemque modo ſe res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in diſtantias ſuas ab recta A E, æquantur ſimul producto ex cuneo A B D in diſtantiam L A*, quia cuneus gravitat ſuper puncto L. Ergo etiam ſumma productorum à particulis ſingulis G, in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc eſt, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis eſt producto ex figura A C B in rectam F A*. Rurſus quia figura A C B æqualis eſt producto ex particula una G, in numerum ipſarum particularum; ſequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici ſecundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta ſumma productorum, à particulis ſingulis G in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta A E, ſive à particula una G in ſummam omnium horum quadratorum. Quare, omiſſa utrinque multiplicatione in particulam G, neceſſe eſt ſummam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici ſecundum numerum particularum in quas figura A C B diviſa intelligitur. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel ſecet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis ſingulis minimis & æqualibus, in quas figura diviſa intelligitur; invenire ſummam quadratorum ab omnibus iſtis perpendicularibus; ſive planum, cujus multiplex, ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; diviſâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, ſicut à particula F ducta eſt F K. Oporteatque invenire ſummam quadratorum ab omnibus iſtis perpendicularibus. TAB. XIX. Fig. 5. 6.

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam poſita ſit. Poteſt autem figuram vel ab eadem parte ex qua eſt E D, vel à parte oppoſita contingere. Diſtantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L ſit recta G A, ſecans E D in E; & ſubcentrica cunei, ſuper figura abſciſſi plano per rectam A L, ſit H A. Dico ſummam quadratorum quæſitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus ſecundum particularum numerum, in quas figura diviſa intelligitur.

Occurrat enim F K, ſi opus eſt producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo caſu quo recta E D à figura diſtat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta eſt, ſic propoſitum oſtendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem inſuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia eſſe conſtat totidem rectangulis

E A G,

DE CENTRO OSCILLATIONIS. * Prop. 2. huj. * Prop. præced.

E A G, quia omnes F L æquales totidem G A *. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G*, hoc eſt, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque inſuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria iſta; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat oſtendendum.

TAB. XX. Fig. 1. 2.

Porro in reliquis omnibus caſibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc eſt, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum totidem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hiſce caſibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rurſus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare conſtat propoſitum.

Hinc ſequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine eſſe, utriusvis cunei ſubcentrica fuerit A H; hoc eſt, ſive per hanc, ſive per illam tangentium parallelarum A L abſciſſi. Itaque A G unius caſus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter ſe, ita in utroque caſu cunei per A L abſciſſi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

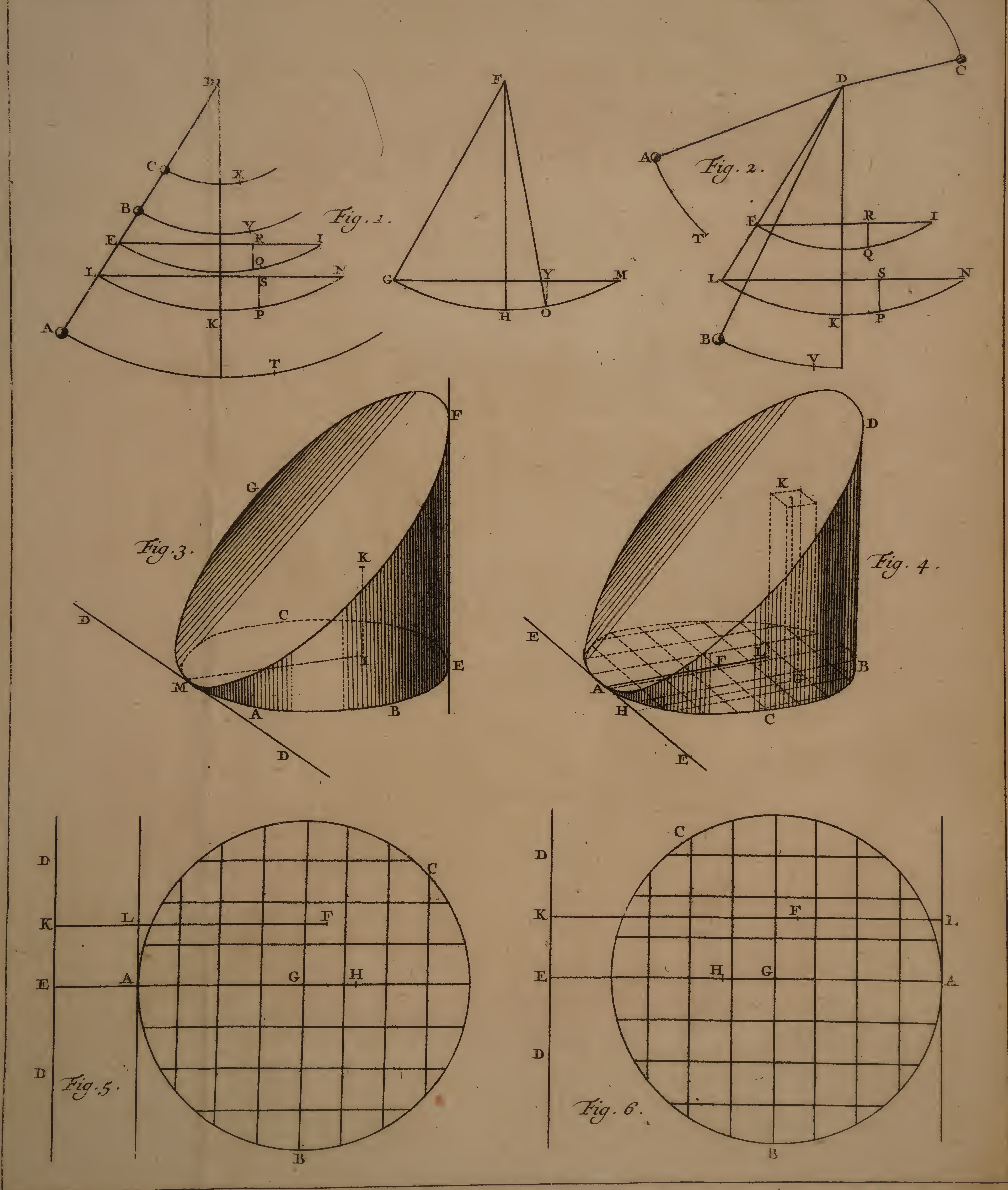
Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & ſubcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abſciſſi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abſciſſi, ſubcentricam.

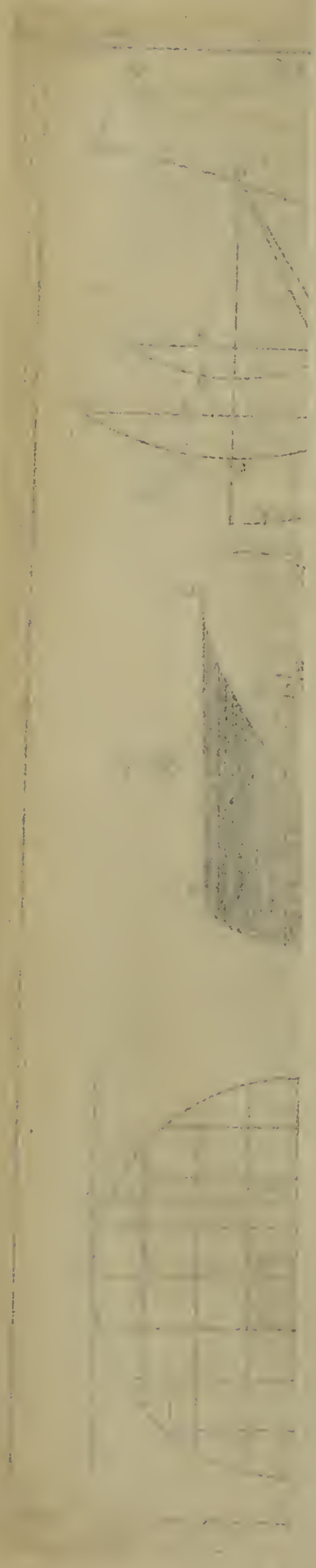
PROPOSITIO X.

TAB. XX. Fig. 3.

Poſitis quæ in propoſitione præcedenti; ſi data recta E D *transeat per* G, *centrum gravitatis*

TAB. XIX.





tis figuræ A B C; *erit ſumma quadratorum à diſtantiis particularum, in quas figura diviſa intelligitur, ab recta* E D, *æqualis rectangulo ſoli* A G H, *multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum.* De centro oscillationis.

Hoc enim manifeſtum eſt, quum nullum tunc ſit quadratum E G.

PROPOSITIO XI.

Poſitis rurſus cæteris ut in præcedentium penultima; ſi D E *ſit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales ſimileſque portiones eam dividens, ſitque inſuper* V G *diſtantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, ſuper ipſam abſciſſi per ipſam* E D, *ſubcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H. TAB. XX. Fig. 4.

Eſt enim rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejuſdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demiſſarum; hoc eſt, rectangulo A G H multiplici ſecundum eundem particularum numerum, ut conſtat ex propoſ. præcedenti. Unde ſequitur rectangula X G V, A G H inter ſe æqualia eſſe. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur;

ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano æqualis.

TAB. XX. Fig. 5. Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, ſive magnitudinum æqualium ab ipſis ſuſpenſarum, ſit E; & centro E deſcribatur circulus quilibet F f, in cujus circumferentia ſumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, ſimul ſumpta, æqualia eſſe plano cuidam dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F ſumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum conſtituentes, & quarum unicuique omnia data puncta ſint poſita ad eandem partem. Et à ſingulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipſam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipſam E R. Porro ſit jam

A L ∞ a	A K ∞ e	radius E F ∞ z
B M ∞ b	B O ∞ f	G S ∞ x
C N ∞ c	C P ∞ g	
D H ∞ d	D Q ∞ h	

Quia autem E eſt centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; ſi addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compoſitaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot ſunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R*. Similiterque, diviſâ in totidem partes ſummâ perpendicularium A K, B O, C P, D Q, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam G K, ſive ipſa R G*. Itaque, ſi ſumma omnium A L, B M, C N, D H, ſive $a + b + c + d$ vocetur l: ſumma vero omnium, A K, B O, C P, D Q, ſive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, dato-

* Prop. 2. huj.

* Prop. 2. huj.

datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ; erit E R $\infty \frac{l}{\theta}$; & R G $\infty \frac{m}{\theta}$. Cumque G S ſit x, erit R S ſive F T $\infty\ x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, ſi G R major quam G S; & ſemper quadratum F T $\infty\ xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato F E $\infty\ zz$, relinquetur quadratum T E $\infty\ zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde T E $\infty\ \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem E R $\infty \frac{l}{\theta}$. Itaque T R $\infty \frac{l}{\theta}$ + vel - $\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ T R, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro ſummam quadratorum omnium F A, F B, F C, F D. Quadratum A F æquatur quadratis A V, V F. Eſt autem A V æqualis differentiæ duarum V K, A K, ſive duarum S G, A K; ac proinde A V $\infty\ x - e$ vel $e - x$; & qu. A V $\infty\ xx - 2ex + ee$. V F vero æqualis eſt differentiæ duarum F S, V S ſive duarum F S, A L; ac proinde V F $\infty\ y - a$ vel $a - y$; & qu. V F $\infty\ yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis A V, V F, fit quadratum F A $\infty\ xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum F B, F C, F D; atque omnia ordine diſpoſita erunt hæc;

De centro oscillationis.

qu. F A $\infty\ xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. F B $\infty\ xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. F C $\infty\ xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. F D $\infty\ xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero ſumma; ſi ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \infty nn$; & quadrata $aa + bb, + cc + dd \infty kk$; erit iſta, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, poſitumque fuerat $e + f + g + h \infty m$, & $a + b + c + d \infty l$.

In iſta vero ſumma, ſi in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco poſitum erat, nempe $\frac{l}{\theta}$ + vel - $\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$

fiet $+ \theta yy \infty \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

S 2 &

De centro oscillationis.

$\& -2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} -2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}.$

vel $+\theta yy \infty \frac{ll}{\theta} -2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx$
$xm - \frac{mm}{\theta}.$

$+2\ \& -2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} +2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}.$

Ac proinde, utroque caſu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appoſitis reliquis quantitatibus, ſumma prædicta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, ſiet tota ſumma, nempe quadratorum F A, F B, F C, F D, $\infty\ \theta zz + nn + kk - \frac{mm - ll}{\theta}$. Quod apparet eſſe planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ ſint; ſemperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia ſumptum fuerit punctum F. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi puncta data diverſas gravitates habere ponantur, invicem commenſurabiles, ut ſi punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rurſus deſcribatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac ſingularum quadrata multiplicia ſumantur ſecundum numerum ponderis puncti ſui; ut quadratum A F duplum, B F triplum, C F quadruplum, D F ſeptuplum; dico rurſus ſummam omnium æqualem fore ſpatio dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum ſumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonſtratione, ſi imaginemur puncta ipſa multiplicia ſecundum numeros attributæ cuique gravitatis; quaſi nempe in A duo puncta conjuncta ſint, in B tria, in C quatuor, in D ſeptem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

SI figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt.

Sit

Sit figura plana, vel linea in plano exiſtens A B C, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano deſcribatur, E C F. Dico, ſi à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, ſuſpenſa figura agitetur in latus; ſibi ipſi, ſive eidem pendulo ſimplici, iſochronam eſſe. DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XX. Fig. 6.

Sit prima ſuſpenſio ex E puncto, quando autem eſt extra figuram, ut hic, putandum eſt lineam E H, ex qua figura pendet, rigidam eſſe, atque immobiliter ipſi affixam.

Intelligatur figura A B C diviſa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ ſint; quas quidem manifeſtum eſt, quum moveatur figura motu in latus, eſſe ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, diviſa per rectam E D, multiplicem ſecundum numerum particularum in quas figura diviſa eſt, efficiunt longitudinem penduli ſimplicis, figuræ iſochroni*, quæ ſit K L. * Prop. 6. huj.
Suſpensâ autem figurâ ex puncto G, rurſus longitudo penduli ſimplicis iſochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem ſecundum earundem particularum numerum*. Quum igitur puncta G & E ſint in circumferentia deſcripta cetnro D, quod eſt centrum gravitatis figuræ A B C, ſive centrum gravitatis punctorum omnium, quæ centra ſunt particularum figuræ æqualium; erit proinde ſumma quadratorum à lineis, qnæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis ſummæ quadratorum à lineis quæ ab iiſdem particulis ducuntur ad punctum E*. Hæ vero quadratorum ſummæ, utraque ſuſpenſione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in ſuſpenſione ex E, ad rectam E D, multiplicem ſecundum numerum omnium particularum; in ſuſpenſione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem ſecundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac poſteriori, quum nempe ſuſpenſio eſt ex G, fieri longitudinem penduli iſochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc eſt, eandem ipſi K L.

* Prop. 6. huj.

* Prop. præced.

 Eodem modo, ſi ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F, figura ſuſpendatur, eidem pendulo K L iſochrona eſſe probabitur. Itaque conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ ſolidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; diviſâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire ſummam omnium quæ ab ipſis fiunt quadratorum, ſive planum, cujus multiplex ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit.

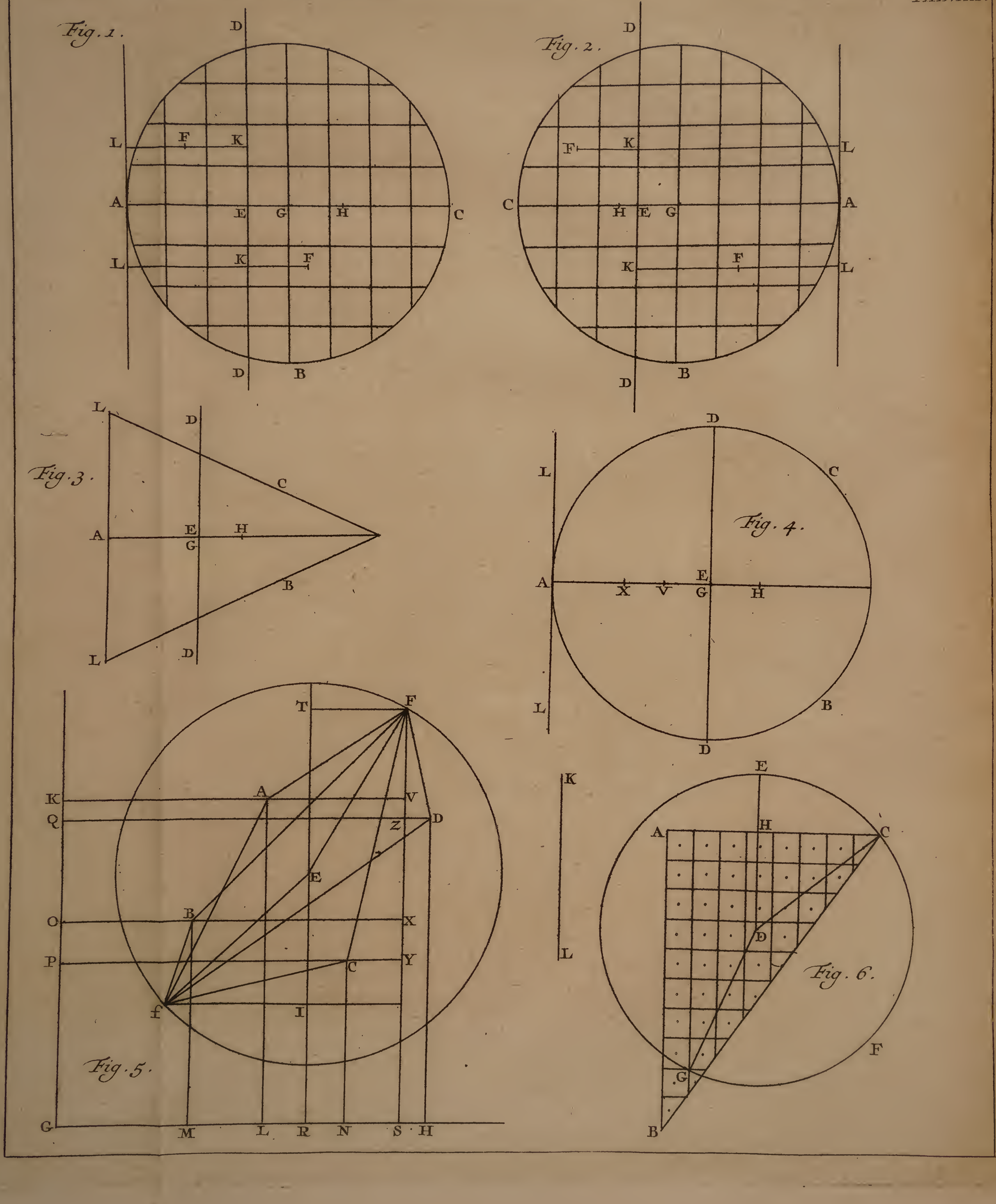
Tab. XXI. Fig. 1. Sit data figura ſolida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E tranſiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel ſecet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à ſingulis particulis minimis æqualibus, ſolidum A B C D conſtituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E ſummam invenire.

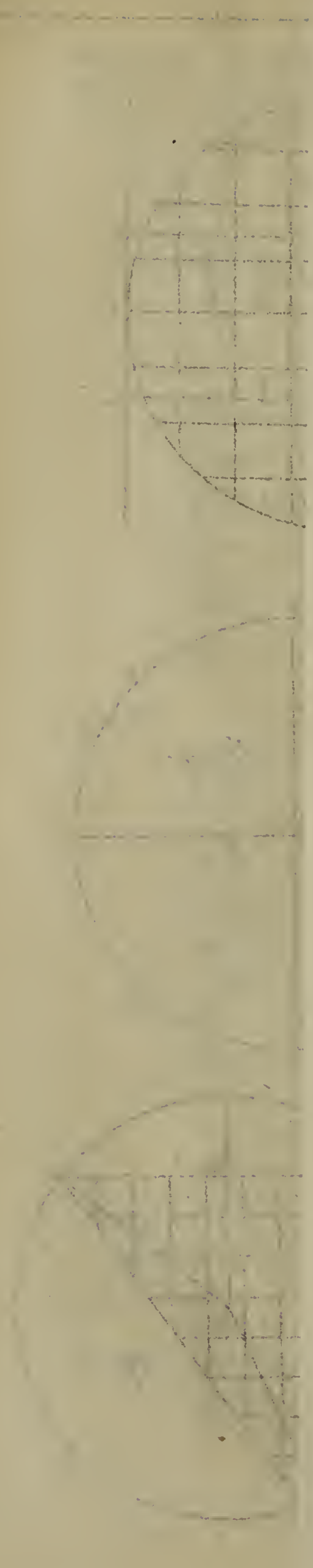
Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipſi eſt ad angulos rectos.

Conſtat jam, quadratum rectæ cujuſque, quæ à particula dictarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, ſicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, ſi cognoſcere poſſimus ſummam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis univerſis cadunt in plana dicta per E G & E C; habebimus etiam huic æqualem ſummam

* 47. lib. 1. Eucl.

TAB. XX.


Fig. 1.
D
L F K
A E G H C
L K F
D B
Fig. 2.
D
F K L
C H E G A
K F L
D B
Fig. 3.
L D
C
A E H
G
B
L D
Fig. 4.
D
L C
A X V E G H
L B
D
Fig. 5.
T F
K A V
Q Z D
E
O B X
P C Y
f I
G M L R N S H
Fig. 6.
E
K
A H C
D
L
G F
B



mam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab univerſis iiſdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

Illa vero prior quadratorum ſumma colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ ſolidæ A B C D, ejuſdem cum ipſa altitudinis, quæque ſit ejuſmodi, ut ſecta lineis rectis Q Q, R R, quæ reſpondeant planis figuram ſolidam A B C D ſecantibus M M, N N, & his parallelis; eadem ſit dictarum linearum inter ſe, quæ & planorum horum ratio, ſi nempe ſumantur utrinque quæ in ordine ſibi reſpondent. Ut ſi linea R R ſit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod ſi igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales diviſa intelligatur, quot intelliguntur in ſolido A B C D, erunt etiam in unoquoque ſegmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot ſunt in figuræ ſolidæ ſegmento M M N N, iſti ſegmento reſpondente; ac proinde & ſumma quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G; æquabitur ſummæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ ſolidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum ſumma data erit, ſi dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propoſ. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque ſumma quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus ſolidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejuſdem cum ſolido A B C D latitudinis, hoc eſt, quam includant plana B Y, D Z ſolidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque ſit ejuſmodi, ut, ſecta lineis rectis V V, X X &c. quæ reſpondeant planis figuram A B C D ſecantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter ſe rationem linearum harum atque illorum planorum, ſi ſumantur quæ ſibi mutuo reſpondent. Itaque rurſus quadrata ſimul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis ſolidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum

rum autem ſumma quadratorum data erit, ſi detur diſtantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z; nec non diſtantia indidem centri gravitatis cunei ſui abſciſſi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata exiſtente, ut S T ſit axis ejus, eadem quadratorum ſumma dabitur, ſi detur diſtantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, ſuper eadem dimidia figura, abſciſſi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque ſumma quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus ſolidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & ſummam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriuſque ſummæ habebitur, hoc eſt, per ſuperius oſtenſa, ſumma quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus ſolidi A B C D, cadunt in rectam datam per E tranſeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XV.

Tab. XXI. Fig. 1. & 2.

Iisdem poſitis, ſi ſolidum A B C D *ſit ejuſmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipſi proportionalis, non habeat notam diſtantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eaſdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere eſt,* O Q P, *detur diſtantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abeſt ab axe* O P; *licebit hinc invenire ſummam quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut ſectiones omnes,* N N, M M, *ſint plana ſimilia; utque per omnium centra gravitatis tranſeat planum* E C; *quemadmodum in priſmate, pyramide, cono, conoidibus, multiſque aliis figu-*

ris

ris contingit. Atque eorum planorum diſtantias centri gravitatis, ſuper tangentibus, axi oſcillationis parallelis, datas eſſe neceſſe eſt; uti & ſubcentricas cuneorum, qui ſuper ipſis abſcinduntur, ductis planis per eaſdem tangentes.

De centro oscillationis.

Veluti, ſi maxima dictarum ſectionum ſit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc eſt, erecta ad planum quod hic conſpicitur, oportet datam eſſe diſtantiam centri gr. ſectionis B D à dicta linea in B, quæ ſit B C; itemque ſubcentricam cunei, ſuper ſectione B D abſciſſi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ ſubcentrica ſit B K. Fig. 2.

Etenim his datis, diviſâque P V bifariam in Δ, ſi fiat ſicut Δ P ad P Φ, ita rectangulum B C K ad ſpatium quoddam Z; dico hoc ipſum, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum, à diſtantiis earundem particularum à plano E C.

Quadrata enim à diſtantiis particularum planæ ſectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis ſuæ tranſit; ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti B N N D à plano eodem, æquari conſtat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, ſi planæ ſectionis N N diſtantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, ſit N X; ſubcentrica vero cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eandem rectam, ſit N F; erunt quadrata à diſtantiis particularum planarum ſectionis N N à plano E C, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipſarum ſectionis N N, vel ſegmenti N M M N. Eſt autem B D diviſa ſimiliter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, ſicut quadratum B D ad quadratum N N.

* Prop. 10 huj.

Eſt autem & numerus particularum ſectionis B D, ad numerum particularum ſectionis N N, ſicut ſectiones ipſæ;

T hoc

hoc eſt, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum ſectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum ſectionis N N, duplicatam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc eſt, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti B N N D à plano E C, ad ſummam alteram quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione oſtendetur, ſummas quadratorum à diſtantiis partilarum in reliquis ſegmentis ſolidi A B C D, eſſe inter ſe in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ baſi cujusque ſegmenti reſpondent. Quare ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum omnium ſegmentorum ſolidi A B C D à plano E C, erit ad ſummam quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmentorum totidem, maximo ſegmento æqualium, hoc eſt, cylindri vel prismatis B D S S, eandem cum ſolido A B C D baſin altitudinemque habentis, ſicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc eſt, ſicut ſolidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui baſin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem ſolidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi conſtat ex ratione planorum quorum converſione generantur, hoc eſt, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe O P; hoc eſt, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem eſt quæ ſolidi A B C D ad cylindrum vel prisma B D S S, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum

larum ſolidi A B C D à plano E C, ad ſummam quadratorum, à diſtantiis omnium particularum cylindri vel prismatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, & ex ratione ſpatii Z ad rectangulum B C K: hoc eſt, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis eſt ſecundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, æquale ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri B D S S à plano E C; ſiquidem rectangulum idem B C K, multiplex per numerum particularum ſegmenti B N N D, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejusdem ſegmenti à plano E C *. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ſolidi ejusdem A B C D à plano E C *. quod erat demonſtrandum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 10. huj.

* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando ſolidum A B D rotundum eſt circa axem A C, fieri ſemper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Unde, ſi P V æqualis poſita ſit B C, ſequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc eſt, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum Δ P Φ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi A B D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum E C.

De centro oscillationis.

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt.

TAB. XXI. Fig. 3.

Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, ſitque primo ſuſpenſa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oſcillationis. In quo ſi centro E, radio E F, deſcribatur circumferentia F H G, ſumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo ſecundò ſuſpendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oſcillationis plano. Dico iſochronam fore ſibi ipſi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo propoſita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa ſuſpenſione idem manet oſcillationis planum, reſpectu partium magnitudinis; manifeſtum eſt, ſi ab omnibus particulis, in quas diviſa eſt magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oſcillationis planum, illas utraque ſuſpenſione occurrere ipſi in punctis iiſdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in ſpatio A B C D.

Quum igitur E ſit centrum gravitatis magnitudinis propoſitæ, ipſaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus eſt ad planum A B C D, quovis ſitu æquilibrium ſervet; facile perſpicitur, quod ſi punctis omnibus ante dictis, quæ in ſpatio A B C D ſignantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum eſt punctum E. Quod ſi vero, ut fieri poteſt, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quaſi toties geminata intelligenda ſunt, gravitateſque toties multiplices accipiendæ. Atque ita conſideratorum, patet rurſus centrum gravitatis eſſe E punctum.

Porrò

Porrò ſummam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem eſſe patet cum ſumma quadratorum ab iis rectis, quæ à ſingulis particulis magnitudinis propoſitæ ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipſæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum ſuſpenſio eſt ex axe per H, patet ſummam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in ſpatio A B C D ſignatis, ducuntur ad punctum H, eandem eſſe cum ſumma quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propoſitæ, ducuntur perpendiculares in axem oſcillationis per H transeuntem. Ergo utroque caſu, ſi ſumma quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices ſecundum numerum particularum in quas magnitudo propoſita diviſa intelligitur; orietur ex applicatione hac longitudo penduli ſimplicis, quod magnitudini ſuſpenſæ ex F vel H iſochronum ſit. Eſt autem ſumma quadratorum utroque caſu æqualis *; & rectæ quoque E F, E H, inter ſe æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales ſint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc eſt, longitudines pendulorum iſochronorum magnitudini propoſitæ ſuſpenſæ ex F vel ex H. Quare conſtat propoſitum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 12. huj.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas ſuſpenſa figura diviſa intelligitur, æquetur quadratis omnium diſtantiarum ab axe oſcillationis; ſi illud applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter axem oſcillationis & centrum gravitatis ſuſpenſæ magnitudinis, orietur longitudo penduli ſimplicis ipſi iſochroni.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

TAB. XXII. Fig. 1.

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E, ſuſpenſa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conſpicitur, erectus ſit. Ponendoque diviſam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: eſto, per ſuperius oſtenſa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc eſſe longitudinem penduli ſimplicis, iſochronas oſcillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

Quia enim ſumma quadratorum, à diſtantiis ab axe F, applicata ad diſtantiam F E, multiplicem ſecundum partium numerum, facit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni*. Iſti vero quadratorum ſummæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, ſi applicetur ad diſtantiam F E, multiplicem ſecundum particularum numerum; ſive, omiſſa communi multiplicitate, ſi planum H applicetur ad diſtantiam F E; orietur quoque longitudo penduli ſimplicis iſochroni. Quam proinde ipſam longitudinem F G eſſe conſtat. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 6. huj.

PROPOSITIO XVIII.

SI ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis.

TAB. XXII. Fig. 2.

Eſto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæ-

quæque ſuſpenſa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oſcillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, parallelus. Diviſaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, ſit quadratis diſtantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe ſecundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad diſtantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem eſſe intervallo E G, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis magnitudinis A B C D. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Ut enim univerſali demonſtratione quod propoſitum eſt comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adpoſita, O Q P; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine A B C D, habeat ſegmenta intercepta inter bina quæque plana, in eadem inter ſe ratione cum ſegmentis dictæ magnitudinis, quæ ipſis reſpondent; ſintque ſegmenta ſingula figuræ O Q P, diviſa in tot particulas æquales, quot continentur ſegmentis ipſis reſpondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi poſſunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, ſive linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod ſit T, eadem altitudine eſſe manifeſtum eſt cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, ſi planum horizontale, per F ductum, ſecet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales eſſe diſtantias S T, F E.

Porrò autem conſtat quadrata diſtantiarum, ab axe oſcillationis F, applicata ad diſtantiam F E, multiplicem ſecundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli iſochroni*; quæ longitudo poſita fuit F G. Illorum vero quadratorum ſummam, æqualem eſſe perſpicuum eſt, quadratis diſtantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis diſtantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto*. Atqui quadrata diſtantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis diſtantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

qua-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. quadrata (ſi O ſit punctum ſupremum figuræ O Q P, & O H ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia ſunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus ſecundum numerum particularum dictæ figuræ *, ſive magnitudinis A B C D. Quadrata vero diſtantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcunque axis oſcillationis F diſtet à centro gravitatis E, ſemper eadem ſunt: quæ proinde putemus æquari ſpatio Z, multiplici ſecundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata diſtantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oſcillationis F, æquantur iſtis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; ſi applicentur hæc omnia ad diſtantiam F E ſive S T, orietur longitudo F G penduli iſochroni magnitudini A B C D*. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus ſuum S T, orietur ipſa S T, ſive F E. Ergo reliqua E G eſt ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare ſupereſt ut demonſtremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim conſtabit, etiam planum I, applicatum ad diſtantiam F E, efficere longitudinem ipſi E G æqualem. Illud autem ſic oſtendetur. Rectangulum O T H, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ O Q P, ſive magnitudinis A B C D, æquatur quadratis diſtantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipſi S F parallela; ac proinde etiam quadratis diſtantiarum magnitudinis A B C D, à plano horizontali K K, ducto per centrum grâvitatis E; cum diſtantiæ utrobique ſint eædem. At vero planum Z, ſimiliter multiplex, æquale poſitum fuit quadratis diſtantiarum magnitudinis A B C D à plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc diſtantiarum à plano F E, una cum dictis quadratis diſtantiarum à plano horizontali per E, æqualia eſſe quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis per E, qui

* Prop. 10. huj.

qui ſit axi F parallelus *. Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia ſecundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis diſtantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex ſecundum eundem particularum numerum, æquale poſitum fuit iisdem diſtantiarum quadratis. Ergo planum I æquale eſt rectangulo O T H & plano Z ſimul ſumptis, quod oſtendendum ſupererat.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rurſus manifeſtum fit, quod propoſitione 16 demonſtratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, ſi aliter atque aliter ſuſpendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis ſuæ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochronam eſſe.

Sive enim magnitudo A B C D ſuſpendatur ab axe F, ſive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique eſſe quadrata diſtantiarum ab axe per E, qui ſit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, ſecundum numerum particularum, æquatur quadratorum ſummæ, utroque caſu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad diſtantiam centri gravitatis ab axe oſcillationis, quæ utroque caſu eadem ponitur, efficit diſtantiam qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis; Ergo etiam hæc diſtantia utroque caſu eadem erit. Velut ſi, facta ſuſpenſione ex L, fuerit dicta diſtantia E Y, erit ipſa æqualis E G; & tota Y L æqualis G F; adeoque, in ſuſpenſione utraque, idem pendulum ſimplex iſochronum fit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

SI magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius ſuſpenſa, agitetur; erunt, ſicut diſtantiæ axium oſcillationis à centro gravitatis inter ſe, ita contraria ratione diſtantiæ centrorum oſcillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, ſuſpenſa pri- TAB. XXII. Fig. 3.

V mum

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

mum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; ſitque in prima ſuſpenſione centrum oſcillationis D, in poſteriori vero centrum oſcillationis E. Dico eſſe ut B A ad C A ita E A ad D A.

Quum enim, in ſuſpenſione ex B, efficiatur diſtantia A D, qua nempe centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis, applicando ad diſtantiam B A ſpatium quoddam, cujus multiplex ſecundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo diviſa intelligitur, æquatur quadratis diſtantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto ſpatio æquale. Item, in ſuſpenſione ex C, quum fiat diſtantia A E, applicando idem dictum ſpatium ad diſtantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem ſpatio æquale. Itaque æqualia inter ſe rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonſtrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo ſimplici, quod magnitudini ſuſpenſæ iſochronum ſit in una ſuſpenſione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni ſuſpenſione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oſcillationis, longitudinem penduli iſochroni datam eſſe.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oſcillationis & punctum ſuſpenſionis inter ſe convertuntur.

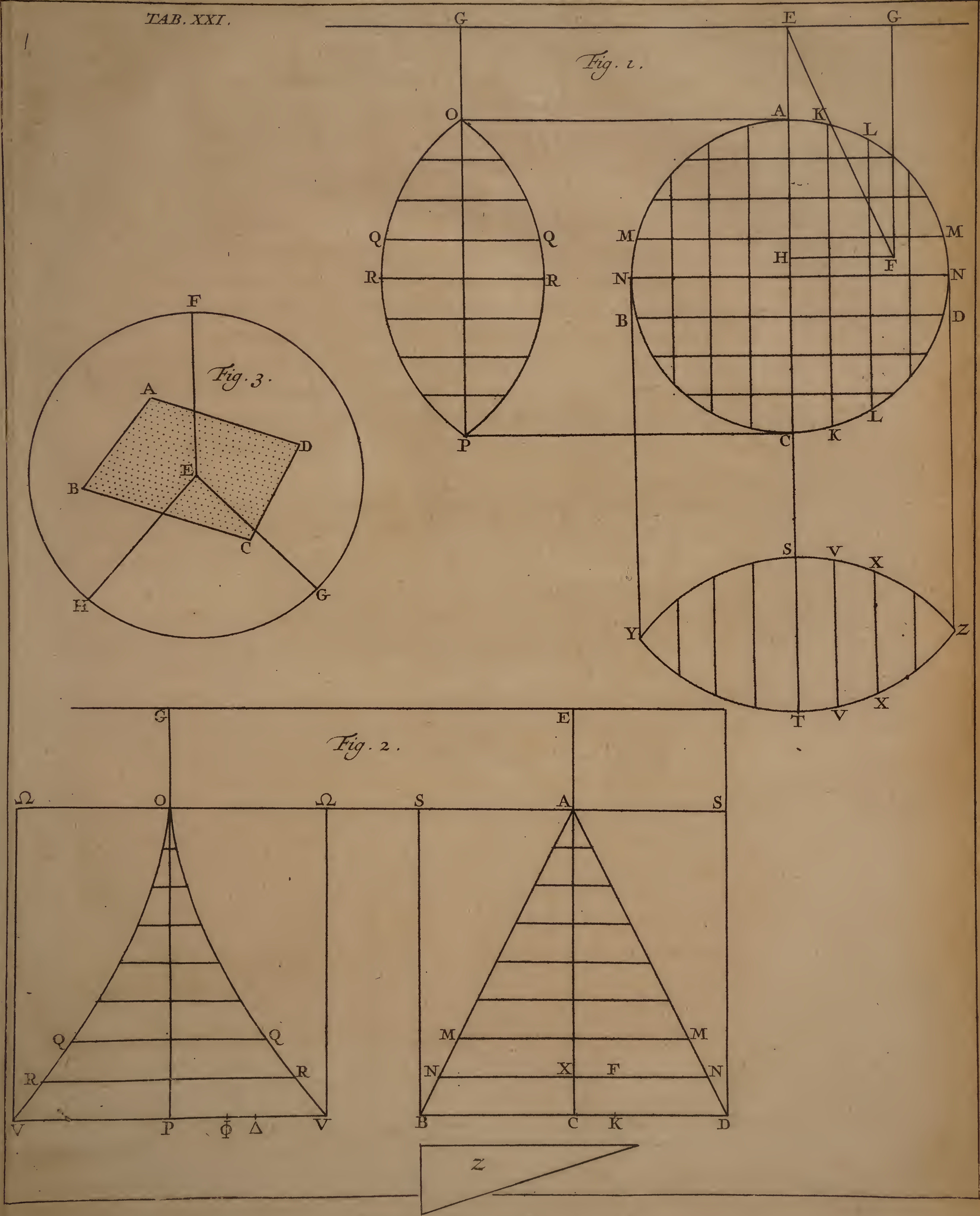
TAB. XXII. Fig. 3.

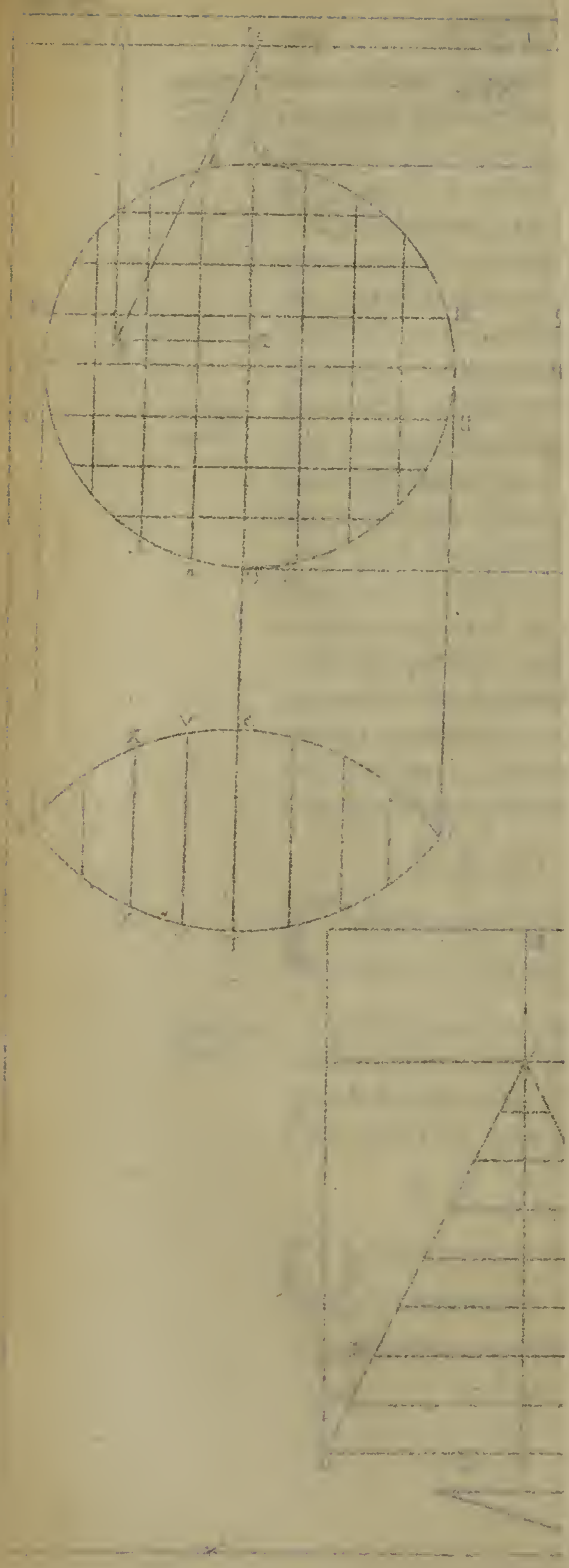
In figura ſuperiori, quia, poſita ſuſpenſione ex B, centrum oſcillationis eſt D; etiam invertendo omnia, ponendoque ſuſpenſionem ex D, erit tunc centrum oſcillationis B. Hoc enim ex ipſa propoſitione præcedenti manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oſcillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonſtrata ſunt, facile jam erit in


Fig. 1.
G E G
O A K L
Q Q M M
H F
R R N N
B D
L
P C K
S V X
Y Z
X
T V
Fig. 3.
F
A
D
E
B
C
H G
Fig. 2.
G E
Ω O Ω S A S
Q Q M M
R R N X F N
V P Φ Δ V B C K D
Z



in pleriſque figuris, quæ in Geometria conſiderari conſueverunt, definire oſcillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oſcillationis motum ſupra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus ſit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod ſi priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, ſicut figura B C D circa axem E F; hic, ſi cuneus ſuper figura intelligatur abſciſſus, plano quod ita ſecet planum figuræ, ut interſectio, quæ hic eſt D D, ſit parallela oſcillationis axi; deturque diſtantia centri gravitatis figuræ ab hac interſectione, ut hic A D; itemque ſubcentrica cunei dicti ſuper eadem interſectione, quæ hic ſit D H. Habebitur centrum oſcillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad diſtantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis. Eſt enim rectangulum D A H, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis diſtantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravitatis A parallela ducitur axi oſcillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad diſtantiam F A, orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *. TAB. XXII. Fig. 4. & 5. * Prop. 16. huj. * Prop. 18. huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit D D, fieri centrum oſcillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli ſimplicis iſochroni figuræ B C D, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per D D, ſuper ipſam D D. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura B C D ſit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit D H ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pen-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. dulo longitudinis ſubſeſquialteræ. Conſiderando nempe lineam ejuſmodi, ac ſi eſſet rectangulum minimæ latitudinis.

Quod ſi figura triangulum fuerit, vertice ſurſum converſo, ſit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorſum, $\frac{1}{2}$ diametri.

Quod autem propoſitione 16. demonſtratum fuit, id ad hujuſmodi figuræ planæ motum ita pertinere ſciendum. Nempe, ſi aliam atque aliam poſitionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli iſochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propoſitione illa manifeſtum eſt.

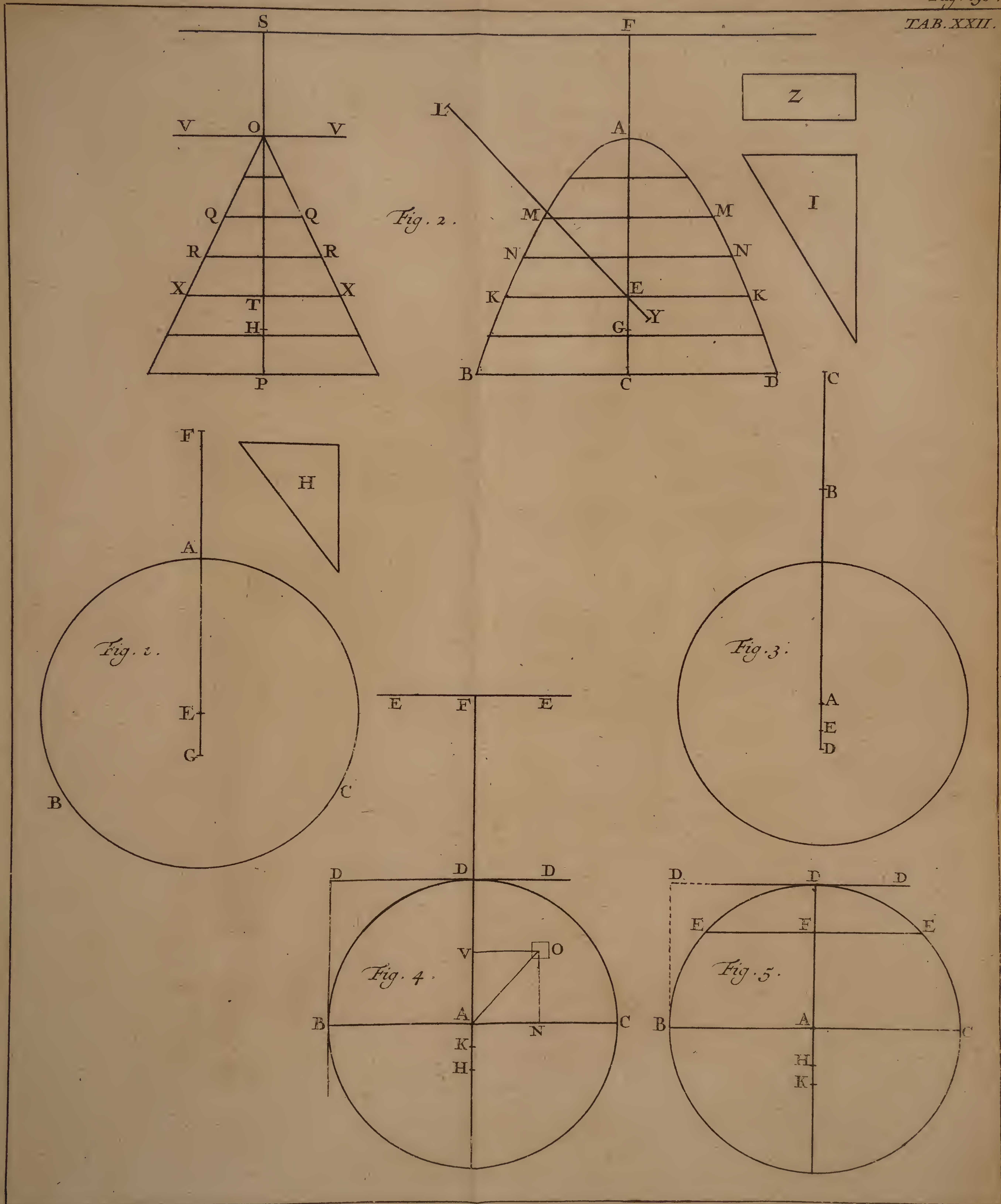
TAB. XXIII. Fig. 1. & 2. Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut ſi figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam habenda eſt ſumma quadratorum a diſtantiis particularum omnium ab recta, quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oſcillationis parallela; ſecundum ea quæ prop. 18. expoſita fuere. Hoc eſt ſumma quadratorum a diſtantiis ab ipſo A centro gravitatis, quoniam figura plana eſt. Sive etiam ſummæ quadratorum a diſtantiis tam ab recta B A C quam ab recta D A. Conſtat enim quadratum rectæ O A, quam pono eſſe diſtantiam unius cujuſdam particulæ a centro A, æquari quadratis diſtantiarum O N, O V, quibus eadem particula abeſt a rectis B A C, D A *. Atqui ſumma quadratorum a diſtantiis ab recta B A C æquatur rectangulo D A H, ſi D H ſit ſubcentrica cunei ſuper figura abſciſſi per tangentem D D, parallelam B A *. item ſumma quadratorum a diſtantiis ab recta D A æquatur rectangulo B A L, ſi B L ſit ſubcentrica cunei abſciſſi per tangentem B D parallelam A D. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, ſubcentricamque H D cunei prioris, etiam ſubcentricam L B cunei poſterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ ſimul ſumpta faciunt hic ſpatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oſcillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad diſtantiam

* Per 47. lib. 1. Elem.

* Prop. 10. huj.

F A,

TAB. XXII.


S
F
Z
V
O
V
L
A
I
Q
Q
Fig. 2.
M
M
R
R
N
N
X
X
K
E
K
T
Y
H
G
B
C
D
P
C
F
H
B
A
Fig. 1.
Fig. 3.
E
A
E
F
E
E
E
G
D
C
B
D
D
D
D
D
D
E
F
E
V
O
Fig. 4.
Fig. 5.
B
A
C
B
A
C
N
K
H
H
K

F A, dabit diſtantiam A K, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A. De centro oſcillationis.

Si vero F A ſit axis figuræ B C D, poteſt, pro cuneo abſciſſo per B D ſuper figura tota, adhiberi cuneus ſuper figura dimidia D B M abſciſſus plano per D M. Nam, ſi cunei hujus ſubcentrica ſuper D M ſit O A, diſtantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M ſit N A, æquale eſſe conſtat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, conſtituet quoque planum applicandum ad diſtantiam F A, ut fiat diſtantia A K. TAB. XXIII. Fig. 1. * Prop. 11. huj.

Et horum quidem manifeſta eſt demonſtratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia ſecundum numerum particularum figuræ, æqualia ſint quadratis diſtantiarum à centro gravitatis A; ſive, quod idem hic eſt, ab axe gravitatis axi oſcillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad diſtantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter ſe æqualia eſſe liquet, ſimulque efficere ſemiſſem quadrati à ſemidiametro. Unde, ſi fiat ut F A ad ſemidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit diſtantia A K, à centro gravitatis ad centrum oſcillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia ſumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in ſequentibus figuris planis centra oſcillationis quæſivimus, quæ ſimpliciter adſcripſiſſe ſufficiet. Nempe,

Centrum oſcillationis Rectanguli.

In rectangulo omni, ut C B, ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio A C. Unde ſequitur, ſi rectangulum TAB. XXIII. Fig. 3.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ab aliquo angulorum ſuſpendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi iſochronum eſſe $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oſcillationis Trianguli iſoſcelis.

TAB. XXIII. Fig. 4.

In triangulo iſoſcele, cujuſmodi C B D, ſpatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigeſimæ quartæ quadrati baſeos C D. Unde, ſi ab angulo baſeos ducatur D G, perpendicularis ſuper latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; ſitque A centrum gravitatis trianguli; diviſoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipſi B A; erit B K longitudo penduli iſochroni, ſi triangulum ſuſpendatur ex vetrice B. Cum autem ex puncto mediæ baſis E ſuſpenditur, longitudo penduli iſochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum iſoſceles rectangulum, ſi ex puncto mediæ baſis ſuſpendatur, iſochronum eſſe pendulo longitudinem diametro ſuæ æqualem habenti. Similiterque, ſi ſuſpendatur ab angulo ſuo recto, eidem pendulo iſochronum eſſe.

Centrum oſcillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, ſpatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ baſis. Cumque parabola ex verticis puncto ſuſpenſa eſt, invenitur penduli iſochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque inſuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ baſis ſuſpenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & inſuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oſcillationis Sectoris circuli.

TAB. XXIII. Fig. 5.

In circuli ſectore B C D, ſi radius B C vocetur r: ſemi arcus C F, p: ſemiſubtenſa C E, b: fit ſpatium applicandum æquale $\frac{1}{2} rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc eſt, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo A eſſe centrum gravitatis ſectoris. Tunc enim B A ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem ſuſpendatur ſector

ex

ex B, centro circuli ſui, fit pendulum ipſi iſochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc eſt, trium quartarum rectæ, quæ ſit ad radium B F ut arcus C F D ad ſubtenſam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis ſubcentricis cuneorum; tum illius qui ſuper ſectore toto abſcinditur, plano ducto per B K parallelam ſubtenſæ C D, cujus cunei ſubcentricam ſuper B K invenimus eſſe $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a ſinum verſum E F; tum illius qui ſuper dimidio ſectore B F C abſcinditur plano per B F, cujus nempe cunei ſubcentricam ſuper B F invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sed & alia via, ſectoris centrum oſcillationis, facilius invenitur, quæ eſt hujusmodi. Intelligatur ſectoris B C D pars minima ſector B C P, qui trianguli loco haberi poteſt. Quadrata autem, à diſtantiis particularum ejus à puncto B, æqualia ſunt quadratis diſtantiarum ab recta B R, biſariam ſectorem dividente, una cum quadratis diſtantiarum ab recta B Q, quæ ipſi B R eſt ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data eſt major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda ſunt. TAB. XXIII. Fig. 6.

Poſitâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc eſt, poſito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R: ut nempe N ſit centrum gravitatis cunei, ſuper triangulo B C P abſciſſi plano per B Q. His poſitis, conſtat quadrata, à diſtantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici ſecundum particularum ejuſdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale cenſendum quadratis diſtantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata diſtantiarum harum, ad quadrata diſtantiarum totius ſectoris B C D, ſicut ſector B C P ad ſectorem B C D, hoc eſt, ſicut numerus particularum ſectoris B C P, ad numerum particularum ſectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod ſector B C D dividatur in ſectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex ſecundum nume-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. numerum particularum ſectoris B C D, æquale erit quadratis diſtantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, diſtantiam inter ſuſpenſionem & centrum gravitatis ſectoris, dabit longitudinem penduli iſochroni, cum ſector ex B ſuſpenditur *. Eſt autem rectangulum N B O ∞ $\frac{1}{2} rr$: diſtantia autem B A, ut jam ante diximus, ∞ $\frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli iſochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Prop. 17. huj.

Centrum oſcillationis Circuli, aliter quam ſupra.

TAB. XXIV. Fig. 1.

Eodem modo etiam ſimpliciſſime, in circulo, centrum oſcillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; ſectorque in eo minimus intelligatur B C P, ſicut ante in ſectore B C D.

Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.

Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B *. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus.

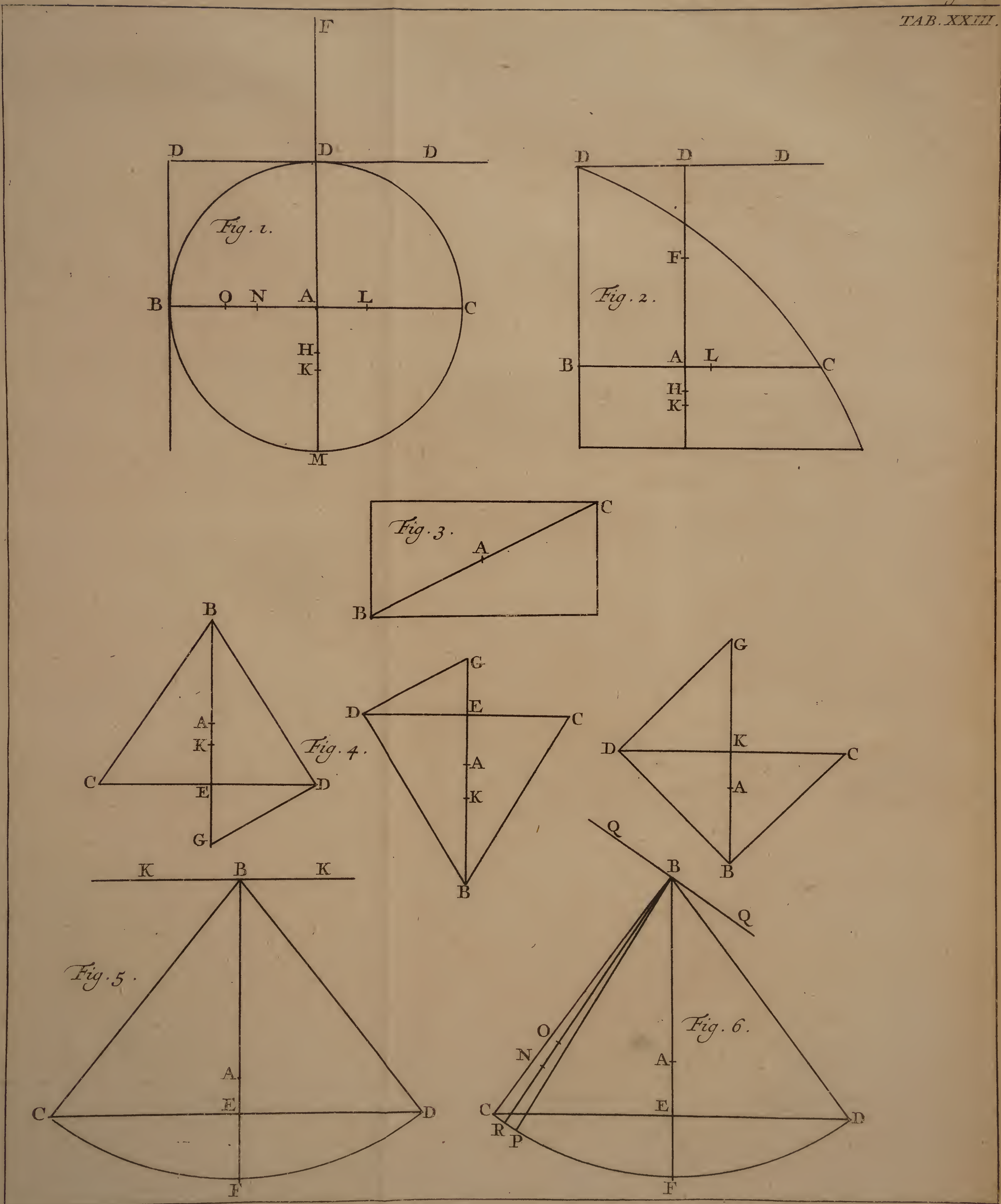
* Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.

TAB. XXIV. Fig. 2.

Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc pacto reperitur. Eſto enim circumferentia deſcripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex ſecundum numerum particularum in quas circumferentia diviſa intelligitur, æquatur quadratis à diſtantiis omnium

earum


TAB. XXIII.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic ſpatium applicandum*. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro G F. DE CENTRO OSCILLATIONIS. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum iſochronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris. TAB. XXIV. Fig. 3.

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis A B. TAB. XXIV. Fig. 4.

Ponatur A B ∞ a, ductâque C D, quæ ſecet A B ad angulos rectos in E, ſit A E indeterminata ∞ x: E C vel E D ∞ y. Ergo quadratum A C ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe ſuſpenſionis A. Ergo quadratum A C, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam A E, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni*; quam propterea oportet æqualem eſſe A B ſive a. Itaque $\frac{xx+yy}{x}$ ∞ a. Et yy ∞ $ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cu- * Prop. 17. huj.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. jus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $\infty \frac{1}{2} a$, ſive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A diſtantia, ponentur, ea, ex A agitata, iſochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifeſtum quoque, & circumferentiam A C B D, ſi gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B diviſam, & ab axe per A ſuſpenſam, eidem pendulo A B iſochronam eſſe.

TAB. XXIV. Fig. 5. Loci vero ſolidi exemplum eſto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis ſine pondere. Propoſitumque ſit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipſi ad angulos rectos lineam, ſeu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam diviſam, cujus in latus agitatæ oſcillationes, ex ſuſpenſione A, iſochronæ ſint pendulo ſimplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & ſit O R æqualis $\frac{2}{3}$ O L. Itaque cunei ſuper recta O L, abſciſſi plano per O H ducto, ſubcentrica erit O R. Sed cunei alterius ſuper eadem O L, abſciſſi plano per rectam A H, (eſt autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) ſubcentrica erit ipſa A M. Quare rectangulum illud, quod ſupra Oſcillationis vocavimus, erit ſolum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit diſtantiam centri oſcillationis lineæ O L, ex A ſuſpenſæ, infra punctum M.

Sit jam A N ∞a: A M ∞x: M O vel M L ∞y. Eſt ergo rectangulum O M R $\infty \frac{1}{3} yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipſi M N æqualis eſſe debebit, cum velimus centrum oſcillationis virgæ O L eſſe in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Unde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod ſignificat puncta O & L eſſe ad Ellipſin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, ſecundum quod poſſunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipſius A N triplum.

Hinc vero manifeſtum fit, cum omnis virga ipſi O L parallela, & ad Ellipſin hanc terminata, oſcillationes iſochronas

nas habeat pendulo ſimplici A N, etiam totum Ellipſeos planum, ex A ſuſpenſum & in latus agitatum, ipſi A N pendulo iſochronum fore. Sed & partem Ellipſeos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abſcindetur. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Cæterum adſcribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

Sit virga A B ponderis expers, ſuſpenſa ex A; oporteatque, ad datum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, ſive infinite parvi exiſtimandi, quæque, ita ſuſpenſa ab A, oſcillationes iſochronas faciant pendulo ſimplici datæ longitudinis A L. TAB. XXIV. Fig. 6.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo A B ∞ a; A L ∞ b; B G ∞ x; C G ∞ y: invenitur æquatio $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, baſes triangulorum C, & D, quæ baſes hic ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus ſimplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod ſi a ſit nihilo æqualis, hoc eſt, ſi punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, ſit idem cum puncto A; tum futura ſit æquatio $y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc caſu, ſi ſumatur A O ∞ $\frac{2}{3}b$, hoc eſt, ∞ $\frac{2}{3}$ A L, centroque O per A circulus deſcribatur A D N; erunt baſes triangulorum A C, A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D conſtituuntur, magnitudine & ſitu ſibi reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ A L ∞ $\frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejuſmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifeſtum eſt, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oſcillationis eſſe in L. TAB. XXV. Fig. 1.

Rurſus, ſi in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, ſeu TAB. XXV. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. $2a \infty b$; hoc eſt, ſi triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L ſecet bifariam, erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod ſi centro B, radio qui poſſit duplum B A, circumferentia deſcribatur, ea erit locus baſium triangulorum acutiſſimorum B C, B D, quorum nempe, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & ſector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifeſtum eſt & horum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis eſſe punctum L.

Adeoque quilibet circuli ſector, ſuſpenſus à puncto quod diſtet, à centro circuli ſui, ſemiſſe lateris quadrati circulo inſcripti, pendulum iſochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno caſu, absque poſita dimenſione arcus, pendulum ſectori iſochronum invenitur.

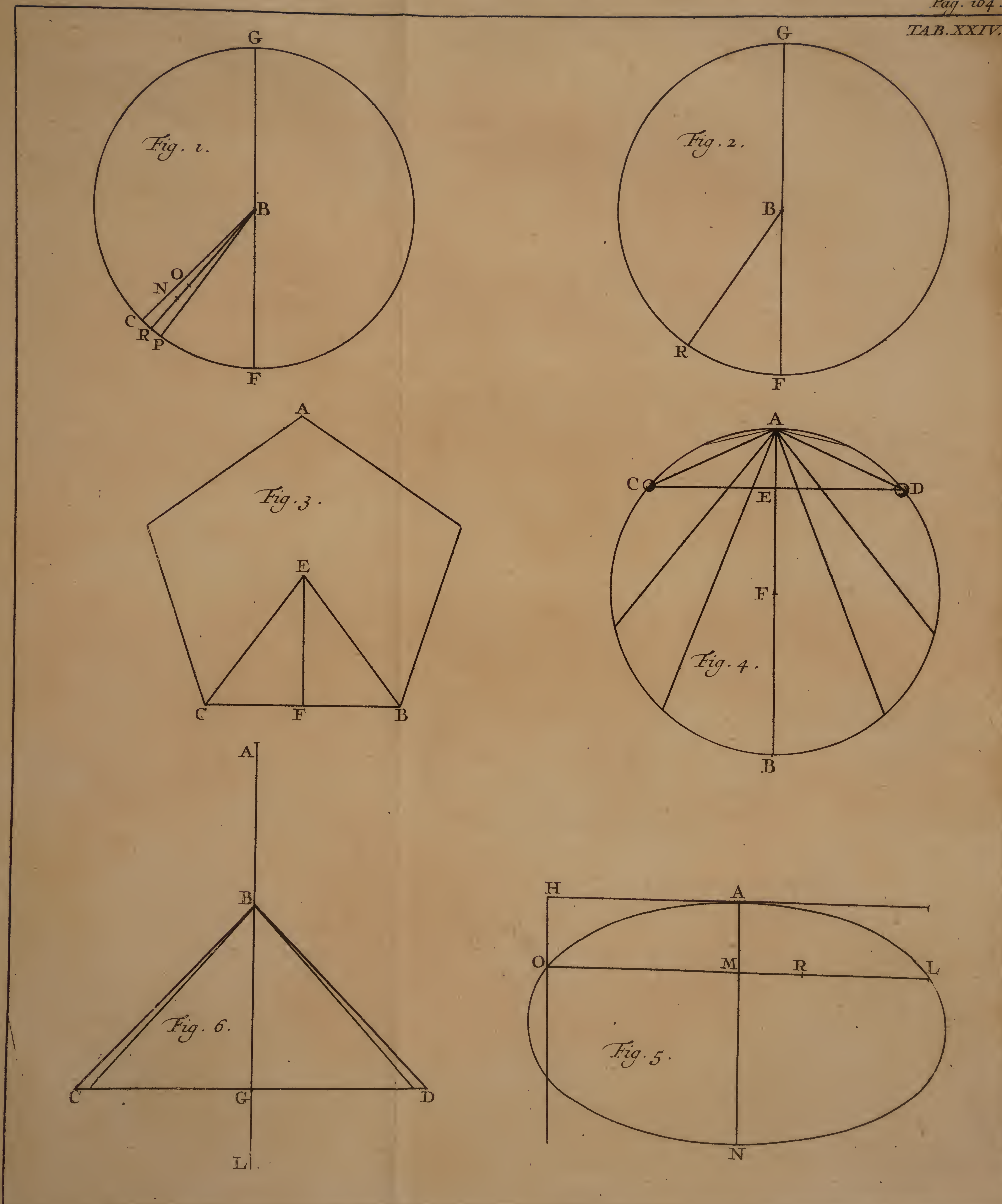
TAB. XXV. Fig. 3. & 4. Porro, ad univerſalem conſtructionem æquationis primæ, $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars ſui tertia E F; eritque F centrum deſcribendi circuli; radius autem F O æqualis ſumendus ei, quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum A E, E F.

Si itaque, ex puncto B, ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur, ut B C, B D; illorum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuslibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, axis vero in recta A L, quales ſunt utraque C B D; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figurarum rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum,

quæ

TAB. XXIV.


Fig. 1.
G B O N C R P F
Fig. 2.
G B R F
Fig. 3.
A E C F B
Fig. 4.
A C E D F B
Fig. 5.
H A O M R L N
Fig. 6.
A B C G D L

quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Ut ſi, exempli gratia, triangulum B A C iſoſceles, cujus axis A D, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum F A G, axem eundem habens A D, & baſin F G æqualem baſi B C; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori B A C iſochronum eſſe dico. DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XXVII. Fig. 1.

Quia enim virga, ſeu linea gravis, F G, affixa virgæ ſine pondere E D in D, ſitu obliquo, ſuſpenſaque ex E, iſochrona eſt virgæ B C, ſimiliter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem A D ſecant in iiſdem punctis, atque inter ſe æquales ſunt: neceſſe eſt tota triangula, quæ ex lineis, ſeu virgis iiſdem compoſita intelligi poſſunt, iſochrona eſſe. In aliis figuris ſimilis eſt demonſtratio. * Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur.

In ſolidis porro figuris facile quoque, per ante demonſtrata, centrum oſcillationis invenire licebit. Si enim ſit ſolidum A B C, ſuſpenſum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis ſit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum poſterius ſit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propoſitionem 14, ſummis quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc eſt, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia ſecundum numerum dictarum particularum, æqualia ſint dictis quadratorum ſummis; rectangula hæc applicata ad diſtantiam E F, qua nempe axis ſuſpenſionis diſtat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius eſt centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propoſitione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot. TAB. XXV. Fig. 5.

De centro oscillationis.

Centrum oſcillationis in Pyramide.

TAB. XXVI. Fig. 1.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, baſin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, ſit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis O V V, à latere adponenda, ſecundum propoſitionem 14, conſtabit ex reſiduis parabolicis O P V, quæ nempe ſuperſunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur ſemiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

Sicut enim inter ſe ſectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipſis in figura plana reſpondentes. & ſicut centrum gravitatis E diſtat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, diſtabit tribus quartis diametri O P à vertice O.

Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V ſecet ſecundum R F; inventâque ſubcentricâ cunei, ſuper figura O V V abſciſſi plano per O Ω, quæ ſubcentrica ſit O G, (eſt autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis diſtantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis diſtantiarum à plano N E, particularum ſolidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

* Prop. 10. huj.

Deinde, ad inveniendam ſummam quadratorum à diſtantiis à plano A D, noſcenda primo ſubcentrica cunei, ſuper quadratâ baſi pyramidis B C abſciſſi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ ſubcentrica ſit B K; eſtque $\frac{2}{3}$ B C. Noſcenda item diſtantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ ſit Φ P; eſtque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, diviſâ bifariam P V in Δ, ſi fiat ut Δ P ad P Φ, hoc eſt, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod eſt $\frac{1}{12}$ quadrati B C, ad aliud ſpatium Z; erit hoc, multiplex ſecundum nu-

TAB. XXV.

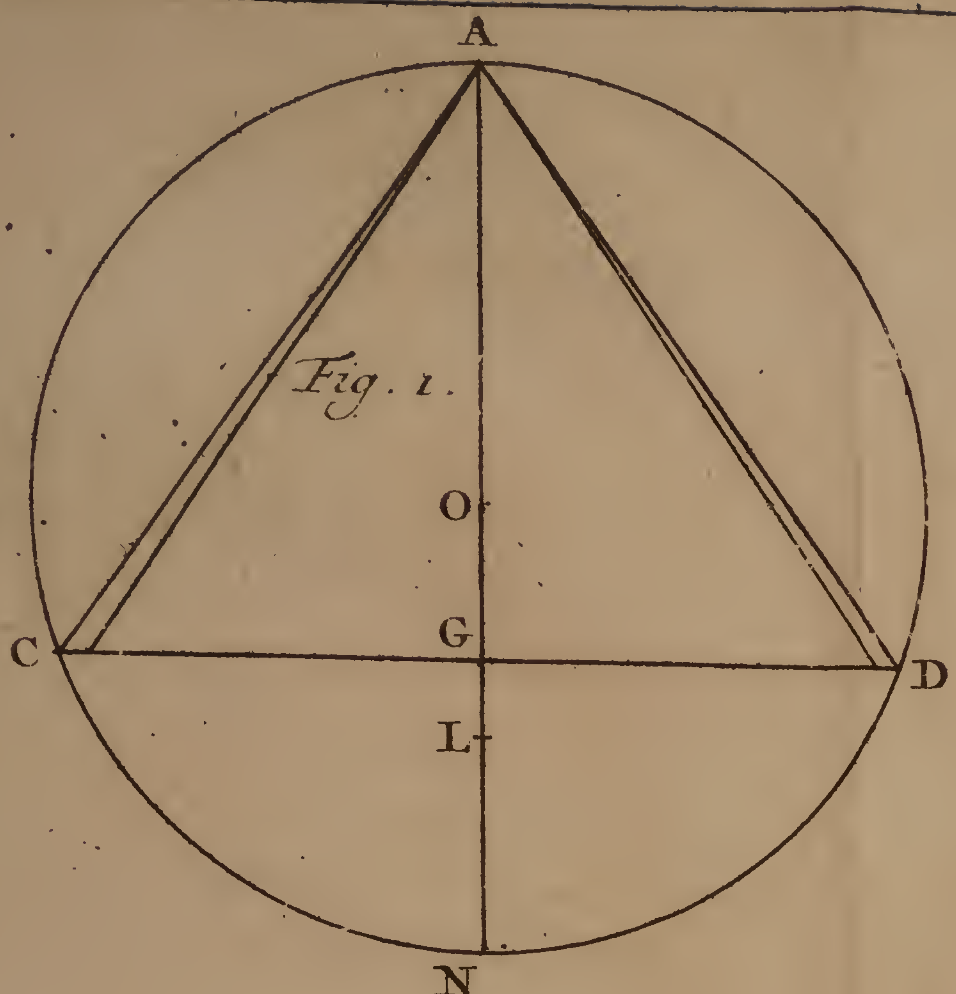


Fig. 1.

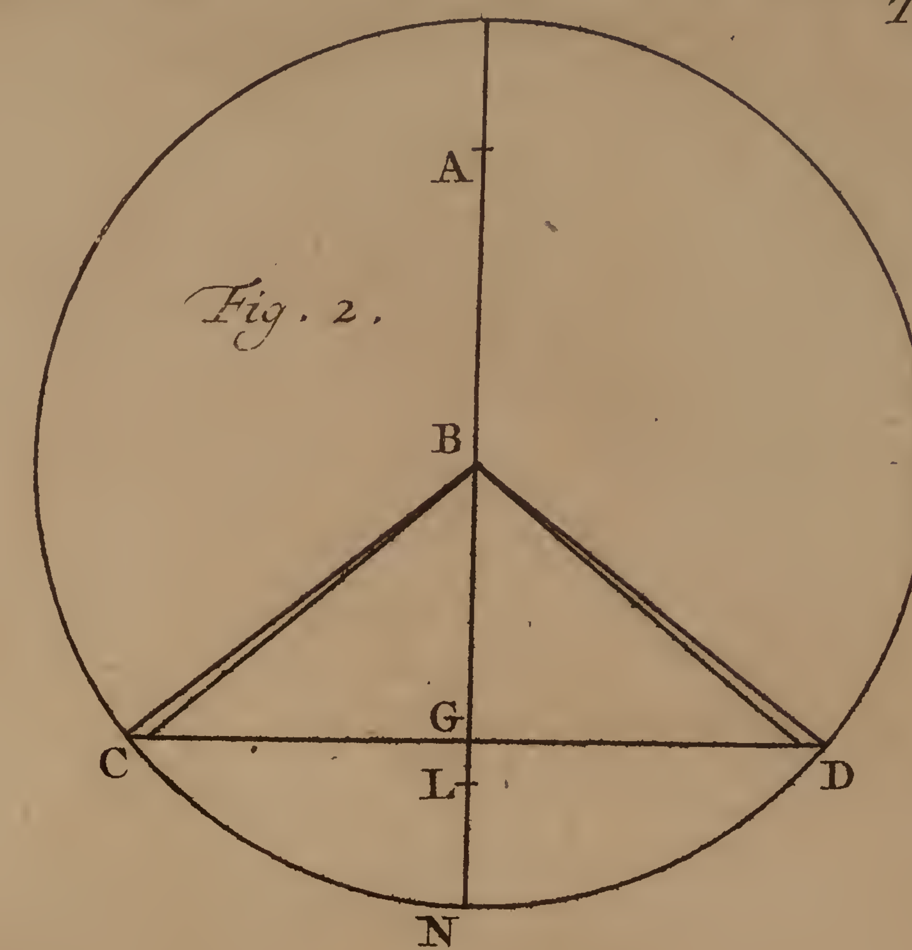


Fig. 2.

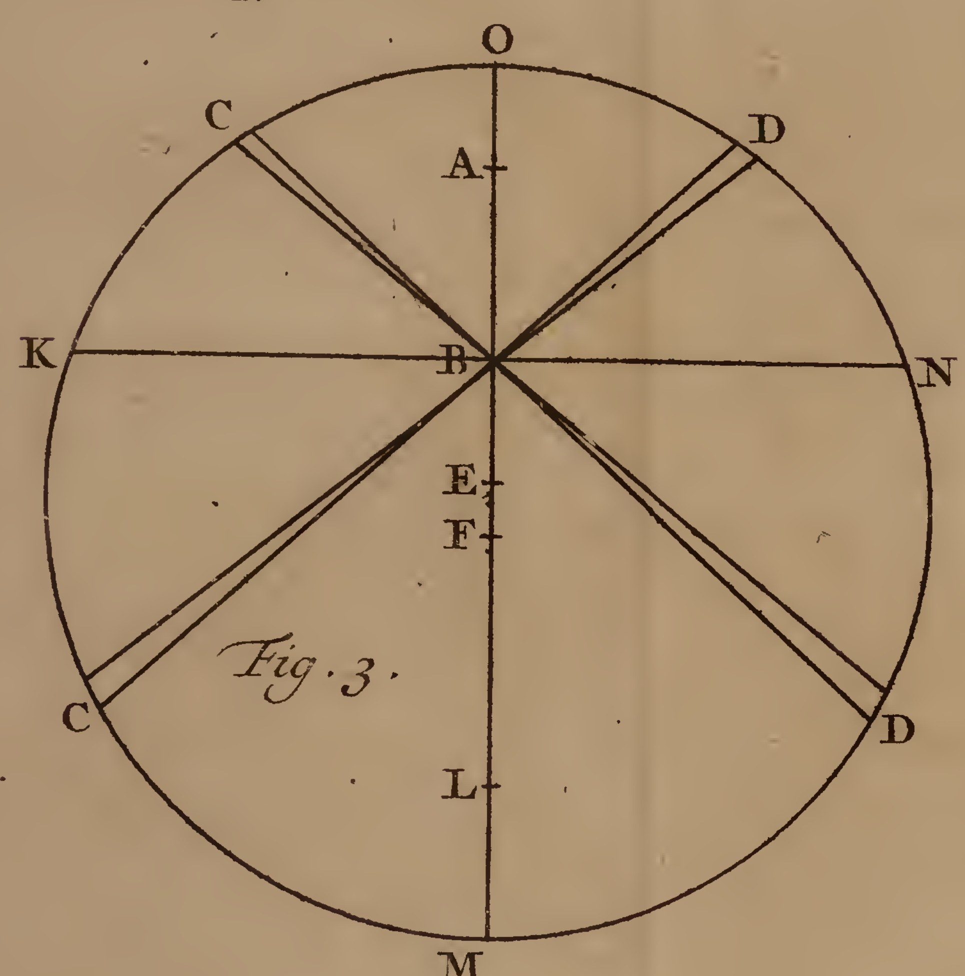


Fig. 3.

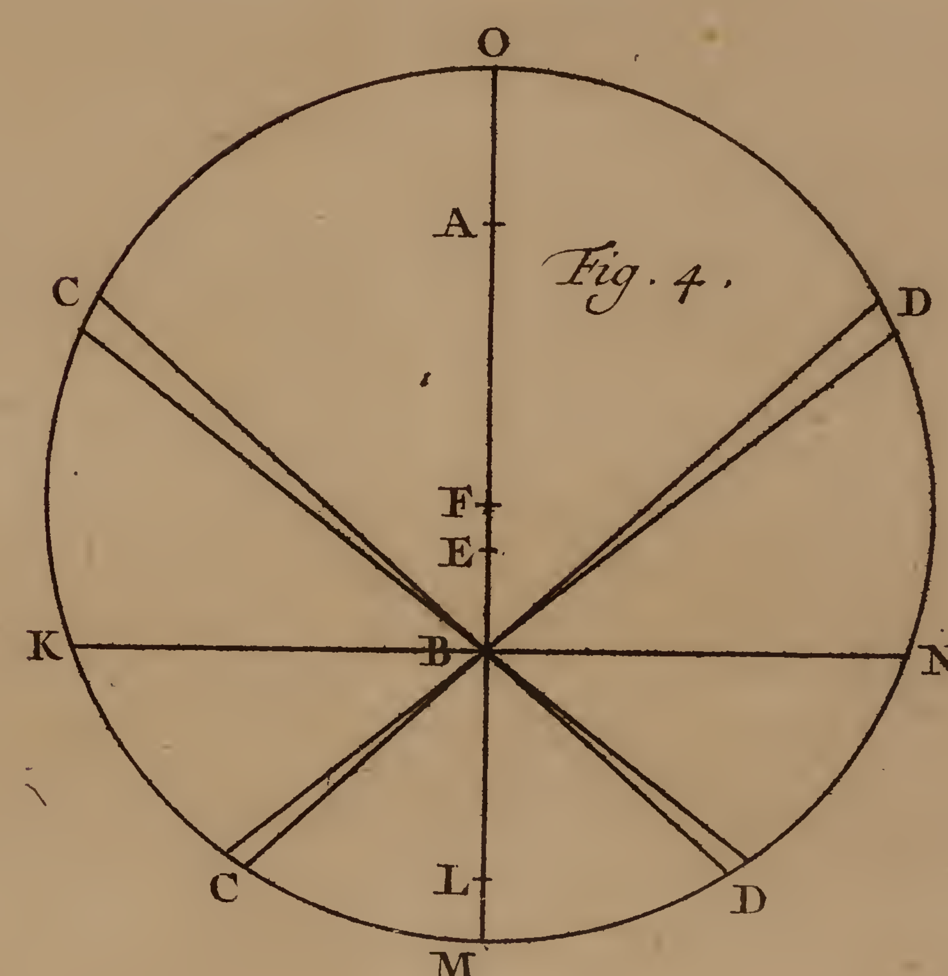


Fig. 4.

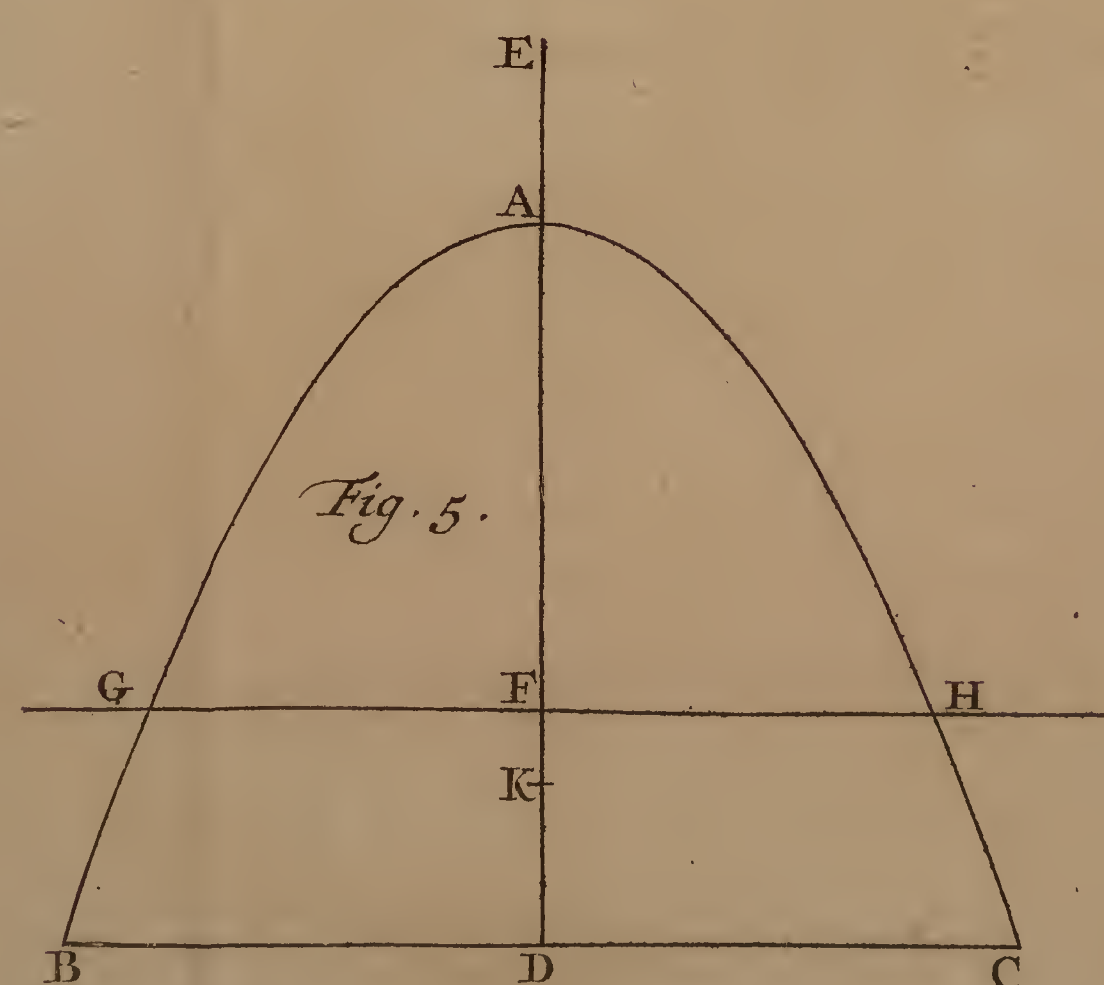


Fig. 5.

numerum particularum ſolidi A B C, æquale quadratis diſtantiarum à plano A D*. Apparet autem; fieri ſpatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C. DE CENTRO OSCILLATIONIS. * Prop. 15. huj.

Itaque, totum ſpatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, ſi ſuſpenſio, ut hic, poſita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque diſtantia, ad quam applicatio facienda, A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque inſuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis.

Centrum oſcillationis Coni.

Quod ſi A B C conus fuerit, omnia eodem modo ſe habebunt, niſi quod ſpatium Z hic ſit æquale rectangulo Δ P Φ*, hoc eſt $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, ſive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum ſpatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, poſita ſuſpenſione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$ A D, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifeſtum eſt, ſi A D, D B æquales ſint, hoc eſt, ſi conus A B C ſit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D. * Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propoſitione 20, conum hunc rectangulum, ſi ex D centro baſeos ſuſpendatur, iſochronum fore ſibi ipſi ex vertice A ſuſpenſo, quemadmodum & de triangulo rectangulo ſupra oſtenſum fuit.

Centrum oſcillationis Sphæræ.

Si A B C ſit ſphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis compoſita, quarum baſis communis O H, æqualis ſphæræ diametro A D. Secta vero ſphærâ planis per centrum E, quorum B C ſit hori- TAB. XXVI. Fig. 2.

horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur ſumma quadratorum à diſtantiis à plano A D, noſcenda eſt diſtantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ ſit Φ P, eſtque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, diviſâ P V bifariam in Δ, conſtat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum ſphæræ A B C, æquari quadratis diſtantiarum à plano A D*. Eſt autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata diſtantiarum à plano B C, æqualia eſſe liquet quadratis diſtantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo ſpatium applicandum, in ſphæra A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, ſi ſphæra ſuſpenſa ſit ex puncto in ſuperficie ſua A, erit E S, à centro ſphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ ſemidiametri A E. Totaque A S æqualis $\frac{7}{10}$ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut L, ſphæra ſuſpenſa ſit; erit E S æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.

Centrum oſcillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi cylindrus à centro baſis ſuperioris ſuſpendatur, fit longitudo penduli iſochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum ſemiſſe ejus, quæ ſit ad ſemidiametrum baſis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oſcillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oſcillationis eſt $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à ſemidiametro baſis. Unde, ſi à puncto verticis fuerit ſuſpenſum, fit longitudo penduli iſochroni $\frac{2}{3}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ ſit ad ſemidiametrum baſis, ſicut hæc ad axem, id eſt, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Cen-

Centrum oſcillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oſcillationis inveniri poteſt. Si enim, exempli gratia, ſit conoides cujus ſectio per axem, hyperbola B A B; axem habens A D, latus tranſverſum A F: erit figura plana ipſi proportionalis B K A K B, contenta baſi B B, & parabolicæ lineæ portionibus ſimilibus A K B, quæ parabolæ per verticem A tranſeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus tranſverſum A F, ac parallelum baſi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum diſtat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; eſtque axis A D ad A L, ſicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum ſeſquialtera A D. Deinde & diſtantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri poteſt, atque etiam ſubcentrica cunei ſuper figura B K A K B, abſciſſi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei ſubcentrica, ſuper ipſa A P, inveniri quoque poteſt; atque ex his conſequenter centrum agitationis conoidis, in quavis ſuſpenſione; dummodo axis, circa quem movetur, ſit baſi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, ſi axis A D lateri tranſverſo A F æqualis ponatur, ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati A D, cum $\frac{31}{200}$ quadrati D B. Tunc autem A L eſt $\frac{7}{10}$ A D. TAB. XXVI. Fig. 3.

Unde, ſi conoides hujuſmodi ex vertice A ſuſpendatur, invenitur longitudo penduli iſochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{31}{145}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

Centrum oſcillationis dimidii Coni.

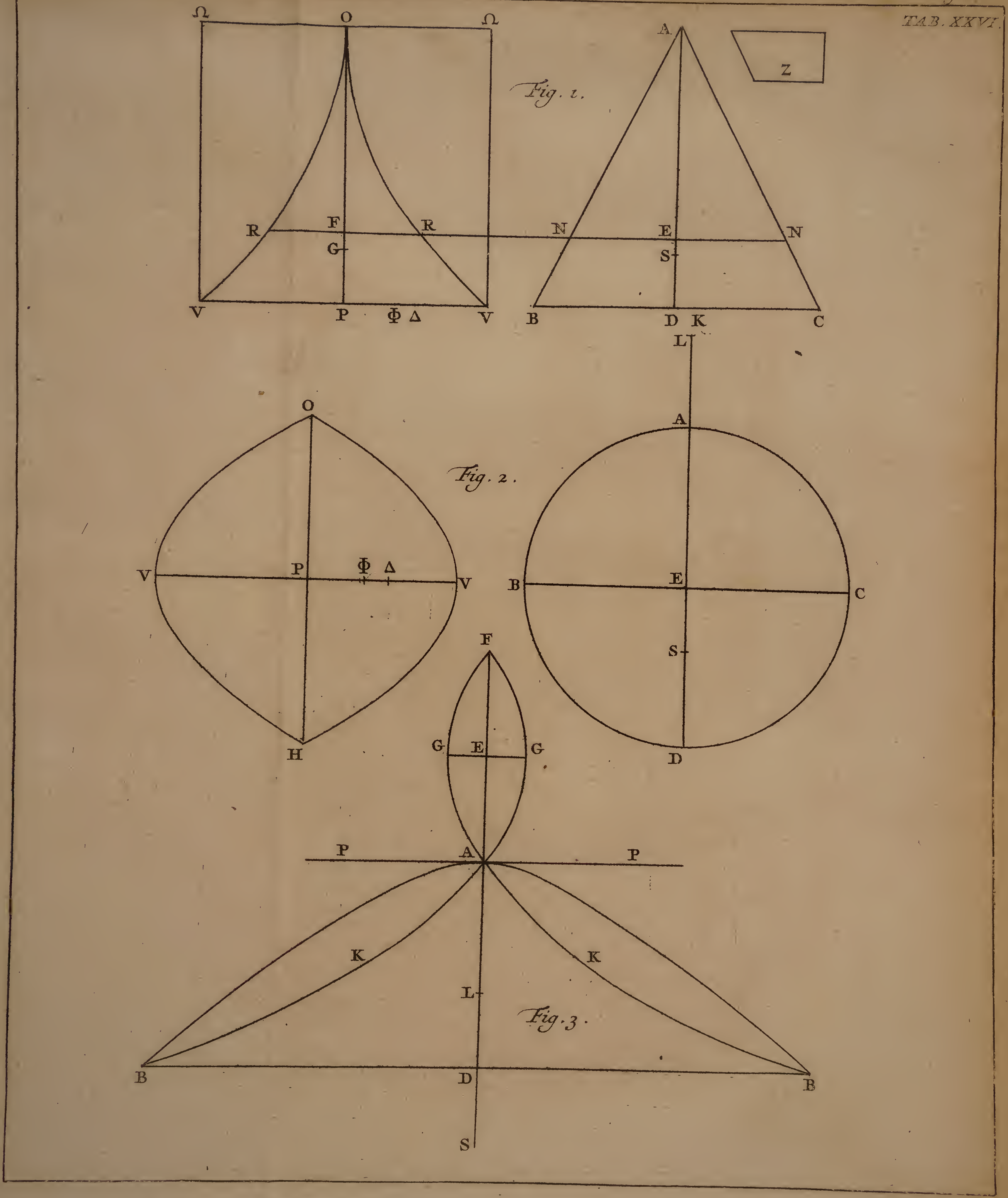
Denique & in ſolidis dimidiatis quibuſdam, quæ fiunt ſectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut ſi ſit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum ſemicirculi baſeos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum eſt, quoniam A D eſt $\frac{3}{4}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli TAB. XXVII. Fig. 2.

ad radium, ita ſint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E eſt centrum gravitatis ſemicirculi baſeos, ideoque in A E centra gravitatis omnium ſegmentorum ſemiconi A B D, baſi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem eſt quæ in cono toto ſupra deſcripta fuit: per quam nempe invenietur ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſemiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata diſtantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, ſicut ſupra prop. 14. adhibenda eſt, cujus nempe ſectiones verticales, exhibeant lineas proportionales ſectionibus ſibi reſpondentibus in ſemicono A B C. & hujus figuræ cognoſcenda eſt diſtantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem eſſe conſtat diſtantiæ D N, centri gr. ſemiconi à plano trianguli A B. poſitâque H G ſubcentricâ cunei abſciſſi ſuper figura S Z Y, ducto plano per S Y, noſcendum eſt rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, ſecundum numerum particularum ſemiconi A B C, æquabitur quadratis diſtantiarum ſemiconi in planum M D O. Licebit vero cognoſcere rectangulum illud G F H, etiamſi ſubcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus ſupra, cum de cono ageremus, quadrata diſtantiarum à plano per axem ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro baſis, ſive $\frac{3}{20}$ quadrati à ſemidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in ſemicono A B C, quadrata diſtantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipſius ſemiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum ſemiconi A B C, æquatur quadratis diſtantiarum à plano A B, ut patet ex propoſitione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{3}{20}$ quadrati B C. Ponendo autem A B ∞ a; B C ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio B C deſcriptæ, ∞ q; fit E B ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, ſive G F ∞ $\frac{1bb}{2q}$.

Cujus


Fig. 1.
Ω
O
Ω
R
F
R
G
V
P
Φ Δ
V
A
Z
N
E
N
S
B
D K
C
L
Fig. 2.
O
V
P
Φ
Δ
V
H
A
B
E
C
S
D
Fig. 3.
F
G
E
G
P
A
P
K
K
L
B
D
B
S

Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H ∞ $\frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum ſemiconi A B C, æquatur quadratis diſtantiarum à plano M D O. At quadratis diſtantiarum à plano N D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, ſive $\frac{3}{80} aa$, multiplices per numerum particularum ſemiconi A B C. Itaque, totum ſpatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80} aa + \frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni ſuſpenſione ſemiconi, dummodo ab axe qui ſit parallelus baſi trianguli à ſectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y ſit ignotæ prorſus naturæ, ſubcentricam tamen G H, cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{20} bb$, ſive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{1 bb}{2q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{10} q$.

Porro, etiam ſemicylindri, & ſemiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri poſſunt, atque aliorum inſuper ſemiſolidorum; quæ aliis inveſtiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in ſolidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum conſtituuntur, quarum centra oſcillationis non differunt à centris oſcillationis rectarum. Sic, ſi coni duo fuerunt A B C, A F G, alter rectus, alter ſcalenus; quorum & diametri & baſes æquales; hi ex vertice ſuſpenſi, vel à quibuſcunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis diſtantibus, iſochroni erunt; dummodo axis, unde conus ſcalenus ſuſpenſus eſt, rectus ſit ad planum trianguli per diametrum, quod planum baſi eſt ad angulos rectos. TAB. XXVII. Fig. 1.

De centro oscillationis.

PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit.

TAB. XXVII. Fig. 3.

Ut hoc expediamus, primo penduli ipſius, ex virga gravitate prædita, & appenſo parte ima pondere, compoſiti, centrum oſcillationis inveniendum eſt.

Sit virga, cum appenſo pondere, A C, cujus longitudo dicatur a. Intelligantur autem, tum virga ipſa, tum pondus appenſum C, in particulas minimas æquales diviſa, earumque particularum virga habeat numerum b, pondus vero C numerum c, ponendo nempe b ad c, ſicut gravitas virgæ ad gravitatem appenſi ponderis. Longitudo igitur penduli ſimplicis, dato iſochroni, habebitur, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis particularum omnium à puncto ſuſpenſionis A, dividatur per ſummam earundem diſtantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T ſit dupla T C. Quia ergo M eſt centrum gravitatis lineæ A C, & A T ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hîc revera triangulum eſt; erit ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum virgæ à puncto A, æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc eſt, rectangulo T A M, multiplici ſecundum numerum particularum b; hoc eſt, $\frac{1}{3} aab$; quia M A eſt $\frac{1}{2} a$, & T A $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum T A M ∞ $\frac{1}{3} aa$. Summa vero quadratorum, à diſtantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici ſecundum numerum particularum ipſius ponderis; hoc eſt, aac. Adeoque ſumma quadratorum omnium, tam à diſtantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3} aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

Porro, diſtantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2} ba$; longitudini ſcilicet virgæ ipſius, quæ

eſt

eſt a, multiplici ſecundum ſemiſſem numeri particularum quas continet. Et diſtantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, ſunt $a\,c$. Ita ut ſumma utrarumque diſtantiarum ſit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo ſummam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ ſive $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli iſochroni. Quæ itaque habebitur, ſi fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appenſi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejuſdem appenſi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem ſumere longitudinem A C, à puncto ſuſpenſionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum conſideretur.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod ſi jam, præter pondus C, alterum inſuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, ſeu particularum numerus ſit d: diſtantia vero A D ſit f. Ut pendulum ſimplex huic ita compoſito iſochronum inveniatur, addenda ſunt ad ſummam ſuperiorem quadratorum, quadrata diſtantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet eſſe dff. Adeo ut ſumma omnium jam ſit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad ſummam diſtantiarum, addendæ diſtantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac ſumma proinde diſtantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba + ca + df$; per quam dividenda eſt iſta quadratorum ſumma, & fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli iſochroni.

TAB. XXVII. Fig. 4.

Quod ſi vero, hæc longitudo penduli iſochroni, datæ æqualis poſtuletur, quæ ſit p, & reliqua omnia quæ prius data ſint, præter diſtantiam A D ſeu f, quæ determinat locum ponderis D: ſitque invenienda hæc diſtantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum poſtuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \propto pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Et $f \propto \frac{1}{2}p$

 + vel

$+$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$. Ubi animadvertendum, duas eſſe veras radices, ſi $\frac{1}{2}abp + cap$ minus ſit quam $\frac{1}{3}aab + aac$; hoc eſt, ſi longitudo p minor ſit quam $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli iſochroni, ſive diſtantia centri oſcillationis à ſuſpenſione, in pendulo compoſito ex virga A C & pondere C.

Unde patet, ſi velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; poſſe duobus locis, inter A & C, illud diſponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter diſtabunt à puncto N, quod abeſt ab A, ſemiſſe longitudinis p, hoc eſt, ſemiſſe penduli ſimplicis, cui compoſitum hoc iſochronum poſtulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo ſuperius eſſe puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione ſuperiori, $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ non minus eſſe debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{d}$. Unde non debebit eſſe minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc} - \frac{ab - 2ac}{d}$. Quod ſi p æquetur huic quantitati, hoc eſt, ſi $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{d}$, erit jam, in eadem ſuperiori æquatione, $f \infty \frac{1}{2}p$, hoc eſt, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc} - \frac{ab - 2ac}{2d}$. Quo determinatur diſtantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum uſum ſic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod ſingulis oſcillationibus ſcrupula ſecunda notet. Virgæ autem gravitas ſit $\frac{1}{70}$ gravitatis appenſi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, ſit aliud exiguum pondus mobile ſecundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eadem ponatur quæ ipſius virgæ.

gæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440; invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$. poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, $a \infty 1444\frac{4}{7}$, longitudo virgæ.

Jam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p$ + vel - $\sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$, fiet $f \infty \frac{1}{2}p$ + vel - $\sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9,

à

De centro oscillationis.

à centro oſcillationis penduli compoſiti ſurſum ſumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius ſcrupuli primi accelerationem præſtans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas diſtantias, quibus virga dividenda eſt, calculo inveſtigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p* : easque ſubjecta tabella exhibemus, ſecundum cujus numeros etiam virga penduli diviſa eſt, quæ ſuperius in deſcriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 ſcrupula ſecunda, ſeu primorum ſcrupulorum quadrantes. Ex. gr. ſi, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius juſto incedere, in 24 horis, differentiâ 15 ſecundorum ſcrupulorum; oportebit ſurſum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii ſpatio 24 horarum.		Partes, à centro oſc. ſurſum accipiendæ.
Scrup. pr.	*Sec.*	*Lineæ & decimæ linearum pedis horarii.*
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oſcillationis altius eſt centro gravitatis C partibus 1, 4.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

De centro oſcillationis.

Centri oſcillationis rationem haberi non poſſe, in pendulis inter Cycloides ſuſpenſis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, ſubtili examine, contulerit ea quæ in ſuperioribus, de pendulo inter cycloides ſuſpenſo, demonſtravimus, cum his quæ ad centrum oſcillationis pertinent; videbitur ei deeſſe aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oſcillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda ſit à puncto ſuſpenſionis ad centrum gravitatis appenſi plumbi, an vero ad centrum oſcillationis; quod, ab altero illo, ſæpe ſenſibili intervallo diſtat, atque eo majore, quo major fuerit ſphæra aut lens plumbea. Quid enim, ſi ſphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod ſi ad centrum oſcillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oſcillationis oſtenſa ſunt, conveniant pendulo continue longitudinem ſuam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Poſſet enim videri, etiam centrum oſcillationis mutari, ad ſingulas diverſas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non eſt. Res ſane explicatu difficillima, ſi omnimodam ἀκρίβειαν ſectemur. Nam in demonſtratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum conſideravimus. Sed, ſi ad effectum ſpectemus, non magni facienda eſt difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum conſtat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etſi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oſcillationis, aliquid hic turbare poſſit. Quod ſi tamen effugere prorſus has tricas velimus, id ita conſequemur, ſi ſphæram lentemve penduli, circa axem ſuum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extremâ utrinque, virgæ penduli imæ, inſerendo: quæ idcirco ut bifida hac parte ſit neceſſe

 eſt.

De centro oscillationis.

eſt. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo poſitionem, reſpectu horizontalis plani, ſphæra penduli ſervet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipſum, cycloides eaſdem percurrant. Unde ceſſat hic jam centrorum oſcillationis conſideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum conſequitur, quam ſi puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum menſura, quæ nullis caſibus obnoxia ſit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi poſſit, res eſt & utiliſſima, & à multis pridem quæſita. Quæ ſi priſcis temporibus reperta fuiſſet, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, diſceptationes. Hæc vero menſura, Horologii noſtri opera, facile conſtituitur; cum ſine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi poſſit. Etſi enim, ſimplici pendulorum oſcillatione, hoc à quibuſdam tentatum fuerit, numerando recurſus qui tota cæli converſione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum ſtellarum diſtantias, ſecundum aſcenſionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe eſt moleſtiſſimus ac tædioſiſſimus, propter numerandi ſolicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactiſſimam hujus menſuræ inquiſitionem, etiam centrorum oſcillationis notitia confert; ideo hic demum, poſt eorum tractationem, hanc determinationem ſubjicimus.

Aptiſſima huic rei ſunt horologia, quorum oſcillationes ſingulæ ſecunda ſcrupula, vel eorum ſemiſſes, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonſtranda, inſtructa ſunt. Poſtquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejuſmodi

modi horologium, fixarum ſtellarum obſervationibus, compoſitum fuerit, methodo illa quam in horologii deſcriptione oſtendimus: aliud pendulum ſimplex, hoc eſt, ſphæra plumbea, aut alia materia gravi conſtans, ex tenui filo religata, juxta ſuſpendenda eſt, motuque exiguo impellenda; ac tantiſper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recurſus ejus, per quadrantem horæ, aut ſemiſſem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oſcillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, ſatis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ menſurâ diſtantiæ, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis penduli ſimplicis; eâque, ſi recurſus ſinguli ſcrupula ſecunda valeant, in tres partes diviſâ; facient hæ ſingulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in ſuperioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non ſolum ubique gentium conſtitui poſſit, ſed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, ſemel ad hunc proportionibus ſuis expreſſi, certò quoque in poſterum cognoſci poſſint. Sicut jam ſupra, pedem Pariſienſem ad hunc horarium eſſe diximus, ut 864 ad 881; quod idem eſt ac ſi, poſito prius pede Pariſienſi, dicamus tribus hujuſmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, conſtitui pendulum ſimplex, cujus oſcillationes ſcrupulis ſecundis horariis reſponſuræ ſint. Pes autem Pariſienſis ad Rhenanum, quo in Patria noſtra utuntur, ſe habet ut 144 ad 139; hoc eſt, quinque lineis ſuis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas menſuras accipiunt.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quomodo autem centrum oſcillationis in ſphæra, ex qualibet longitudine ſuſpenſa, inveniatur, in ſuperioribus demonſtratum eſt. Nempe, ſi fiat ut diſtantia inter punctum ſuſpenſionis & ſphæræ centrum, ad ſemidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorſum acceptas, terminari in quæſito oſcillationis centro. Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem. Nam, ſi à pun-

cto ſuſpenſionis ad ſphæræ centrum diſtantia accipiatur, ſphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa menſura penduli cujus recurſus ſecunda ſcrupula metiantur; ſed quo major erit ejus ſphæra, hoc minor invenietur menſura illa, inter centrum ſphæræ & punctum ſuſpenſionis intercepta. Quia in iſochronis pendulis, centra quidem oſcillationis à punctis ſuſpenſionum æqualiter diſtant; amplius autem deſcendit centrum oſcillationis infra centrum ſphæræ majoris, quam minoris.

Hinc neceſſe fuit illis, qui, ante hanc centri oſcillatorii determinationem, menſuræ univerſalis conſtituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii noſtri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana ſibi negotium ſumpſit, & recentius doctiſſimus Aſtronomus Lugdunenſis, Gabriel Moutonus; his, inquam, neceſſe fuit deſignare globuli ſuſpenſi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe triceſimam vel aliam partem æquaret; vel menſura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc poſteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipſum eſt quod quærendum eſt: etſi ſcio vix ſenſibilem errorem fore, dummodo ſphæræ iſtam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem poſſet quidem aliquo pacto res explicari; ſed ita, ut numerandarum oſcillationum labor ſubeundus ſit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præſtat, centra oſcillationis adhibendo, certam rationem ſequi, nulliſque præter neceſſitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus ſphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occurſu aëris minus impediantur.

Cæterum, non ſphæræ tantum ex filo ſuſpenſæ, ſed & coni, cylindri, aliaque omnia ſolida, planaque, quorum centra oſcillationis ſuperius exhibuimus, ad hanc menſuram inveſtigandam, apta ſunt; quoniam, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis, certum idemque omnibus iſochronis pendulis eſt intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ ſecunda ſcrupula aut eorum ſemiſſes ſingulis penduli

recurſibus

recurſibus indicant, ad hæc uſurpare poſſumus; ſed & aliâ quâcunque penduli longitudine inſtructis propoſitum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, ſeu dentium numero, cognoſcatur numerus oſcillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo ſimplici, cujus librationes ſingulæ conveniant vel ſingulis, vel binis ternisve recurſibus horologii, conſtabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ ſpatio tranſigantur. Quarum numerus ſi quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero ſcrupulorum ſecundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli ſimplicis inventi, (quæ longitudo ſemper à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis accipienda eſt) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde conſtat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines ſunt inter ſe, ſicut quadrata temporum quibus ſingulæ oſcillationes tranſeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oſcillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oſcillationes ſingulæ peraguntur; nunc ejus demonſtratio ex ſuperius traditis manifeſta eſt. Cum enim oſtenderimus, ſingulos recurſus penduli, inter cycloides ſuſpenſi, ad caſum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam ſcilicet quam circumferentia circuli ad diametrum ſuam; facile hinc colligitur, tempora oſcillationum in duobus pendulis eſſe inter ſe, ſicut tempora deſcenſus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, ſive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipſæ deſcenſu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oſcillationes ſingulas metiuntur. Ab oſcillationibus autem minimis penduli, inter cycloides ſuſpenſi, non differunt ſenſibiliter oſcillationes minimæ penduli ſimplicis, cujus eadem

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 3. Part. 2.

ſit longitudo. Itaque & pendulorum ſimplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oſcillationes minimæ tranſiguntur.

Quod ſi quis oſcillationum numerandarum, quæ horæ aut ſemihoræ tempore tranſeunt, laborem non defugiat; horologiumque adſit, cujus index ſecunda ſcrupula demonſtret; quæcunque accipiatur penduli ſimplicis longitudo, ejus numerus oſcillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoſcetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad ſecunda ſcrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc menſuram quicunque hactenus inveſtigarunt, experimenta conſulere neceſſe habuerunt; quibus, prout hactenus inſtituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, ſub finem motus acquiſitam. Ex noſtra autem prop. 25, de Deſcenſu gravium, cognitaque longitudine penduli ad ſecunda ſcrupula, abſque experimento, per certam conſequentiam, rem expedire poſſumus. Ac primo quidem ſpatium illud inquiremus, quod unius ſcrupuli ſecundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad ſecunda ſcrupula, longitudinem diximus eſſe pedum Horariorum 3: tempus autem unius oſcillationis minimæ, eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc eſt, ut 355 ad 113: ſi fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius ſecundi ſcrupuli, ſive ſexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19''' \frac{1}{10}$, tempus deſcenſus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum

modum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex $19''' \frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo abſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad parietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur.

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligigimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi levio-

leviore materia conſtent, mole grandiuſcula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem ſecant, ita magnitudine corporis penſatur, ut ſphæra lignea, vel etiam è ſubere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni ſuberisve gravitatem. Tunc enim gravitates ſphærarum erunt inter ſe ſicut earum ſuperficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum ſenſu percipi poteſt, decidant corpora, quæ multum intrinſeca gravitate differunt, nequaquam opus eſt ut proportio illa diametrorum ſervetur. Poſſunt enim inter ſe æqualia eſſe, dummodo utraque ſatis magna ſint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum eſt, tantam vel altitudinem eſſe poſſe; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in ſuperioribus demonſtravimus, proportione plurimum receſſura ſit. Namque in univerſum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac ſuperficiei ſuæ, conſtitutus eſt; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam poſſit. Quæ nempe celeritas ea eſt, quam ſi aër, aut liquor ille ſurſum tendens, haberet, ſuſpenſum corpus idem ſibi innatans ſuſtinere poſſet. Verum de his, alias fortaſſe, pluribus agendi occaſio erit.

HORO-

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUINTA.

Conſtructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oſcillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejuſmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; ſed cujus uſus minus percrebuit, propter alterius illius conſtructionem, quodammodo ſimpliciorem faciliremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec ſine ſucceſſu, conſtructa fuere: eſtque in his ſingulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index poſtremus, qui ſecunda ſcrupula deſignat; cum in priore noſtro horologio, omnibuſque aliis, ſubſultim quaſi feratur. Item hoc quoque; quod abſque ſtrepitu, ſonoque omni, moveantur hac ratione conſtructa automata. quanquam, ad obſervationes aſtronomicas, ſonus ad ſingula ſecunda ſcrupula repetitus, utilitate non careat. Et conſtitueram quidem, deſcriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumen-

Secundi Horologii descriptio.

to plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili ſpeculatione maturius fruantur harum rerum ſtudioſi, neve caſu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter deſtinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, ſimulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonſtratione ipſorum in aliud tempus dilata*.

* Vide Auctoris Opera poſthuma p. 401. & ſeq.

Horologii ſecundi conſtructio.

TAB. XXVII. Fig. 5.

Non neceſſarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii conſtant, diſpoſitionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus facile ordinari, variiſque modis mutari poſſit; ſed eam partem explicari ſatis eſſe, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expreſſa eſt.

Axis D H ad horizontem erectus intelligendus eſt, ac ſuper polis duobus mobilis. Huic ad A affixa eſt lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque ſecundum lineam A B; quæ eſt paraboloides illa de qua oſtendimus, Propoſ. 8. partis 3, evolutione ejus, poſtquam ipſi recta quædam juncta fuerit, deſcribi parabolam. Ea recta hic eſt A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E deſcriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola deſcribitur, eſt B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in ſeſe vertitur, filum B G F, in rectam lineam extenſum, ſphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoreſve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: ſed ita, ut omnes in ſuperficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipſo æqualia ſemper circuitus tempora evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu poſtea dicemus, apparebit.

Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium lon-

longitudinis penduli, cujus ſingulæ oſcillationes ſemiſcrupulum ſecundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{27}{16}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium eſt. Si vero ſecunda ſcrupula unoquoque circuitu expleri deſideremus, quadrupla priorum accipienda ſunt, tum latera recta, tum linea A E. SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Porro, etſi filum B G F veluti unicum ac ſimplex hactenus deſignavimus, ſciendum tamen longe præſtare ut parte ſuperiori duplex ſit, ac F versùs in angulum coëat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta eſſe debet, quanta iſti filorum divaricationi ſufficit, vel & ipſa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, abſque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque ſibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, ſi unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri ſciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo niſu, motum ſphæræ F ſemel inditum, conſervat.

Hoc autem quo facilius poſſit, liberrimam axis K H revolutionem eſſe oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam ſi, parte ſui ima, durato chalybe conſtet, ſuppoſitamque habeat adamantis ſuperficiem planam; cujus minima quævis particula hic ſufficit, ſubter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata ſervetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides ſuſpenſum eſt, experti ſumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA

ex motu circulari, Theoremata.

I.

SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri.

II.

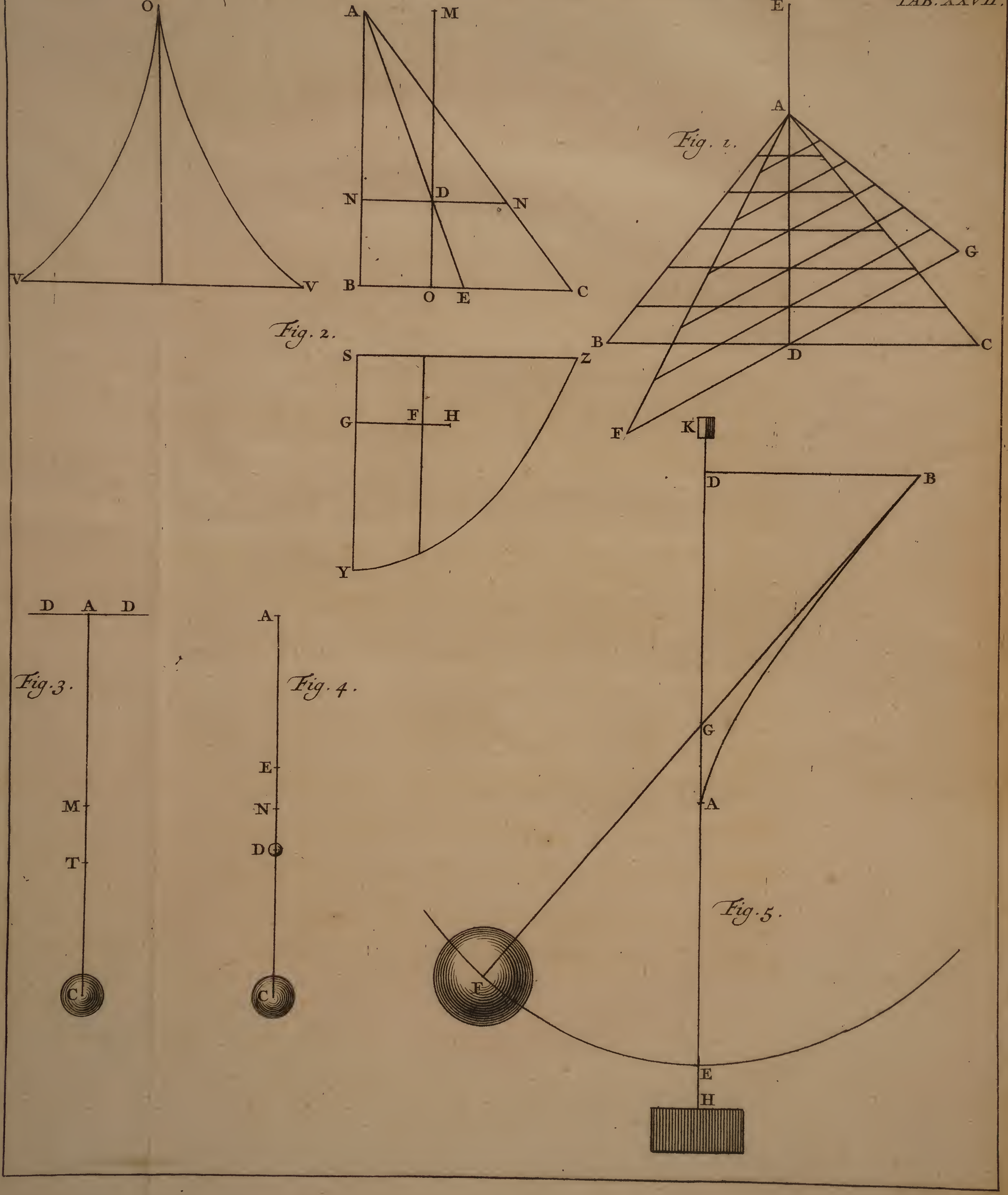
Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

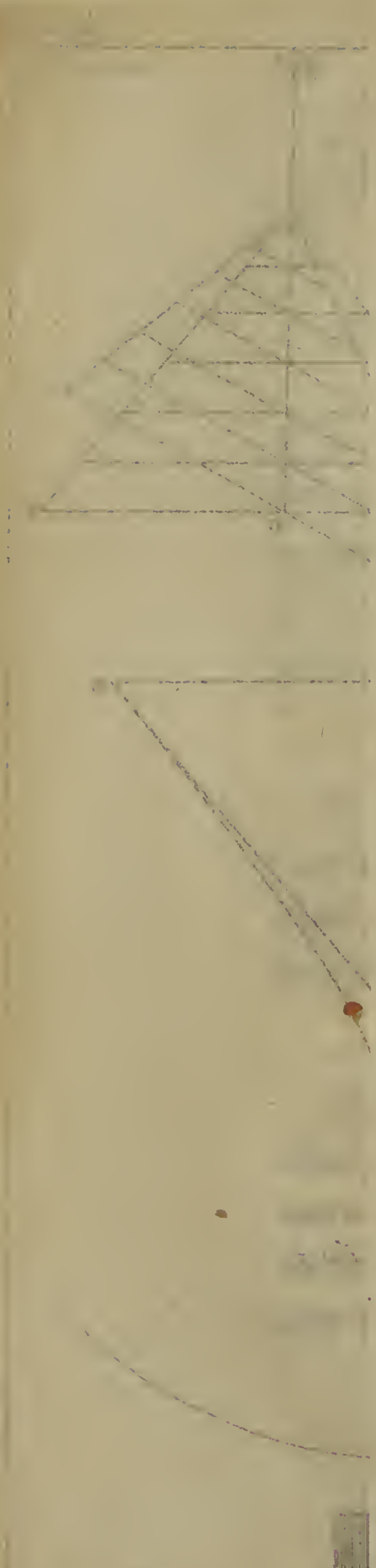
III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, ſed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

IV. Si

TAB. XXVII.


O
V
V
A
M
N
D
N
B
O
E
C
Fig. 2.
S
Z
G
F
H
Y
E
A
Fig. 1.
G
B
D
C
F
K
D
B
G
A
Fig. 5.
F
E
H
D
A
D
Fig. 3.
M
T
C
A
Fig. 4.
E
N
D
C



De vi Centrifuga.

IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in ſubdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem; hoc eſt, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo ſuſpenſum eſt.

VI.

In cava ſuperficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

De vi Centrifuga.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus ſuſpenſa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum ſuperficiem fila hoc motu deſcribunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus ſuſpenſa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in ſubduplicata ratione ipſarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum ſingulorum tempora, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia ſunt tempori duarum oſcillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X. Si

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque ſingulos abſolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem ſemidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum abſolveret, vel duplicem oſcillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem.

X I.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori caſus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. ſcrup. 54, proxime. Exacte vero, ſi anguli dicti ſinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inſcriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, ſed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila ſua intendent, in eadem ratione quæ eſt filorum longitudinis.

De vi Centrifuga.

XIII.

Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maxima agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.

FINIS.

BREVIS INSTITUTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

Adr. Metius in Geographicis Inſtitutionibus Cap. 4.

ET hæc ſane facillima & aptiſſima eſt methodus (*ſcilicet qua adhibitis Horologiis longitudines detegnuntur*) quam acquirere poſſis ; niſi quod difficultas & error conſiſtat in irregulari Horologiorum motu : ideoque diligentes inquiſitores & inventores rerum naturalium id curate, neque laboris veſtri vos pæniteat, quo hunc errorem tollere tentetis. Inquirite in hunc verum & æquabilem naturæ curſum ; quo potiti verum lapidem Philoſophorum inveniſtis, neque fortes Naucleri ad ſcopulos toties offendent.

Fournier in Hydrographia l. 12. C. 35.

UNde tandem colligo, ſi via inveniri queat ad Horologia perficienda, & laborem ſuſcipere velimus iis bene utendi, nullam praxim (*ad inveniendas longitudines*) cum hac comparandam eſſe.

Didericus Rembrantz a Nierop in Animadverſionibus de inveniendis longitudinibus.

HOc modo laudabiliora cenſerem nova excogitata Horologia Domini Chriſtiani Hugenii a Zuylichem, quæ, loco liberamenti, a plumbo pendulo oſcillato moderantur, de quibus per certa teſtimonia certus ſum, quod hæc tempus exacte ad hebdomadas, imò ferè ad menſes juſte dimetiri queant ; Unde conſiderem, quod ope horum Horologiorum maximum perciperemus commodum, imò quod, niſi agitatio navis impediret, ſatis attingere poſſemus ad inventionem longitudinum.

BREVIS INSTRUCTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

I.

AD minimum bina nova Horologia Oſcillatoria in navem ferantur: ut ſi alterutrum forte fortunâ vel ex negligentia quieſcat; vel ſi diuturnitate temporis contractis ſordibus, purgandum ſit, alterum nihilominus moveatur; præſtaret autem 3 vel 4 adhibere horologia.

I I.

Cui cura horologiorum committetur, diſcat a fabro quæ ſpectant indices horarum minutarum primarum & ſecundarum, internas etiam horologiorum partes intelligere, & reducendi ea methodum.

I I I.

Horologia in navi ſuſpendenda ſunt in loco arcte clauſo, ubi tuta ſunt ab humore vel ſordibus, & ne diſturbentur contactibus: Et ſi locum illum in media navi prope malum principem ordinare poſſemus, multum præſtaret, quoniam ibi motus minimus eſt.

I V.

Antequam horologia in navem inferantur, conabimur ea aptare ad rectam dierum menſuram, tum enim uſus eſt faciliimus, nulluſque fabris labor eſt ad unum bene adaptatum horologium alia accommodare. Sed ſi tamen tempus vel opportuna id præſtandi occaſio defuerit, nihilominus poterunt æque certe mari uſurpari, dummodo obſervaveris vel ſcias, quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur, ut poſtea docebitur.

V.

Reducere horologia ad rectam dierum menſuram vel cognoſcere quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur.

Obſerva, dies ab una ad alteram meridiem aliquantulum differre quæ cauſa eſt cur horologium, licet prorſus exactum & ſecundum mediorum dierum menſuram moveatur, non ſemper cum ſole conveniat. Sed ut hæc inæqualitas æquetur, & ſemper ope Horologii ſcire poſſimus, quam horam indicat Sol, & conſequenter num horologium ad rectam mediorum dierum menſuram diſpoſitum ſit, conducit ſequens tabula cujus uſus talis eſt. Quando primum horologium conſtituendum eſt, ſubtrahe ex hora ſolari obſervatâ æquationem ejus diei quæ in tabula reperitur, & diſpone horologium ad reſiduas horas, minuta prima & ſecunda: ubi poſt aliquot dies quæritur hora ſolaris, adde ad horam horologii æquationem diei ultimi, & aggregatum erit hora ſolaris, ſi horologium exacte fuit adaptatum, ſecundum menſuram dierum mediorum; verum ut hæ obſervationes quam certiſſime inſtituantur, & horologia ad menſuram adaptentur antequam in navem inferantur, methodus ſequens aptiſſima eſt.

Duc lineam meridianam in pavimento, cujus operationis methodi ſatis notæ ſunt; obſervandum præterea ſummam hic non requiri exactitudinem; Porro, directe ſuper lineam meridianam, ſuſpende 2 fila appenſis infra ponderibus, vel aliter verticaliter tendantur, certosque a ſe mutuò diſtent pedes, quo plures eo melius.

Ubi dein medietas ſolis videtur exacte ex adverſo amborum filorum (ad quod requiritur vitrum obſcuri coloris, vel in fuligine candelæ denigratum) eo momento horologiorum indices diſponendi ſunt, non exacte in 12 horas, ſed tanto magis retrorſum, quanta eſt æquatio illius diei in Tabula: ex. gr. ſi fuerit 22 dies Martii, cujus æquatio in Tabula eſt 8 min. 3 ſec: hæc ſunt ſubducenda ex 12 horis, & reſiduum erit 11 horæ 51 min. 57 ſec: in quot horas minuta & ſecunda diſponendi ſunt indices Horologiorum quam primum ſol medius

dius ex adverſo 2 filorum conſpicitur. Dein poſt aliquot dies obſervatio rurſus eodem modo eſt inſtituenda, ubi ſol ex adverſo filorum cernitur, & ſimiliter notanda hora minuta & ſecunda horologiorum, quibus adde æquationem ejus diei excerptam ex Tabulâ, & ſi aggregatum exacte componat 12 horas Horologium ad rectam menſuram accommodatum eſt. Si vero differat dividenda ſunt minuta & ſecunda iſtius differentiæ, per numerum dierum inter utramque obſervationem, ad obtinendam quotidianam differentiam.

Supponamus hanc ſecundam obſervationem fieri 30. Martii ſcil. octo diebus poſt primam & comperiatur medietate ſolis viſa in meridiano ex adverſo 2 filorum, horologium indicare

	h.	*m.*	*ſ.*
horologium indicare	11.	51.	7.
Æquatio 30. Martii in tabula eſt	0.	10.	40.
Quæ addita horæ oſtenſæ per horologium præbet ſummam	12.	1.	47.

Si hæc ſumma exacte fuiſſet 12 horarum, horologium recte diſpoſitum fuiſſet, ſed cum excedat 12. horas 1. minuto 47. ſecundis, tanto citius promotum fuit ſpatio octidui; & hoc 1 minutum & 47 ſecunda, aut 107 ſecunda, diviſa per 8. efficiunt 13. $\frac{3}{8}$ ſecundorum, differentiam in ſpatio 24. horarum. Quâ differentiâ cognitâ, ſi non otium nec animus ſit ſuſcipiendi moleſtiam ut adaptetur horologium ad veram menſuram, neceſſe hoc non eſt; ita enim in navim inferre licet, modo prædicta quotidiana differentia annotetur, & ad eam noſmet componamus ut ſtatim dicetur.

Sed ſi accuratius Horologium diſponere velimus, removendum eſt minus pondus penduli parumper deorſum, quo tardius movebitur: & tum de novo obſervatio per ſolem inſtituenda eſt ut antea; ſi tarde nimis motum fuiſſet, ſupra memoratum pondus parumper ſurſum promovendum fuiſſet, ita tamen, ne ſupra punctum medium penduli promoveatur. eâ quippe gaudet proprietate, quod inde ſurſum promotum horologium lentius iterum promoveat, cujus rei in deſcriptione Horologii datur demonſtratio *; ut & æquationis temporis, cujus ſolummodo hic docemus uſum. Præter certam

* Vide ſupra pag 172.

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

demonſtrationem etiam revera exactis Pendulis compertum eſt, quod ad inæqualitatem dierum ad rectam menſuram reducendam, æquatio, prout eam hic per præcedentem Tabulam inſtituimus, exacte cum experientia conveniat, ita ut tuto ei confidere liceat. Idque tanti momenti eſt in inveniendis longitudinibus, ut, ſi non fuerit obſervatum, nonnunquam ſpatio 3 menſium in calculo errorem committas 7 graduum & amplius, ſine ulla tamen horologiorum culpa: qui gradus ſub Tropicis ultra 100 Germanica milliaria continent.

Oſtenſo, quomodo horologia poſſint adaptari terrâ, vel quomodo eorum differentia quotidiana ſit invenienda, proximum erit dicere, quomodo idem faciendum ſit in navi fixa ad anchoram, cum minime poſſibile ſit idem præſtare in velificatione.

Obſervabimus quodam die ortum & occaſum Solis, & in utraque obſervatione ubi ejus medietas exacte ſupra Horizontem apparet, notabimus horam quam indicat horologium, & ſupputabimus quot horæ interea fuerint præteritæ, cujus numeri dimidio addito ad horam obſervationis matutinæ, habebimus horam quam indicavit horologium cum Sol eſſet in meridiano: cui addens Tabulæ æquationem iſtius diei, ſummam notabimus, & horologium ulterius promoveri patiemur. dein quibusdam diebus, elapſis (quo autem plures præterierint, eo melius eſt) idem omnino faciemus; Et ſi hora hujus ultimi diei ſit eadem, cum ea quæ antea fuerat notata, horologium recte accommodatum eſt. Sin vero major vel minor ſit, vel lentius vel celerius movetur, & differentia diviſa per numerum dierum interim dilapſarum dabit quotidianam differentiam, quam annotabimus, & ſi velimus horologium relinquemus in illo ſtatu; vel alioquin removendo minus pondus penduli ut ſupra dictum eſt, melius horologium accommodabimus.

	h.	m.	ſ.
Ex. Gr. pone 21. Martii mane cum ſolis medietas apparet ſupra horizontem horologium indicare.	5.	30.	10.
Et veſperi ubi Solis medietas latet infra horizontem.	5.	20.	6.

Ut

Ut ſcias ope horologii horas inter binas	*h.*	*m.*	*ſ.*
obſervationes elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	30.	10.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	29.	50.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	20.	6.
Prodeunt horæ inter binas obſervationes elapſæ	11.	49.	56.
Quarum dimidium eſt	5.	54.	58.
Quo addito ad horam ortus	5.	30.	10.
Prodit hora horologii, cum ſol eſſet in Meridiano	11.	25.	8.
Cui addita æquatione 21. Martii	0.	7.	45.
Summa eſt	11.	32.	53.
Septem diebus poſt ſc. 28. Martii obſervetur ortus ſolis, quum horologium indicat	5.	19.	4.
Et occaſus quum indicat	5.	25.	4.
Ad habendas horas interim elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	19.	4.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	40.	56.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	25.	4.
Prodeunt horæ interea delapſæ	12.	6.	0.
Quarum dimidium eſt	6.	3.	0.
Quo addito ad horam ortus	5.	19.	4.
Prodit hora horologii cum Sol erat in meridie	11.	22.	4.
Cui addita æquatione 28. Martii	0.	10.	1.
Summa eſt	11.	32.	5.

Quæ ſumma ſi fuiſſet eadem cum priori ſcilicet 11. 32. 53. ad rectam menſuram diſpoſitum fuiſſet horologium; ſed cum poſterior minor ſit priori, differentiâ exiſtente 49. ſecundorum, horologium ſpatio 7 dierum tanto tardius fuit promotum, quæ 49 ſecunda diviſa per 7 numerum dierum, dant quotientem 7 ſecunda differentiam diurnam, quâ horolo-

gium tardius movetur; poſſumus etiam loco ortus & occaſus Solis duas æquales Solis altitudines obſervare ante & poſt meridiem, & hora horologii annotatâ utriuſque obſervationis tempore, eodem modo, ac hic dictum eſt procedemus.

VI.

Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo verſaris.

Singulis horologiis nomina vel ſigna impone ut A. B. C. & antequam velifices, diſpone eadem ſecundum tempus obſervatum per Solem in loco, ubi moraris, diminutum æquatione ejus diei, quo obſervas; quem annotabis.

Dein ubi in mari verſaris ſi vis ſcire longitudinem loci, in quo es; quot gradibus Meridianus loci hujus ſit orientalior vel occidentalior meridiano loci illius in quo adaptaſti horologia; obſerva Solem vel Stellas, ut determines horam, & vide quam horam eodem momento indicent horologia; quam horam, ſi horologia non fuerint diſpoſita ad rectam menſuram æquabis cognitâ diurnâ differentiâ, ei porrò addens æquationem præſentis diei, quo ita habeas horam in loco illo, ubi horologia fuere diſpoſita. Si hæc hora eadem ſit cum illa quæ obſervata fuit in loco præſente, conſiſtis ſub eodem Meridiano, ac ubi horologia fuere diſpoſita ad Solem: Si vero hora obſervata major ſit illâ quam horologia oſtendunt, certus es, te perveniſſe ſub Meridianum Orientaliorem; ſin denique fuerit minor, perveniſti ſub Meridianum Occidentaliorem: & computatis in ſingulas quaſque horas differentiæ temporis 15 gradibus longitudinis vel in ſingula minuta 15 minutis, vel totidem quadrantibus gradus, cognoſces, quot gradibus dicti Meridiani ab invicem diſtent. E. Gr. pone Horologia A. B. C. fuiſſe aptata ad Solem in loco ex quo abiiſti, 2 Martii, id eſt ad horam obſervatam, ſed in tantum diminutam, quanta eſt æquatio 2 Martii, 2 min. 28 ſec. & pone horologium A fuiſſe diſpoſitum ad veram menſuram, ſed B moveri ſingulis diebus 7 ſecundis tardius, & C ſingulis diebus 12 ſecundis citius.

Ali-

Aliquot diebus poſt E. G. 15. Maji, ut detegas longitudinem loci in quo in mari verſaris; obſerva	*h.*	*m.*	*ſ.*
horam diei, quæ ſit	5.	18.	10.
Et comperis horologium A indicare	2.	6.	0.
Sed horologium B. indicare	1.	57.	22.
Sed cum ſingulis diebus 7. ſec. tardius moveatur, prodeunt ſpatio 74. dierum nempe a 2. Martii ad 15. Maji	0.	8.	38.
Quæ addita ad horam a B. demonſtratam prodit hora eadem ac indicavit horologium A	2.	6.	0.
Invenis etiam horologium C. indicare	2.	20.	48.
Sed cum moveatur 12. ſec. ſingulis diebus citius, habemus ſpatio 74. dierum	0.	14.	48.
Quæ ſubtracta ab hora a C. indicata, iterum prodeunt	2.	6.	0.
Cum itaque hora horologiorum ſit	2.	6.	0.
Adde illi æquationem 15. Maji	0.	19.	29.
Prodit hora loci ubi horologia diſpoſita ſunt	2.	25.	29.
Sed hora obſervata eſt	5.	18.	10.
Excedens priorem	2.	52.	41.
Ergo Meridianus loci in quo verſaris 15. Maji Orientalior eſt, Meridiano loci, in quo horologia fuere aptata	2.	52.	41.
Quæ horæ in gradus reductæ, ponendo 15.	*gr.*	*min.*	*ſec.*
gradus valere unam horam, prodeunt	43.	0.	15.

Verum eſt ex eodem calculo poſſe concludi te eſſe ſub Meridiano hôc ipſo 180. gradus Orientaliori, quia index horarius revolutionem ſuam abſolvit ſpatio 12. horarum in horologiis, ſed differentia tanta eſt, ut nequeas in ea decipi. Alioquin enim horologium poſſet conſtrui, cujus index circuitum ſuum ſemel abſolveret ſpatio 24 horarum.

Obſervandum quoque hic eſt, cum dico, locum tot gradibus Orientaliorem eſſe illo ex quo abiiſti, illud dici eo reſpectu quod illuc veneris ad Orientem navigans, verſus quam partem gradus numerari poſſunt usque ad 360; alioquin enim ſatis no-

 tum

tum eſt: locum, qui 180. gradus Orientem verſus ab alio diſtat, tantum etiam Occidentem verſus inde diſtare: & pariter, qui 300. gradus Orientaliter ab alio diſtat etiam 60. gradus Occidentaliter inde diſtare.

V I I.

Mari invenire horam diei.

Quandoquidem pro invenienda longitudine requiritur ut hora loci, in quo es, cognita ſit, ut ſupra dictum eſt, dicta hora ſumma exactitudine eſt obſervanda; unumquodque enim minutum quo in calculo aberras conſtituit errorem $\frac{1}{4}$. gradus in longitudine, id eſt, prope Æquatorem $3\frac{1}{4}$. Germanicorum milliarium ſed minus ubi longe inde abes:

Quare ad certam horæ inventionem, ne fidas obſervationi maximæ Solis altitudinis, ut inde concludas præciſe meridiem eſſe vel Solem in Meridiano, niſi inter Tropicos Sol fuerit in ipſo puncto Zenith vel ei quam proximus. Nam alias Sol exiſtens prope Meridianum aliquamdiu perſeverat ſine ulla ſenſibili mutatione altitudinis ſuæ; ideoque altitudo meridialis idonea ſatis eſt ad latitudinem vel elevationem Poli loci alicujus dimetiendam, non tamen ad longitudinem ejus exacte inveniendam. Multo minus niti potes pyxidibus nauticis in accurato meridiei tempore inquirendo.

Neque annuli Aſtronomici vel alia horologia ſolaria certa ſatis ſunt in oſtendenda hora ad minuta & ſecunda. Sed melius eſt obſervare ſolis altitudinem, ubi eſt in Oriente vel Occidente, quo autem Orienti aut Occidenti propior eſt, eo melius; ibi enim cum eſt, mutatur ejus altitudo ſenſibiliter magis quam ante vel poſt & ita, ex inventa Poli elevatione, & nota Solis declinatione, hora poteſt computatione detegi, cujus modus ab aliis ſatis deſcriptus eſt; quia tamen computatio illa moleſta eſt & nonnulli errores in menſuranda altitudine Solis committi poſſunt faciliorem hic methodum oſtendam & demonſtrabo.

VIII. Quo-

VIII.

Quomodo ex obſervatione ortus & occaſus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat.

Hæc ſane methodus meo judicio omnium eſt certiſſima, cum ad eam neque notitia Poli elevationis, neque Solis declinationis, neque ulla inſtrumenta ad obſervandum requirantur; cum neque refractio quid nocere poſſit, quoniam hæc in ortu & occaſu Solis ejusdem diei parum aut nihil differre poteſt.

Sicuti ergo antea docuimus horologia in navi adaptare, & obſervare quâ horâ eorundem horologiorum Sol fuerit in meridiano; hic eodem modo procedendum eſt, id eſt, in ortu & occaſu ſolis, ubi ejus medietas eſt ſupra horizontem, annotabis horam demonſtratam tunc temporis per horologia; & licet interea velificando fueris progreſſus, nil refert, uti poſtea demonſtrabitur: dein computans quot interea horæ horologiorum dilapſæ ſint, earumque dimidium addens ad horam ortus, habebis horam quam horologium indicabat quum Sol erat in Meridiano; ad quam addenda eſt æquatio iſtius diei ex tabula deſumta; & ſi ſumma æqualis ſit 12 horis, fuiſti meridie ſub eodem Meridiano, ſub quo horologia ad ſolem fuere adaptata; ſed ſi ſumma excedat 12. horas, fuiſti meridie ſub occidentaliori meridiano, quam loci ejus in quo horologia ſunt diſpoſita; ſed ſi ſumma fuerit minor 12. horis fuiſti ſub orientaliori Meridiano, idque toties quindecim gradibus, quot horis ſumma fuerit minor vel exceſſerit 12. horas, prout iſtius rei computationem antea jam docuimus.

E. G. Ponatur Horologia A. & B., ut ante, fuiſſe adaptata ad Solem in loco ex quo deceſſiſti 2. Martii, id eſt ad horam Solis diminutam æquatione iſtius diei ſcil. 2. min. 28. ſec. Horologio A. ad rectam menſuram redacto; B. vero ſingulis diebus 7. ſecundis tardius moto; Poſtea ſcire deſiderans longitudinem loci in quem perveniſti,

(pone 1. Junii,) obſervetur mane ſol medius	*h.*	*m.*	*ſ.*
ſupra horizontem quando horologium indicat	2.	30.	37.
Et Veſperi iterum medius Sol infra horizontem, cum idem horologium indicat	3.	9.	7.
Ad inveniendas horas interea elapſas, ſubtrahe horam ortus	2.	30.	37.
ex	12.	0.	0.
Reliquum eſt	9.	29.	23.
Huic adde horam occaſus	3.	9.	7.
Prodeunt horæ interea elapſæ	12.	38.	30.
Quarum dimidio	6.	19.	15.
Addito ad horam ortus	2.	30.	37.
Habebis horam Horologii A, quum Sol erat in Meridiano	8.	49.	52.
Eodem modo quæratur hora horologii B, cum Sol erat in Meridiano, quæ ſit	8.	38.	5.
Sed hoc horologium ſingulis diebus 7. ſecundis tardius motum retardatur ſpatio 101. dierum a 2. Martii ad 1. Junii	0.	11.	47.
Quæ propterea ad inventam horam addita, datur	8.	49.	52.
Id eſt, eadem hora, quæ per horologium A. inventa eſt; ad quam nunc addita æquatione 1. Junii	0.	18.	10.
Prodit	9.	8.	2.
Hæc eſt dici hora loci in quo horologia adaptata ſunt, quæ cum coincidit cum meridie loci obſervationis;			
Differentia eſt	2.	51.	58.
Quare hic ultimus Meridianus tanto orientalior eſt; quibus horis reductis ad gradus,	*gr.*	*min.*	*ſec.*
uti ſupra docuimus prodeunt	42.	59.	30.

Patet te hoc modo invenire longitudinem loci, in quo meridie vel Sole exiſtente in Meridiano fuiſti; quæ differt a longitudine loci, in quo obſervas Solis occaſum,

ſum, ſed ſine ſenſibili errore æſtimare potes, quantum paucis horis progreſſus fueris, vel longitudo mutata fuerit: Potes etiam, loco obſervationis ortus & occaſus Solis, prius Solis occaſum, veſperi obſervare, & dein proximo mane ortum, utroque tempore notando horam Horologiorum; & inde computa eodem modo horam in loco diſpoſitionis, quum media nox erat in loco obſervationis, & detege differentiam longitudinis ut ante. Tandem potes quoque loco ortus & occaſus Solis obſervare duas æquales ſolis altitudines ante & poſt meridiem, annotando horam horologiorum, & computando eodem modo, quo diximus de ortu & occaſu; conſiderandum tamen eſt, Solis altitudines optime obſervari, quando Orienti vel Occidenti proximus eſt, ut antea notatum.

Licet forte quis cenſeat, in praxi hujus methodi, inter ante & pomeridianam obſervationem, quieſcentem navem deſiderari, aut quæ parum transferatur; certum tamen eſt, progrediendo nullum ſenſibilem errorem cauſari poſſe, in quantum interea eundem teneas curſum, æquabili velocitate.

Primum enim, ſi curſum Orientem vel Occidentem verſus dirigas, nullus omnino error erit, ſed certo concludere poteris, qua longitudine meridie vel mediâ nocte fueris, unde ergo, uti antea dictum eſt, ſatis exacte æſtimare potes, ubi ſis ultimæ obſervationis tempore.

V. G. pone, quod ante meridiana Solis altitudo 10 graduum obſervata ſit, quum horologia indicant 8. horas & pomeridiana æqualis altitudo quum horologia indicant 2. horas; & quod inter utramque obſervationem æquabili velocitate Orientem verſus navigaverim, licet inſcius me 1. gradum in longitudine progreſſum eſſe, id eſt, 1. gradum paralleli juxta quem navigo: Agens jam ſecundum præſcriptam regulam, comperio longitudinem 15. gradus Orientem verſus, calculum ineundo a loco, in quo Horologia fuere diſpoſita. quam longitudinem 15. graduum dico eſſe loci, ubi meridie fui.

Quod ita demonſtratur. Quoniam locus veſpertinæ obſerva-

vationis uno gradu Orientalior eſt, quam matutinæ; certum eſt in loco veſpertinæ obſervationis Solem 4. minuta prius perventurum eſſe, ad altitudinem 10. graduum, quam in loco matutinæ. Duorum enim locorum ſub eodem paralelo ſitorum, quot gradus unus altero Orientalior eſt, totidem 4. minutis prius in illo obſervantur ſingulæ Solis altitudines; ideo ſi in priori loco cum navi ſubſtitiſſem, Solem veſpertinâ obſervatione reperiſſem ad altitudinem 10. graduum quum horologia indicabant non 2. horas, ſed 2. horas 4. min. ubi tum loci ejus longitudinem, juxta regulam, inveniſſem 14½. gradus Orientem verſus. Sed certum eſt, me in priori temporis dimidio inter 2. obſervationes progreſſum fuiſſe ½ gradum, quoniam ponitur, me toto tempore profeciſſe 1. gradum, velocitatemque fuiſſe æquabilem. Eram igitur meridie in longitudine 15. graduum Orientem verſus, ſicuti prius erat inventum.

Pariter poteſt demonſtrari, progreſſum navis Occidentem verſus nil obſtare, ſed regulam ſequendo, iterum invenire longitudinem loci, quem meridie prætemavigaſti.

Si jam curſus inter 2. obſervationes Meridiem verſus vel Septentrionem deſciſcat, imo licet fieret directe Septentrionem vel meridiem verſus, modo ponatur æquabilis velocitas, nullus inde orietur error ſi Solis altitudo ſumatur, quando prope Orientem vel Occidentem eſt, quibus in locis alibi quoque dictum eſt optime fieri obſervationem. Ratio hæc eſt, quando 2. loca Septentrionaliter vel Auſtraliter a ſe mutuò diſtant, & ſolummodo 1. vel 2. gradus in latitudine differunt, ſi Sol reſpectu unius loci in Oriente vel Occidente verſetur, ad certam ſupra horizontem altitudinem, etiam quam proxime eodem tempore ad eandem altitudinem ſupra horizontem alterius loci apparebit. Ita ut comperiam, licet navis inter matutinam & veſpertinam obſervationem 2. gradus navigaret, quod raro vel nunquam accidit, nullum tamen in longitudine errorem hinc oriri poſſe, vel tantum paucorum minutorum.

Præ-

Præſcriptis ergo modis, vel per ortum & occaſum Solis, vel per occaſum & ortum Solis, vel per 2 æquales Solis altitudines, tuto ſemper uti poſſumus, non obſtante progreſſu navium; quemcunque hæ teneant curſum.

Si autem procul ab Æquatore Septentrionem vel Meridiem verſus naviges, præſertim hyeme, altitudo Solis lente mutatur, unde incertæ ſunt obſervationes; ſed iis in locis gradus longitudinis ſunt breviores, vel pauciora milliaria continent quam prope Æquatorem, ideoque errores in inveniendis longitudinibus eo minus ſenſibiles ſunt.

IX.

Potes verò, præſertim in iis oris, quæ procul ab Æquatore Septentrionem vel Auſtrum verſus remotæ ſunt, vel etiam ubicunque velis, præſcriptam regulam ad praxin vocare, obſervando 2 æquales altitudines cognitæ alicujus ſtellæ, quæ multum attollitur ſupra Horizontem. Nam inde ſecundum memoratam regulam, diſces quâ horâ Horologiorum in Meridiano fuerit ſtella, & porro cognita ejuſdem *aſcenſione recta*, ut & *aſcenſione recta* Solis, facile inde ſupputabis horam ſolarem, qua comparatâ cum horâ Horologiorum, ut ante, habebis longitudinem loci, ubi fuiſti ſtella exiſtente in Meridiano.

X.

Quando Horologia, quorum aliquamdiu motus fuit accuratus, ab invicem paululum differunt, prout diuturnitate temporis facile accidit, ut unum vel alterum minuto circiter deficiat, eo in caſu computatio ineunda eſt erit ſecundum iſtud, quod celerius movetur: niſi noris cauſam veriſimilem ob quam citius moveatur; facilius enim Penduli motus retardatur, quàm acceleratur: nam filum, cui Pendulum appendet, poterit forſan per violentam navis agitationem nonnihil extendi, ſed nequit contrahi.

X I.

Quando videndam ſe offert regio cognita, ne negligas annotare longitudinem illius, quantum exacte fieri poterit, ex inventa longitudine loci in quo verſaris; Primo ad corrigendas inde mappas marinas, poſtquam longitudo loci fuerit diverſis temporibus comperta eadem, ita ut nil amplius de ea dubites. In his enim mappis quantum attinet ad ſitum locorum Orientem & Occidentem verſus, multa ſuperſunt emendanda. Secundo ut ſcias, in proſecutione tui itineris, quantum reſpectu loci viſi velificando progreſſus fueris ad Orientem vel Occidentem: etiamſi infortunio, vel negligentia, omnia quieſcant Horologia, poteris eadem ad motum rurſus adaptare, & diſponere ad horam per Solem compertam. computando porro longitudinem ab ejusdem loci viſi Meridiano. Nam nullatenus teneris certum Meridianum alicujus loci cogniti, pro initio computationis longitudinum habere, cujus uſus tantum eſt in mappis vel Tabulis longitudinum, in quo caſu uſu venit Meridianus montis Pici in inſula Teneriffa, vel Meridianus inſularum Corvo & Flores; occidentaliſſimarum Azorum vel inſularum Flandricarum, vel cujusvis alterius loci: & foret egregium (quod non obtinet) ſi omnes auctores unum eundemque Meridianum pro primo eligerent, ut ſingula loca iisdem gradibus longitudinis pariter ac latitudinis determinarentur: ſed in itinere ſatis eſt longitudinum differentiam obſervare, initio computationis facto a Meridiano cujuscunque loci.

X I I.

Si accidat, ut mari medio omnia Horologia quieſcant, quam primum fieri poteſt, rurſus eadem ad motum adapta, ut

ut illorum ope ſcias, quantum dein ad Orientem vel Occidentem progreſſus ſis, quod non parvi eſt momenti, nam defectu hujus notitiæ, nonnunquam violentis fluctibus ita abriperis, ut, licet vento ſecundo naviges, tamen retrorſum abigaris, cujus rei varia dantur exempla.

F I N I S.

EXCERPTA EX LITERIS DATIS LONDINI $\frac{13}{23}$ JANUARII MDCLXV.

Tandem Navarchus Holmius huc advenit, & relatio, quam ipſe mihi communicavit de experimento, quod de noſtris Horologiis fecit, plane nos certos facit de bono, qui ſperandus eſt, ſucceſſu; Cum ad inſulam St. Thomæ ſub æquatore eſſet, ut inde huc veniret, coactus fuit, longiſſime Occidentem verſus curſum dirigere, proſperum ut obtineret ventum; cum ergo ſub ejus auſpiciis quatuor darentur naves, omnes ſimul navigarunt per 600 *milliaria non mutato curſu: cum dein ſecundum ventum nacti eſſent quo peterent littora Africæ, eo tendebant, curſum ſuum Orientem inter & Septentrionem dirigentes; cumque hoc curſu* 4 *vel* 500 *milliaria confeciſſent, judicabant navitæ* 3 *navium quæ ſub ejus erant auſpiciis, ſe procul a prædictâ orâ eſſe, ita ut non ſufficientem aquæ quantitatem haberent, dum eo pervenient; Navarchi Holmii navis ſatis habebat; ſed ubi audiret, quid ſentirent cæteri, qui tribus reliquis præerant navibus, omnes nautas & gubernatores convocari juſ-*

ſit, ut deliberarent de eo quod faciendum eſſet. Ubi verò vidiſſet commentarios, & ephemerides, quas illi, qui præerant iis navibus proferebant, & conjecturam de loco in quo verſabantur; cumque poſt longas deliberationes, omnes cenſerent, præſtare ad Barbadas trajicere, quam oras Africæ quærere, quia ventus longe citius eos illuc transferret, dixit ille: Viri computatio veſtra cum noſtra minimè convenit; nam ſecundum Horologia mea proceſſi, unde concludo, vos errare omnes, ſtatuendo nos multò longius Occidentem verſus eſſe progreſſos, quam revera ſumus, unius error eſt 120 *milliaria, alîus* 100, *alîus* 80: *verùm ita Horologiis confido ut hac vice experimentum facere velim; nam ſecundum meam computationem inſula del Fuogo (quæ una eſt ex inſulis Capoverdæ ſeu promontorii Heſperii,) non ultra* 30 *milliaria a nobis abeſt; Ibi nobis aquam poſſumus curare, & eo curſum dirigere conſtitui; Si vera eſt computatio, multum præſtabit nobis hanc viam ingredi, quam a vobis oſtenſam; ſin evenerit aliter, biduum tantum producemus navigationem, ſatisque aquæ interim ſupererit, ut Barbadas perveniamus; quoniam tanta mihi in navi copia eſt, ut vobis defectum veſtrum ſupplere queam; Addens quem curſum tenere vellet, mandavit ut ſequerentur ipſum cæteri. Poſtero mane detegebant inſulam del Fuogo, & opportuno illuc advenêre tempore, uti prædixerat: Cogor hic deſinere, communicaturus tecum reliquos omnes caſus peculiares, quos ſcriptis mandare promiſit, quamprimum illos nactus fuero.*

Nota, hæc Horologia fuiſſe ex primo Pendulorum genere, nec tam exacta quam recentiora.

EX-

EXCERPTA EX LITERIS HAGÆ COMITUM, DIE XXVI. FEBRUAR. MDCLXV. DATIS.

Cum per aliquot dies neceſſe mihi foret cubiculum tenere, & variis obſervationibus circa duo mea novæ fabricæ Horologia pendula tempus impenderem, mirum quendam eorum effectum, & a nemine unquam vel cogitandum, detexi. Suſpenſa enim juxta ſe invicem ad diſtantiam unius aut duorum pedum, tam accurate congruebant, ut ſine ullâ variatione pendulorum vibrationes ſimul peragerentur. Quod cum per aliquod tempus impenſe miratus fuiſſem, tandem reperi ex aliquâ quaſi ſympathiâ id oriri; ita ut ſi pendula moviſſem vibrationibus diverſis & ut ita dicam intermixtis, intra dimidiæ horæ ſpatium conſona rurſus fierent, & ſibi mutuo, quamdiu motum non turbabam, reſponderent. Remotis deinde à ſe invicem Horologiis, & ad diſtantiam 15. pedum ſuſpenſis, uno die quinque ſecundorum diſcrepantiam animadverti, quæ clare demonſtravit, priorem pendulorum convenientiam, uti dixi, à ſympathia quadam debuiſſe proficiſci, quæ, meo quidem judicio, unicè inſenſili aëris agitationi, per pendulorum motus productæ, adſcribi poteſt. Continentur tamen Horologia ſuis Capſis, quarum utraque ſi omne plumbum contentum numeres, centum fere li-

brarum pondus æquat. Et hoc obſervandum, pendula, cum congruunt, non parallelis motibus ferri, ſed contrariis, nunc accedendo, nunc recedendo. Quando autem horologia ad parvam diſtantiam rurſus à me fuere poſita, pendula, priorem convenientiam brevi tempore recuperarunt.

Nec hiſce contentus, aſſerem latum tres pedes, craſſum unum pollicem, ita interpoſui, ut pars inferior fundum tangeret, ſuperior Horologia excederet & quaſi ſepararet. Non turbata tamen fuit motuum concordia, ſed dies noctesque perduravit, imò ſi ipſe turbaſſem, brevi inſtaurata fuit. Nunc in id incumbo, ut quam accuratiſſime Horologia concordent, experturus deinde ad quam usque diſtantiam ſympathia hæc ſeſe exerat; ſed, ut ex obſervatis auguror, non infra 5. aut 6. pedes ſubſiſtet. Major tamen horum omnium eſt expectanda veritas, quam præſtabit diligentia mea, & accuratior in rei cauſas inquiſitio.

Quicquid ſit, habemus duo Horologia, quæ nunquam inter ſe diſcrepant: quod etiamſi mirum ſit, tamen eſt veriſſimum. Addo, præter Horologia quæ novo hoc invento conſtructa ſunt, nulla alia idem præſtitiſſe; unde ſimul patet, quam accurata illa ſint, quæ ad perpetuum conſenſum tantillum requirunt.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

DE
HUGENIANA
CENTRI OSCILLATIONIS
DETERMINATIONE
CONTROVERSIA.

I.

Obſervationes Abbatis Catelani in propoſitionem, quæ fundamentum eſt 4ᵉ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii.

DOminus Hugenius in tractatu ſuo de Pendulis, ut nil quod ad materiam ſpectat intactum relinqueret, hanc diviſit in 5 partes, in quarum 4ᵃ. fuſe examinat quæſtionem de *Centro Oſcillationis* vel *vibrationis*. Sed cum difficile ſit animo ſemper æqualiter attento abſtruſas veritates, quales ſunt Mathematicæ, perpendere; non eſt quod miremur, ſi quæſtionem illam non æque accurate, quam quidem reliquas ejusdem operis, examinaverit. Principium autem, quo nititur totum ejus Syſtema Oſcillationis hoc eſt.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compoſitum atque e quiete dimiſſum, partem quamcunque Oſcillationis integræ confecerit; atque inde porro intelligantur pondera ejus ſingula, relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quo usque poſſunt aſcendere; hoc facto centrum gravitatis ex omnibus compoſitæ, ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam Oſcillationem obtinebat *. * Vide ſupra pag. 126.

Ut parum firmam propoſitionem hanc demonſtremus, ſufficiet obſervaſſe; vim, quam vocamus gravitatem, longe aliter agere in pondera inter ſe juncta quam in pondera a ſe invicem ſeparata. Sint A & B æqualia pondera, quorum TAB XXVIII. Fig. I.

E e non

non conſiderantur neque magnitudo neque figura, quaſi ſingula in unicum punctum reducta forent; ſi ſeparatim ſuſpenſa ex eodem puncto D, & elevata ad idem planum Horizontale D A B, dimittantur usque ad F & G, gravitates eorum, ex ratione Mechanica, quæ cum experimentis, & principiis Phyſices congruit, augebuntur in tali ratione, vel quod idem eſt, acquirent velocitates tales, ut harum quadrata ſint inter ſe ut altitudines A H & B I. unde illa pondera perpendiculariter deſcendunt ad Horizontem.

Quod ſi dein pondera hæc duo, lineâ aut virgâ inflexili A B, quam pondere expertem ponimus, conjungamus, & ex eodem puncto D, ad memoratas diſtantias D A & D B, ſuſpenſa, dimittamus ad F & G ab eâdem, quâ ante, altitudine: Pendulum ex illis compoſitum, acquiret tantum velocitatis quantum ſumma duorum Pendulorum ſimplicium, quoniam commune gravitatis centrum E idem, quod antea, manebit, & ponderum non mutatur ſitus reſpectu centri Telluris; ſed partes, in quas tota illa velocitas ſe diſtribuet ponderibus A & B, erunt inter ſe ut arcus A F, B G, vel ut radii D F, D G; quoniam in hoc caſu ratio inter motus ponderum pendebit ab eorum ſitu reſpectu puncti ſuſpenſionis D, quod eſt motuum centrum. Triangula autem H A F & I B G; ut & triangula A F D, B G D cum ſint ſimilia, latera eorum A H & B I, A F & B G, D F & D G ſunt proportionalia, id eſt datur eadem ratio inter altitudines, unde pondera A & B deſcendunt, & inter velocitates quas acquirunt deſcendendo; ſed altitudines ſunt eædem ac in priori ſuppoſitione; ergo velocitates ſunt diverſæ, quoniam illæ altitudines, quæ ſunt proportionales velocitatibus ponderum ſimul appenſorum, non ſunt proportionales niſi quadratis velocitatum, quando ſunt ſeparata.

Porro ponamus pendulum compoſitum in vibratione ſuâ occurrere plano duro D F G, quo rumpatur, ita ut a ſe invicem pondera ſolvantur, erunt hæc reflexa juxta tangentes arcuum F A & G B ad altitudines, quæ inter ſe erunt ut quadrata velocitatum, quas cadendo acquiſivere, id eſt, ut quadrata radio-

radiorum D F & D G, vel horum proportionalium A H & B I. nam ſeparatio ponderum non mutat quantitatem motus eorum: efficit ut moveantur juxta legem corporum cadentium, quæ non inter ſe conjuncta ſunt. Demonſtratur in Mechanicis, altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde deſcendit, vel ad quam aſcendit, commune gravitatis centrum multorum ponderum, æqualem eſſe ſummæ altitudinum, quarum reſpectu (gallice *par raport auquelles*). pondera deſcendunt vel aſcendunt, diviſæ per eorundem numerum: ſed probavimus pondera, quæ ſeparantur, rupto pendulo percuſſione in planum oſcillationi illius oppoſitum, iterum aſcenſura eſſe, ad altitudines diverſas ab iis, unde deſcenderunt, & quidem tales, ut ſummæ ad utramque partem æquales eſſe nequeant; nam ultimæ altitudines ſemper habent pro radicibus quantitates primis proportionales, & præterea eandem, quam eorum radices componentes ſummam, quæ exprimit totam celeritatem penduli A B; ſi ergo diverſas illas ſummas ſeparatim dividamus per numerum ponderum, habebimus altitudinem ad quam centrum commune gravitatis iterum aſcendit, diverſam ab illa, unde deſcendit; quoniam ſunt partes aliquotæ ſimiles quantitatum inæqualium.

Propoſitio igitur Domini Hugenii falſa eſt, & conſequenter quidquid concluſit circa centrum Oſcillationis corruit; vera autem Mathematica hujus quæſtionis ſolutio hæc eſt.

II.

Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis.

QUæſtio de determinando centro Oſcillationis, ſi bene intellecta fuerit, haud difficilis eſt. Centrum Oſcillationis vocatur punctum mobile in Pendulo ad talem ab axe, vel centro ſuſpenſionis, diſtantiam, ut ſi omnes aliæ Penduli partes deſtruerentur, illa ſola pergeret in vibrationibus ut antea; id eſt eodem tempore ac totum Pendulum; Quod ita non fiet cum aliis partibus ſingulis ſeparatim ſumtis; nam

quæ axi viciniores ſunt, breviores & frequentiores vibrationes peragent quam remotiores, ſi arcus ſimiles deſcribant, & aër non reſiſtat.

Cujus rei ratio eſt, quod viciniores deſcribant arcus minores & acquirant celeritates majores reſpectu arcuum quam remotiores: nam arcus ſunt proportionales quadratis, & velocitates radicibus eorum; quo autem radices minores ſunt inter ſe, eo majores ſunt reſpectu quadratorum ſuorum.

Cum in Pendulo omnes partes niſi ſimul, propter earum conjunctionem, moveri nequeant, vibratio minus diſtantium ab axe ita retardata eſt a vibratione remotiorum, & vibratio remotiorum ita accelerata eſt a vibratione aliarum, ut inter illas detur compenſatio velocitatum proportionalis arcubus quos deſcribunt; ita ut tempus vibrationis totius Penduli medium ſit inter tempus, quo Oſcillationem peragunt ejus partes a ſe invicem ſolutæ, ut ſit æquale ſummæ illorum temporum, diviſæ per numerum partium, quas ut Mathematice & exactiſſime procedamus conſideramus, ac ſi reductæ eſſent in puncta.

Conſtat experimentis, & per Philoſophiam Carteſianam demonſtrari poteſt, omnia gravia tellurem verſus cadere in temporibus quæ ſunt in ratione ſubduplicatâ, vel ſicuti radices, altitudinum, unde deſcendunt, ſi verticaliter deſcendant; quod etiam & ex principiis Galilæi demonſtrari poteſt, ſi cadant per arcus ſimiles, qui incipiunt omnes in eodem plano.

Hæ altitudines in Pendulis, quæ deſcribunt arcus ſimiles circa axem, quocum forrmant idem planum, ſunt inter ſe ut diſtantiæ ab axe, circa quem moventur.

Propoſita ergo quæſtio eo redit; *ut dividamus, per numerum partium Penduli, ſummam radicum diſtantiarum partium ab axe. vel generaliter ſummam linearum rectarum quæ repræſentant tempora vibrationium partium ſeparatim ſumtarum; ut habeamus lineam rectam, quæ ſit menſura temporis, quo vibrationes ſuas peragit Pendulum, cujus conſequenter quadratum vel 3a. proportionalis erit diſtantia inter axem & centrum Oſcillationis.*

Applicatio hujus principii tribus magnitudinibus quas habet Geometria pro objecto ſatis facilis eſt. Ad

1. Ad determinandum centrum Oſcillationis lineæ rectæ ſuſpenſæ ex axe, debemus illam concipere, diviſam in partes æquales infinite parvas, vel in omnibus ſuis punctis. Parabola dein ſuper maximâ lineæ ab axe diſtantiâ deſcribenda eſt, cujus vertex ſit punctum axis in quod terminatur hæc diſtantia & parameter linea quæ eſt unitas reſpectu ejusdem diſtantiæ. E quovis lineæ puncto ducenda eſt axi parallela quæ occurrat parabolæ, ejusque applicata fiat, ſumma omnium applicatarum ſimilium eſt æqualis rectangulo, cujus altitudo eſt linea propoſita, & baſis radix diſtantiæ inter axem & centrum Oſcillationis quæſitum; nam ſumma illa eſt Parabola, vel Parabolæ portio, cujus Diameter eſt linea data, & Parameter tertia proportionalis illi lineæ & maximæ ab axe diſtantiæ; vel 4^a. proportionalis poſitis hiſce tribus, linea, maxima diſtantia, & differentia hujus cum minimâ.

2. Ut habeamus diſtantiam quâ centrum Oſcillationis Plani remotum eſt ab axe, debemus concipere partem ſolidi Parabolici, cujus Parabolæ habeant pro Diametris maximas diſtantias inter axem & unamquamque linearum parallelarum, quæ implent planum. Si ſolidum hoc in duas partes æquales ſecetur juxta Axis longitudinem; & dimidia pars ſecta fuerit inter applicatas ad diſtantias ab Axe, & inter Plani latera, ſegmentum æquale erit Priſmati, quod pro baſi habet planum, & pro altitudine radicem diſtantiæ axis a centro Oſcillationis ejusdem plani. ſi vibratio fiat circa Punctum vel ſi, quum fit circa Planum, Pendulum ſit compoſitum e partibus, quæ ſint in planis diverſis reſpectu Axis, determinabitur, eâ methodo quâ diximus, quodvis centrum Oſcillationis partium, quæ ſunt in eâdem lineâ rectâ tranſeunte per punctum ſuſpenſionis, vel in eodem plano tranſeunte per Axem; omnia illa Oſcillationis centra facient Pendulum multo ſimplicius & habens idem Oſcillationis centrum, ac primum. Invenietur Oſcillationis centrum dividendo per numerum aliorum Oſcillationis centrorum ſummam linearum rectarum, quæ repræſentant tempora, quibus conficerent peculiares ſuas vibrationes. Tempora illa pendent ab arcubus, vel curvarum portionibus, deſcriptis ab omnibus Oſcillationis centris in vibratione Penduli, qui arcus conſiderari debent ſinguli velut infinita plana diverſimode ad Horizontem inclinata.

3. Quod ad ſolida attinet, concipe illa dividi in parallelas

inter ſe ſuperficies & ad axem perpendiculares; formari debet, ſecundâ ſectione, planum vel ſuperficies curva diſtantiarum inter illorum centra Oſcillationis & axem †, circa cujus puncta moventur. Sic in ſummâ centrorum, quæ ab unâ parte rectas lineas terminant, ex quibus planum hoc, vel ſuperficies illa curva, compoſita eſt, habetur Pendulum magis ſimplex quam ſolidum, & cujus vibratio æque diuturna eſt. Centrum Oſcillationis novi illius Penduli determinabitur transferendo omnia illa centra Oſcillationis particularia ad Axem qui eſt eorum numerus, & ponendo illum axem ita moveri, ut puncta ejus percurrant eosdem arcus ac centra. Si ſolida propoſita ſint Prismata recta, habebunt eadem Oſcillationis centra, ac eorum baſes, ſi hæ fuerint perpendiculares ad axem.

Sic centrum Oſcillationis ſolidi pendet a centris Oſcillationis certarum ſuperficierum motarum circa punctum, quarum commune Oſcillationis centrum eſt centrum Oſcillationis lineæ rectæ motæ circa aliam rectam vel curvam; ita ut non requirantur aliæ regulæ pro corporibus quam pro lineis & ſuperficiebus.

MONITUM.

Obſervationes Abbatis Catelani primùm editæ fuere in 25 *diario Pariſienſi anni* 1681, *& examen Mathematicum in* 29 *diario ejusdem anni. Scripta ambo in primo diario ſequentis anni iterum extant, cum monitu varia deficì in prima editione, quam ſolam Hugenius viderat cum reſpondit; & in qua non reperiuntur ea quæ minori charactere hic edita ſunt. Sola verba ſequentia in prima dantur & in ſecunda fuere omiſſa poſt* †. centrum Oſcillationis hujus plani coincidet cum centro Oſcillationis ſolidorum illorum.

III.

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus reſpondet obſervationi Abbatis Catelani in 4am. propoſitionem Tractatus de centris Oſcillationis.

ADmiratus vidi, Theoriam meam de centro Oſcillationis oppugnari, contra quam per 9 annos, à quibus typis man-

mandata fuit, nemo quid protulit; ſed conſiderata refutatione, qua Abbas Catelanus 4^{am}. meam propoſitionem aggreditur, non vidi, quod ullatenus me feriat. nam ut paucis dicam, in quo fallitur; negat, datis duabus lineis & præter has, duabus aliis, quæ diverſam quam primæ inter ſe rationem habent, ſummam duarum ultimarum æqualem unquam fore ſummæ duarum priorum.

Concipe priores 5 & 10 pedum, & alteras 3 & 12 & vide num harum ſumma æque ac illarum non ſit 15: ut autem pateat errorem ejus inde oriri, utar eodem, quod ille propoſuit, exemplo.

A & B ſunt duo pondera applicata virgæ vel lineæ D B, quæ conſiderari debet ut inflexibilis & ſine pondere; quæ libere notetur circa punctum D: tale Pendulum compoſitum voco e ponderibus A & B; ſi hoc peragat partem vibrationis, Ex. Gr. usque ad D F G, & occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera a lineâ inflexili ſeparentur, & tendat ſurſum eorum unumquodque cum velocitate acquiſita, ad maximam quam poteſt altitudinem, velut ad L & M, ſuper planis inclinatis ſi velimus, quæ tangant arcus A F, B G; dico commune centrum gravitatis ponderum A & B quæ aſcendunt in L & M tunc ad eandem fore altitudinem, ac erat in E, ante vibrationem inchoatam. TAB. XXVIII. Fig. 2.

Abbas Catelanus ut falſam hanc probet propoſitionem, demonſtrat, altitudines, ad quas duo pondera ſoluta aſcendunt, ut hic N L, O M, diverſas eſſe ab iis unde deſcenderunt, ſcilicet A H, B I. id quod veriſſimum eſt ex ratione ab ipſo datâ, quod alteræ ſint inter ſe ut lineæ D F, D G, alteræ vero ut quadrata harum linearum; *ſi ergo dividamus*, inquit *diverſas illas ſummas per numerum illorum ponderum*, id eſt, ſi ſumamus dimidium linearum L N, M O, & dimidium linearum A H, B I. *habebimus ab una parte altitudinem ad quam centrum commune gravitatis aſcendit, & ab altera altitudinem unde deſcendit:* id verum eſt, per diviſionem has duas altitudines detegi. ſed minime concedo, duas ſummas diviſas differre inter ſe; quod Abbas Catelanus probare-

bare nequit; neque igitur, duas inventas altitudines centri gravitatis inæquales eſſe, id quod in concluſione contendit, nam licet altitudines L N, M O, diverſam habeant rationem inter ſe quam altitudines A H, B I, non ſequitur ſummas primarum & ſecundarum differre.

Poſſem præter hunc alium locum obſervare, ubi fallitur Abbas Catelanus, ſed non hærebo, quoniam id, quod profert non ſpectat ea quibus me aggreditur. Unicum verbum addam de examine ejus Mathematico, ut vocat, de centro Oſcillationis edito in diario 15. Dec. 1681. ubi contendit ſe inveniſſe regulam hanc generalem, ſcilicet, *per numerum partium Penduli dividi debere ſummam radicum diſtantiarum partium ab axe; ut habeamus lineam rectam, quæ ſit menſura temporis quo vibrationem peragit illud Pendulum, cujus conſequenter quadratum vel 3ª. proportionalis erit diſtantia inter axem & centrum Oſcillationis.*

TAB. XXVIII. Fig. 3. Relicto omni peculiari examine, ſatis erit ad vitium regulæ detegendum, notaſſe, juxta hoc principium, duas lineas graves ut A B, B C, junctas & inter ſe angulum quemcunque efficientes, ſuſpenſas in B ſemper idem Oſcillationis centrum habere; ideoque vibrationes ſemper fore æque veloces, uti facile intelligunt hi, qui in hiſce materiis parum ſunt verſati; ſed & illi videbunt, quod æqualitas illa vibrationum locum habere nequeat, quoniam augendo angulo tandem duæ lineæ ſimul junctæ unicam efficiunt rectam *a* B *c*, cujus vibrationes forent æque diuturnæ cum vibrationibus anguli A B C, linea vero recta in puncto medio ſuſpenſa, nullas peragit vibrationes, aut ſaltem velocitate infinite exigua movetur.

Porro credo Abbati Catelano ſatis difficile fore, ſuâ regulâ, centrum Oſcillationis in quibusvis particularibus figuris, etiam ſimpliciſſimis, determinare, ſed, ſi id forte perficiat, inveniet, ſuam Theoriam cum experientiâ nunquam convenire, & meam ſemper ſummâ exactitudine eidem reſpondere, ſi modo experimenta exactiſſimè inſtituta fuerint.

Non poſſum hac occaſione ſilentio præterire, P. Dechales, in

in quodam magni ſui Curſus Mathematici loco, memorando experimentum cum Pendulo compoſito ex duobus ponderibus inſtitutum, in quo computans rationem non habuit (ut debebat) ponderis baculi, cui pondera erant applicata, immerito regulas noſtras de determinando centro gravitatis culpare, quaſi non convenirent cum iis quæ ille revera obſervarat.

IV.

Exceptio Abbatis Catelani ad reſponſionem Hugenii.

NOn debebat Hugenius a ſuo principio ſeparare conſequentiam, ut hanc aliter intelligat, quam ego in ſcriptis meis. Prorſus deberem oblitus eſſe Arithmetices, ſi abſolute negarem, ut me facere contendit, *quod 4 magnitudines inæquales poſſint efficere 2 ſummas æquales*, quum nil aliud concludo in ſcriptis, præterquam quod propoſitio Hugenii vera eſſe nequeat, niſi pars ſit æqualis toti. Ut hoc melius pateat, debemus hic proferre propoſitionem illam generalem propriis terminis.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compoſitum, atque e quiete demiſſum, partem quamcunque Oſcillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus ſingula, relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quouſque poſſunt aſcendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compoſitæ, ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam Oſcillationem obtinebat.

Cum hæc propoſitio terminis generaliſſimis concepta ſit, ita ut numerus ponderum, ſitus eorum, duratio Vibrationis, ipſam non mutent, pono, Exempli cauſâ, Pendulum compoſitum e ponderibus duobus æqualibus, & inter ſe ad quam libuerit a ſe invicem diſtantiam junctis. Conſidero porro altitudines, quæ ſunt proportionales quadratis velocitatum in duobus Pendulis ſimplicibus, eſſe inter ſe ut velocitates in

Pendulo compoſito. Nam eandem habent proportionem, quam arcus deſcripti a duobus ponderibus æqualibus, ex quibus Pendulum formatur; duo illi arcus ſunt ſpatia, quæ duo pondera percurrunt, eodem tempore, velocitatibus, quæ neceſſario ſunt ipſis ſpatiis proportionales.

Celeritas totalis Penduli compoſiti, quæ inter partes diſtribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipſæ deſcribunt, ſemper æqualis eſt ſummæ celeritatum, quas eædem partes acquirerent, ſi a ſe invicem fuiſſent ſejunctæ, & omnes ſeparatim ex iisdem altitudinibus & ad easdem ab axe, diſtantias deſcendiſſent. Altitudines ſemper ſunt ut quadrata velocitatum, ſive pondera ſeparatim adſcendant, ſive deſcendant. Omnibus his bene intellectis facile patet, ad hanc propoſitionem redire quæſtionem. *Si habeamus duas magnitudines inæquales* a a *&* b b, *ſummam radicum ipſarum* a † b, *& quadrata partium illius ſummæ, quæ ſint proportionales dictis magnitudinibus, quæque adeo communem denominatorem habeant* a a † b b, *& numeratores diverſos* a^3 † a a b *&* b^3 † a b b, *demonſtrare, ſummam harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æqualia Pendulo alligata dimittuntur, repræſentant, non eſſe æqualem ſummæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent, ad quas duo pondera, poſtquam percuſſione fuerint ſeparata, redeunt, niſi minor ex hiſce magnitudinibus* a a *&* b b *ſit æqualis majori, id eſt, quia iſtæ magnitudines in quæſtione propoſitá ſemper inæquales ſunt, niſi pars æqualis ſit, toti.*

Maxime ſenſibilis hujus veritatis demonſtratio eſt comparatio terminorum quæſtionis per regulas Algebraicas, id quod examinandum relinquo iis, qui uſum illarum regularum norunt. Quod rem ipſam ſpectat, nullius eſt momenti; ſive centrum Mathematicum Oſcillationis bene ſive male determinatum ſit, inventio Penduli nec minus utilis hominibus, nec minus auctore ſuo digna eſt.

V. *Ob-*

V.

Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus.

Si vis gravitatis ageret in corpora tanquam in puncta Mathematica, vel ſi ſpatium contentum ſub Cycloide eſſet diviſibile in infinitas alias Cycloides, ſimiles & parallelas, quidam Geometræ revera demonſtraſſent, uti contendunt, pendula illam debere deſcribere curvam ut Vibrationes, æqualibus temporibus, peragant; ſed nulla datur pars in corpore gravi, quale eſt Pendulum ex cupro vel plumbo, quæ non æque ac centrum Tellurem verſus propellatur magis minusve pro inclinatione, juxta quam movetur; Præterea ſpatium, quod continet Cyclois, non poteſt repleri infinitis aliis Cycloidibus ſimilibus, quoniam tripla circuli ſuperficies æqualis eſſet duplo quadrato diametri. Latet igitur adhuc Geometras, quamnam lineam curvam deſcribat Pendulum, cujus Vibrationes ſunt iſochronæ. Conſequentia hæc patet, ſi conſideremus, in corpore Pendulo, quando centrum vel alia quælibet pars Cycloidem percurrit, partes viciniores Axi, vel inde remotiores, eodem tempore, deſcribere lineas curvas inter ſe ſimiles, ſed quæ non ſunt Cycloides; ut patet ex dictis, & quia in quovis arcu perpendiculares ductæ e tangentibus ſuis ad tangentes Cycloidis ſunt æquales. Omnes itaque partes non habent æqualem inclinationem in deſcenſu, neque Tellurem verſus cum eâdem velocitatis proportione propelluntur; unde ſequitur, Vibrationem totius Penduli, quæ neceſſario pendet a Vibrationibus, quas peragunt partes ejus ſeparatim ſumtæ, differre a Penduli Vibratione, ſi reductum foret ad illam partem, quæ movetur in Cycloide.

Videtur huic potius cauſæ, quam craſſitudini fili, cui pondus alligatur, adſcribendam eſſe artificum praxin, quos experientia cogit curvaturam a Cycloide diverſam laminis tribuere, inter quas ſuſpendunt Pendulum.

Non tamen mihi animus eſt, hic abſolute oppugnare ſententiam illorum, qui credunt corpora gravia moveri, veluti puncta, quæ in Cycloide, ad Horizontem perpendiculari, peragunt ſuas Oſcillationes, temporibus æqualibus, a quacunque dimittantur altitudine. Contendo tantummodo, illud nondum eſſe demonſtratum, niſi alterutrum horum probetur, vel quod curvæ parallelæ Cycloidi eandem habent proprietatem quantum ad motum corporum, licet non ſint Cycloides, vel quod inæqualitas temporis, quod brevius eſt in parallelis, interioribus & Cycloide viciniores Axi, ita moderetur contraria inæqualitate temporis, quod majus eſt in parallelis exterioribus & ipſâ curvâ remotioribus ab Axe, ut compenſatio inæqualitatum ambarum in Cycloide detur, quæ tanquam medium locum tenet inter omnes curvas ipſi parallelas. Geometræ hanc difficultatem examinabunt ſi dignam ſuâ attentione judicent; nec, niſi poſtquam eorum ſententiam novero, obſervationes meas hac de re dare potero.

VI.

Reſponſio ad objectiones Hugenii adverſus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oſcillationis.

HUgenius propoſuit objectionem adverſus propoſitionem deductam ex principio, a me, ad determinandum Mathematice centrum Oſcillationis Penduli, propoſito; ſed debuit examinare id, quod præcedit locum, quem e ſcriptis meis profert, nec generalem habere regulam ad caſum particularem tantum accommodatam, quem elegi, ut uterer exemplo ſimpliciſſimo & facillimo; ſcilicet quando Pendula compoſita ſunt ex partibus, quæ deſcribunt arcus ſimiles circa Axem, quocum faciunt idem planum; tum enim diſtantiæ ab illo Axe ſunt radii arcuum, qui habent eandem inter ſe proportionem, ac perpendiculares ad Horizontem, vel ſinus, qui ſunt altitudines, a quibus ſingulæ partes in Oſcillatione deſcendunt. Itaque cum Pendula, de qui-

quibus Hugenius loquitur, ut probet propoſitionem meam falſam, ſint anguli rectilinei agitati circa verticem, non habentes requiſitam conditionem, me non feriunt. Si concipiamus tales angulos moveri circa Axem, per vertices illorum transeuntem, patet ſummas diſtantiarum Axis ab omnibus punctis linearum, quæ Pendula componunt, eſſe inæquales, prout illæ lineæ efficiunt cum Axe angulos magis minusve acutos. Et meâ regulâ detego ſummas diſtantiarum eſſe æquales Parabolis habentibus pro Diametro maximam ab Axe diſtantiam, & pro Parametro 4^am^ proportionalem poſitis hiſce tribus, lineâ datâ, quæ eadem eſt in quovis Pendulo, maximâ diſtantiâ, quæ variat pro variis angulis, & unitate; unde ſequitur, tempus Oſcillationis valere $\frac{2}{3}$ maximæ ab Axe diſtantiæ, & non in omni caſu idem eſſe; tanto enim brevius eſt, quanto angulus eſt obtuſior, id eſt, quanto Pendulum magis Axi vicinum eſt.

Si Hugenius deſiderat propoſitionem quæ conveniat Pendulis, circa punctum motis, mutanda tantum erunt verba quædam in principio Pendulorum habentibum Axem; loco *radices diſtantiarum illarum*, legendum *ſummæ linearum rectarum, quæ repræſentant tempora Oſcillationum omnium partium ſeparatim ſumtarum.*

Hoc modo propoſitio inſerviet ambobus caſibus. Sed res melius intelligitur per generale Principium, quod propoſui & ita ſe habet. *In eodem Pendulo, cum omnes partes niſi ſimul moveri nequeant, propter ſuam conjunctionem, vibratio minus diſtantium ab Axe, vel puncto ſuſpenſionis, ita retardatur a vibratione remotiorum, & reciproce Oſcillatio remotiorum ita acceleratur per Oſcillationem aliarum, ut detur inter illas compenſatio celeritatum proportionalis arcubus, vel curvarum portionibus, quas deſcribunt, ita ut tempus Oſcillationis totius Penduli ſit medium inter tempora Vibrationum, quas peragerent illæ partes, ſi non inter ſe forent conjunctæ, id eſt, ut ſit æquale ſummæ temporum illorum diviſæ per numerum partium, quas debemus conſiderare ut æquales & infinite parvas.*

Demonſtrare potero in ſequentibus, non adeo difficile eſſe, ut quidem Hugenio videtur, accommodare illud Principium ad particulares magnitudinum Geometricarum ſpecies ſuſpenſarum ex Axe vel puncto.

Quod ad experimenta attinet, paratus ſum demonſtrare hæc ita non poſſe inſtitui, ut perfecte conveniant cum regulis ſimplicibus & generalibus, quæ deducuntur e principiis Mathematicis, eandem ob cauſam ob quam generalis regula, ſtabiliri nequit, certa, & conſtans, in caſibus particularibus, qui dependent a pluribus cauſis, non exacte notis.

VII.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Baſileæ ad Autorem Diarii Pariſienſis, de Controverſia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oſcillationis.

QUum nondum obſervaverim, Hugenium reſpondiſſe, ad exceptionem Abbatis Catelani, quæ ſpectabat primariam ejus de centro Oſcillationis propoſitionem, te haud ægre laturum credo, ſi verbulum ad ejus defenſionem ad te ſcribam. Quicquid D. Catelanus diſputat, eo redit ut probet, *ſummam radicum duarum magnitudinum quarumvis non poſſe in duas partes ita dividi, ut proportionales ſint ad magnitudines datas, utque ſumma quadratorum ipſorum ſit æqualis ſummæ magnitudinum.* Id vero neutiquam in dubium ab Hugenio vocatur, qui tantum affirmat, *ſummam harum magnitudinum poſſe eſſe æqualem ſummæ duarum aliarum, quæ quadratis priorum proportionales ſunt.* Quod & veritati conſonum eſt.

Atque ut oſtendam, controverſiæ omnis cardinem hic verti, utar eodem exemplo de duobus ponderibus æqualibus, & quidem poſitis numeris, ut veritates hæ abſtractæ ſenſui magis obviæ fiant.

Sint

Sint A & B duo corpora ex Axe D ſuſpenſa ita, ut unius diſtantia ab Axe quadruplo major ſit alterius diſtantiâ. TAB. XXVIII. Fig. 4.

Adeoque ſi altitudo perpendicularis B I, ex qua deſcendit corpus B deſcribendo arcum B G, ponatur quatuor pedum, altera A H, unde corpus A delabitur, unius pedis erit. Celeritates igitur, quas ſeparatim cadendo acquirunt, quoniam ſunt ut radices altitudinum, ſe habent ut 2 ad 1. Summa 3, quæ totalem Penduli celeritatem manifeſtat, quando proportionaliter ad altitudines, ſive ad arcus B G & A F dividitur, dat gradus celeritatis, quos obtinent pondera, quando conjunctim in tabulam D G decidunt, videlicet $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, quorum quadrata ſunt $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, unde quæ prodit ſumma, ſane a ſumma altitudinum, e quibus pondera dimittuntur, differt. Veruntamen hæc quadrata proportionem ſolummodo altitudinum O M & N L, ad quas pondera, dum a tabula reſiliunt, adſcendunt, non ipſas altitudines exprimunt; quas inter ratio quidem eſſe poteſt, quæ eſt inter $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, hoc eſt inter 16 & 1, dum ipſa ſumma eſt quinque, quæ eſt ſumma altitudinum B I & A H unde pondera delapſa ſunt.

Nam ſi ponamus altitudinem O M $4\frac{17}{17}$ pedum eſſe, & alteram N L $\frac{5}{17}$, O M ſe habebit ad N L, ut 16 ad 1; & O M † N L erit æqualis B I † A H. Idcirco centrum gravitatis commune ponderum A & B, ubi in L, M pervenere, erit ad eandem altitudinem, quam obtinebat ante Oſcillationis initium. Id clare ex inſpectione figuræ apparet. Pondus enim M tantum ſupra lineam Horizontalem B D elevatur, quantum L infra eam deprimitur, videlicet $\frac{12}{17}$ unius pedis; ſequitur hinc in triangulis ſimilibus M P Q & L Q R latera M Q & Q L eſſe æqualia, hoc eſt medium lineæ M L, quæ duo pondera conjungit, eſſe in interſectione lineæ Horizontalis.

VIII. Ex-

VIII.

Excerpta ex literis D^{ni} Hugenii ad Auctores Diarii Pariſienſis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus reſponſionem ad exceptionem D^{ni} Abbatis Catelani, de centro Oſcillationis.

HUc usque diſtuli reſpondere ad exceptionem D^{ni} Abbatis Catelani, & fere omnis noſtræ controverſiæ oblitus eram, quoniam non audiveram, ullum ex iis qui tales ponderant quæſtiones in illius partes iviſſe. Sed cum ex amicis quidam deſiderarent, ut Geometris facilius redderem litis noſtræ examen; & eo impedirem quo minus illi, qui hanc norunt, ſilentium meum reprehendant, vos rogo ut diariis veſtris, ſequentia velletis inſerere, cum quibusdam veſtrum jam dudum communicata.

Abbas Catelanus, viſâ meâ reſponſione ad primam obſervationem, ſuoque errore cognito, credidit ſe illam poſſe diſſimulare, ſi diceret, obſervationes ſuas ex vitioſo autographo editas eſſe, in quo non ſolum quædam verba deerant, ſed etiam ſex ſeptemve ordine ſequentes lineæ; cumque illæ ſuppletæ ſint in ſecunda Editione, ubi addidit, *& quidem tales, ut ſummæ* cum ſex aliis lineis, propoſitam objectionem omnino mutavit.

Non opportunum tamen duxit hac de re lectorem monere, ne quidem in ſuâ exceptione, in qua poſitâ hac mutatione ratiocinatur. Cùm enim antea ſe demonſtraturum promiſerat, propoſitionem meam 4^{am} de centris Oſcillationum falſam eſſe niſi pars ſit æqualis toti, in præſens ut illud probet, non tantum ponit axioma hoc irrefragabile *totum eſſe majus parte*, ſed præter hoc pro vero habet quoddam, quod ſibi finxit, de motu Pendulorum, principium.

Rem

Rem ita ſe habere oſtendam, & ut mutatam ejus objectionem ſolvam, demonſtrabo principium, quod ponit, verum eſſe non poſſe. Etiam falſum eſſe oſtendam alterum ejus principium generale, quo utitur *in ſuâ verâ ſolutione Mathematica Problematis de centris Oſcillationis*, & tandem ambo hæc principia ſibi mutuò contrariare: non deſpero fore ut ipſe Abbas Catelanus mecum conveniat, ſi ad ſequentia attendat.

Quæſtio ſecundum illum ad hanc propoſitionem redit. Si habeamus duas magnitudines inæquales *a a* & *b b*, & ſummam harum radicum dividamus in duas partes, quæ ſint inter ſe ut *a a* ad *b b*, quæ partes ideo ſunt $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, ut facile per Algebram invenitur, demonſtrare, ſummam magnitudinum *a a* & *b b*, quæ repræſentant altitudines, unde deſcendunt pondera duo æqualia eidem Pendulo alligata, non poſſe æquari ſummæ quadratorum partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quarum quadrata repræſentant altitudines, ad quas pondera, percuſſione ſeparata, redeunt, niſi pars *a a* æquetur *b b*; id eſt (quoniam quantitates in quæſtione propoſita ſunt inæquales) niſi pars æqualis ſit toti.

Hæc eſt propoſitio Abbatis Catelani, quam tantum clarius exprimere conatus ſum, quâ demonſtratâ, ut facile fit comparando duas illas ſummas per calculum Algebraicum, contendit, fundamentalem meam de centris Oſcillationis propoſitionem ruere.

Sed etiam relictâ Algebrâ demonſtrari poteſt illius propoſitio; nam ſi ponatur *a a* æquale eſſe 1; & *b b* æquale 4; ſumma radicum *a + b* eſt 3, & partes proportionales hujus ſummæ ſunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$, faciunt enim junctim $\frac{15}{5}$ hoc eſt 3. Quadrata earundem partium ſunt $\frac{9}{52}$ & $\frac{144}{25}$. Hoc igitur ſolum reſtaret demonſtrandum, ſummam 1. & 4. non eſſe æqualem ſummæ, quæ prodit ex additione $\frac{9}{25}$ ad $\frac{144}{25}$, ſive 5 & $6\frac{3}{25}$ non eſſe æqualia inter ſe; quod ſane per ſe clarum eſt.

Vera ergo eſſet Abbatis Propoſitio niſi affirmaret quadrata partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quæ hic ſunt $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, re-

præſentare altitudines, ad quas pondera ſejuncta redeunt. Non diſſentiet & facile probari poteſt, illud deductum eſſe ex Principio, quod ſibi finxit, & pro fundamento habet propoſitionis ſuæ; ſcilicet, *celeritatem totalem Penduli compoſiti, quæ inter partes diſtribuitur proportionaliter ad arcus, ques ipſæ deſcribunt, ſemper æqualem eſſe ſummæ celeritatum, quas eædem partes acquiſiviſſent, ſi ſejunctæ ſingulæ ſeparatim ex iisdem altitudinibus, & in eadem diſtantia ab Axe deſcendiſſent.* Ponit ergo, ut me refellat, principium hoc, quod falſum contendo; in demonſtratione computationem memoratam ſequar.

D^nus Abbas novit & concedit, detegi altitudinem, unde commune ponderum gravitatis centrum deſcendit, ſi dividamus ſummam altitudinum 1. & 4. (unde duo pondera ſimul alligata deſcenderunt) per 2 numerum ponderum, quæ ergo eſt $\frac{5}{2}$. Concedit pariter, dari altitudinem, ad quam revertitur commune eorum gravitatis centrum, ſcilicet $\frac{153}{50}$, vel $3\frac{3}{50}$, ſi per numerum ponderum duo, dividamus ſummam altitudinum $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ad quas pondera percuſſione ſeparata redeunt.

Centrum ergo gravitatis revertetur altius quam unde deſcenderat, quantum $3\frac{3}{50}$ excedit $2\frac{1}{2}$, quod primario adverſatur Mechanices Principio. Hoc ſi D^nu Abbas efficere poſſit, detectum habebit perpetuum mobile: Quum ergo ejus Principium ex quo falſa ſequitur concluſio, falſum ſit, exinde nil quo mea labefactetur Propoſitio, poteſt inferri vel deduci. Quod ad alterum ejus Principium attinet, quod pro fundamento habet regulæ generalis de determinandis centris Oſcillationis, in eundem inducit errorem. Hoc Principium eſt, *tempus Vibrationis Penduli compoſiti eſſe medium inter tempora Vibrationum partium, id eſt, æquale eſſe ſummæ illorum temporum, diviſæ per numerum partium.* In Pendulo, quale conſideravimus, ubi ponderum diſtantiæ, a puncto ſuſpenſionis, ſunt 1 & 4, ſi ponamus tempus minoris ex partibus ſeparatis eſſe unum, (unde ſequitur, tempus alterius partis ſeparatim agitatæ eſſe duo;)

ſecun-

ſecundum ejus principium, ſumma illorum temporum, quæ eſt tria, diviſa per duo, numerum partium, erit tempus Penduli compoſiti, ſcilicet $\frac{3}{2}$. Hiſce poſitis, nil præterea ponendo præter id quod concedit D^us. Abbas, deteguntur altitudines, ad quas revertuntur pondera, poſtquam a Pendulo compoſito ſunt ſejuncta; nempe $\frac{4}{9}$ & $\frac{64}{9}$; quarum ſumma $\frac{68}{9}$, diviſa per duo, numerum ponderum, dat $\frac{34}{9}$, vel $3\frac{7}{9}$, altitudinem, ad quam adſcendit commune gravitatis centrum, quæ etiam ſuperat $\frac{5}{2}$ vel $2\frac{1}{2}$ unde demonſtravimus centrum deſcendiſſe. Non addo methodum computationis quæ facilis eſt. D^nus. Abbas ergo dum quærit principium bis male divinavit; proprie enim divinare eſt, ratiocinia deducere ex principiis, quæ levem tantum veri ſpeciem præ ſe ferunt; & verum eſſet, quæſtionem de centro Oſcillationis non difficulter reſolvi, ſi, ut ipſe fecit, tantum ponendum foret id, quod ſtatim rem quæſitam determinat.

De cætero, contraria eſſe inter ſe ambo principia clarum eſt; quoniam ut patet, ex his diverſæ ſequuntur concluſiones, altitudines enim, ad quas centrum commune gravitatis aſcendit, diverſæ ex utroque deteguntur, nempe $3\frac{3}{50}$, $3\frac{7}{9}$.

Unum hoc addam, ut reſpondeam difficultati, quam D^nus. Abbas propoſuit, contra motum in Cycloide*, hanc difficultatem ſolutam dari in ipſo meo tractatu de centro Oſcillationis in cujus propoſitione 24 explicavi, quomodo effici queat, ut omnia ponderum Penduli puncta moveantur in Cycloidibus æqualibus; licet in praxi minime neceſſaria ſit correctio hæc.

* Vide ſupra pag. 227.

IX.

Reſponſio D^ni. Abbatis Catelani ad literas D^ni. Bernoulli de Controverſia ſua cum D^no. Hugenio de centro Oſcillationis.*

* Vide ſupra pag. 230.

UT reſpondeam ad has literas, idem repetam, quo utitur D^nus. Bernoulli, exemplum Penduli compoſiti ex ponderibus æqualibus eidem virgæ applicatis, & ex eodem centro

ſuſpenſis, a quo pondus unum quater magis quam alterum diſtat; ita ut altitudines perpendiculares, unde deſcendunt ſint ut 1 ad 4.

Convenit inter nos de proportione inter has altitudines, & de ſumma velocitatum, quas illa pondera acquirerent, ſi ſeparatim ab iis altitudinibus caderent; ſed contendimus de exprimendis his altitudinibus reſpectu ſpatii, quod ſit communis earum menſura, & pro unitate habeatur. Cum omnibus, qui ante me de ſimilibus quæſtionibus ſcripſerunt, pono veros numeros, quibus exprimuntur altitudines, eſſe quadrata ipſorum numerorum qui velocitates deſignant, in illis caſibus, in quibus inter altitudines & inter velocitates non alia datur ratio, præter generalem experientiâ detectam.

Patet autem ex numeris quos in computatione mea detexi, (cum 9 & 144 ducta in $\frac{1}{25}$ pedis, id eſt 6 pedes cum 1 digito 5 lineis & quod excedit, differant cum 1 pede & 4 pedibus, aut 5 pedibus,) ſummas altitudinum, ad quas adſcendunt pondera in exemplo propoſito, non eſſe æqualem ſummæ altitudinum unde deſcendunt, quam æqualitatem D^us Hugenius ponit in generali propoſitione, quâ utitur pro principio in ſuo tractatu de centro Oſcillationis.

D^us Bernoulli reſpondet, quadrata numerorum, qui exprimunt velocitates ponderum, tantum exprimere proportionem altitudinum, ad quas revertuntur poſt illorum ſeparationem, & non ipſas altitudines, quæ quidem inter ſe habere poſſunt rationem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{25}$ dum tamen harum ſumma eſt 5, quæ eſt ſumma altitudinum, unde pondera deſcenderunt. Nam altitudines, ad quas revertuntur ſeparata, ſunt juxta illum $4\frac{12}{17}$ & $\frac{5}{17}$, quarum ſumma valet 5, ut ſumma primarum altitudinum 1. & 4. Iterum reſpondere non difficile erit. Rogatum velim D^um Bernoulli, dum contendit, proportionem quadratorum numerorum, qui velocitates exprimunt, tantum conſiderandam eſſe, quâ motus lege, & per quodnam principium Mechanicum pondera, de quibus agimus, potius redeant ad altitudines, quas ille notavit, &

quæ cum ipſius ſententia congruunt, quam ad illarum proportionales $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$, quarum ſumma eſt 6; vel ad $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{12}$ quarum ſumma eſt 4; vel ad innumeras alias ſimiles, quæ habeant inter ſe eandem proportionem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{27}$, ſed ex quibus altitudo centri gravitatis reverſi major minorve, quam unde deſcendit deducitur. Certè pondera non revertentur ad omnes altitudines proportionales quadratis velocitatum, quas deſcendendo acquiſiverunt, quoniam gravitas gradatim retardat, & tandem deſtruit velocitates, cum quibus reflectuntur pondera.

Quid ergo eveniet? rogo D^um. Bernoulli ut illud explicare velit? An Natura per ſe incerta de eo quod ſibi agendum eſt, pro voluntate D^ni. Bernouilli actura eſt? Cum ipſius veniâ, hac de re dubitabo, donec ſententiam ſuam ſolidis argumentis, ex Phyſica deductis probet. Interim credo me jure concludere, rationibus quas affert pro D. Hugenio hoc confirmari, propoſitionem hujus generalem & fundamentalem de centris Oſcillationis non eſſe omni exceptione majorem.

X.

Dn. Bernouillii narratio controverſiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dn. Catelani.

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoullii Lipſiam miſſis.

Menſe Septembri A. 1681. Abbas Catelanus propoſitionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horo-*

 logio

logio Oſcillatorio inſcripſerat, adortus eſt, formata contra illam objectione; in qua quia mentem ſuam minus feliciter expreſſit, anſam dedit iſti controverſiæ, quæ hucusque fere inter illos viguit. Verum quidem eſt, eum initio A. 1682. objectioni ſuæ, additis paucis lineis, variationem quandam induxiſſe; ſed quoniam ejus partes ſatis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris ſui excitavit opinionem, quaſi perſuaſum haberet, ſummas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim deſcendunt, & ad quas poſtmodum ſeparatim aſcendunt, inæquales eſſe debere hanc ſolam ob cauſam, quod *priores altitudines ſint proportionales ipſis ponderum celeritatibus, poſteriores vero non niſi quadratis iſtarum celeritatum.* Quare etiam Hugenius, id unicum Catelano ſcrupulum movere ratus, reſpondere abſtinuit, usque in menſem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12 breviter monſtravit, fieri utique poſſe, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant ſummam, etiamſi diverſam ab illis rationem habeant, neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον Catelani ψεῦδος quod tamen in prima jam objectionis ſuæ impreſſione manifeſte ſatis prodiderat, dum ſuppoſuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compoſitum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat ſumma pendulorum ſimplicium;* id vero ſicco pede præteriit Hugenius, vel quod non penetrarit ſtatim, ob nullam periodorum connexionem, quorſum falſa iſta Catelani ſuppoſitio tenderet, vel potius quod illi ceu veriſimili admodum tum ipſemet adſtipularetur. Catelanus interea Hugeniano reſponſo non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis Algebraicis rem aggreſſus eſt, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compoſiti æquet ſummam celeritatum partium ejus ſeparatarum.* Quo facto controverſia iſta ultra annum ſopita jacuit. Me quod ſpectabat, cui Hugenii liber tum nondum viſus, nedum lectus fuerat, ſcopum alium non habebam, quam illuſtrare ejus reſponſionem, remque examinare, qualiter ab ipſo examinata, atque in Actis recenſita

fue-

fuerat. Animadvertens itaque, Catelani principium ab Hugenio non refutatum eſſe, & ego illud intactum reliqui, ſufficere mihi ratus, ſi Hugenianum reſponſum ſimpliciter applicarem ad præſentem controverſiam, propoſito cum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compoſiti; ubi innuere ſaltem volui, quod ſuppoſito pro totali ejus celeritate numero ternario (quicquid ſtatuatur de celeritatibus utriusque ſeparatim ſpectati ponderis, dummodo eæ ſint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente Hugenii ſignificare debeant non niſi *rationem altitudinum*, ad quas aſcendant ſeparata pondera, minime vero *ipſas altitudines* (quod ipſe quoque poſtmodum indigitavit Hugenius in ſecunda reſponſione, 8 Jun. 1684.*) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, ſe mutuo menſurare non poſſunt; partim etiam, quia ipſe Catelanus urgere ſaltem videbatur, altitudines eſſe *proportionales* quadratis, vel *ſicut* quadrata celeritatum; tametſi in proxime ſequenti calculo quadrata iſta pro ipſis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo poſt, & perlecto Hugenii libro, animadvertebam, Propoſitionem controverſam ex priore Hypotheſium, quas Auctor initio ſtabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi poſſit, quin ſimul evertatur altera; quocirca judicabam, ſi Catelano falſa fuiſſet viſa propoſitio, eum potius ipſam adoriri debuiſſe Hypotheſin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero cum hujus principii veritatem nullo jure in dubium revocare poſſem, atque ſimul etiam ſeriem ratiocinii a Catelano ſatis confuſe propoſiti evolvere cœpiſſem, errorem ejus detexi illico, falſamque cognovi eſſe, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compoſiti æqualem eſſe ſummæ celeritatum partium ejus ſeparatarum.* Atque ut oſtendam, animadverſum mihi fuiſſe errorem, priusquam Hugenii epiſtola de 8. Jun. lucem aſpexiſſet, afferam hic cauſam phyſicam, omiſſam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compoſiti celeritas perpetuo minor ſit celeritate partium ejus ſeparatarum: Ponamus majoris eviden-

* Vide ſupra pag. 232.

TAB. XXVIII Fig. 5. dentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili D B libere hinc inde moveri poſſe, ſic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis ſecum rapiat pondera, non tamen impediat deſcenſum illorum in linea recta centrum Terræ verſus. Quo poſito, conſtat, utrumlibet pondus ſigillatim dimiſſum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga D B, utpote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; id eſt ſi pondus A absque virga certo tempore conficit ſpatium A H, & pondus B ſpatium æquale B N, utrumque etiam cum virga, ſed ſigillatim, dimiſſum eodem tempore idem ſpatium A H & B N conficiet. Conſtat inſuper, quod ſi gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipſorum reſpectivis ab axe diſtantiis, virga nullum adhuc ipſorum deſcenſui afferret impedimentum, propterea quoniam exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H & alterum in I, vel prius in L, poſterius in N, ſive absque virga, ſive cum virga, ſive ſigillatim ſive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, ſic ut pondera eodem tempore æqualia ſpatia A H & B N transigere annitantur, & tamen interea pondus A junctim dimiſſum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere niſi ad L, dum pondus B jam eſt in N, hinc ſequitur, gravitatis vim in pondere A non eſſe exhauſtam; adeoque reſiduum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipſum axem D, eundemque premendo aliquam ſui partem ibidem inſumere & deperdere; ſiquidem virga hocce caſu inſtar vectis conſiderari poſſit, prout extra dubium eſt; quod ſi corpus B infinite tarde moveri, id eſt, firmum & ſtabile eſſe intelligatur ſicut axis D, corpus A partem ſui ponderis æque in axem D atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive eſt, ſi quis examinare vellet, quantam partem celeritatis ſuæ pondus A in premendo axe D conſumere debeat, eum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falſitatem Hugenianæ Hypotheſeos, inque hac fundatæ Propoſitionis, detegere poſſe.

Ro-

Rogantur hac occaſione eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obſervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, ſed tardius moto: ſi namque celeritatis exceſſus, qui hinc inde communicandus eſt, in eadem ratione diſtribueretur, in qua diſtribuitur onus aliquod, quod vecti duobus ſuſtento fulcris impoſitum eſt, nimirum in ratione reciproca diſtantiarum mobilis a fulcris, tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus, ſummam altitudinum, ad quas aſcendunt ſeparata penduli pondera, viciſſim nunc minorem eſſe ſumma altitudinum, e quibus antea conjunctim deſcenderant, quod iterum Hugenianam Propoſitionem everteret.

En calculum: Eſto altitudo A L $= 1$ ped.
Altitudo B N $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, ubi deſcendit ſeparatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquiſita in puncto N, quando cadit ſeparatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, quando deſcendit conjunctim $= x$

Igitur Exceſſus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus exceſſus, quæ ſoli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x, x :: 4, 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum ſumma $4\frac{13}{17}$ minor eſt $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamſi commune gravitatis centrum juxta illum altius aſcendere deberet, quam deſcendit, nondum tamen ſequatur, repertum fore motum perpetuum, ut ſibi perſuadet Ill. Hugenius; quoniam in iſtis abſtrahi ſolet ab aëris reſiſtentia, a diminutione celeritatis, quæ neceſſario ſequitur disruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorumque

 que

que obſtaculorum ; prout ipſa quoque hæc aëris reſiſtentia in cauſa eſt, cur ſimplex pendulum motum ſuum non continuet, ut maxime in Hypotheſi Hugeniana ad eandem aſcendere debeat altitudinem, a qua deſcendit.

XI.

Litteræ D^ni^ Marchionis de l'Hôpital ad D^um^ Hugenium, in quibus contendit, ſe regulam hujus Auctoris de Centro Oſcillationis penduli compoſiti demonſtrare per cauſam Phyſicam, & reſpondere ſimul D^no^ Bernoulli.

Ante aliquot annos, cum admiratione legi eruditum tuum de centris Oſcillationis tractatum, & pleniſſime mihi perſuaſum eſt veras eſſe demonſtrationes tuas. Interea cum Acta Lipſienſia nuper mihi ad manus venerint, inveni in actis menſis Julii anni 1686. relationem tuæ hac de re cum D^no^ Abbate Cateleno controverſiæ, à D^no^ Bernoulli factam, qui tuam ſententiam amplectitur, uti certe debent, quicunque aliquem inter Geometras locum ſe tenere contendunt. Sed attonitus vidi, finem ratiocinii quo utitur, contrarium eſſe tuis demonſtrationibus: unde ad illud ſedulo examinandum perductus fui, & cognovi, quod utatur principio veriſſimo, licet in eodem applicando fallatur; illud enim principium, uti demonſtrabo, ducit ad eandem veritatem, quam probaſti in 5^a^ tua propoſitione.

TAB. XXVIII. Fig. 6. Sit D A B virga inflexilis & ſine gravitate, mobilis circa punctum fixum D, ad quam annexa ſint 2 pondera æqualia A & B; & ſit diſtantia B D a puncto fixo quadrupla diſtantiæ A D, quæritur longitudo D G penduli ſimplicis iſochroni, id eſt, quod movetur cum eâdem celeritate ac pendulum compoſitum.

Ad ſolvendum hoc problema, conſidero velocitates, cum quibus corpora A & B incipiunt deſcendere in primo inſtanti

ti caſus ſui, vel potius, ſpatia, quæ percurrunt eodem tempore, utut parvo; hoc ſenſu ſumo 1 pro velocitate, quacum omne corpus grave ſive magnum ſive parvum incipit deſcendere ſuper planis æqualiter inclinatis; nam, ut ſatis notum eſt, illa velocitas eſt æqualis in omnibus corporibus.

Concipio etiam, quantitatem motus corporis initio deſcenſus ſui oriri ex maſſâ multiplicatâ per illam primam velocitatem; His ſuppoſitis, conſtat, quod corpus A conetur deſcendere cum eâdem celeritate, quâ corpus B; quod cum non poſſit, quoniam virgæ junctum eſt in puncto A, cujus velocitas tantum eſt 4ta pars velocitatis B, debet accelerare motum corporis B in pendulo compoſito. Tota ergo difficultas conſiſtit in rite determinandâ motûs augmentatione; quod hoc pacto facio.

Sit x quantitas motus corporis A in pendulo compoſito, reſiduus exceſſus quantitatis ejus motus erit ergo $A - x$, vis hæc applicata in A exerit actionem in punctum fixum D & corpus B, quod conſiderari debet ut immobile ipſius reſpectu (quoniam clarum eſt, corpus B debere cenſeri immobile reſpectu illius exceſſus) & conſequenter virga B D debet conſiderari ut vectis cujus extremitates ſuſtinentur in B & D. habebimus ergo B D, 4. ad A D, 1. ut $A - x$ ad $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ portionem exceſſus quantitatis motus corporis A, quæ communicatur corpori B; ita ut quantitas motus corporis B in pendulo compoſito ſit $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ id eſt $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$; Jam vero propter virgam inflexilem D B velocitas corporis B in pendulo compoſito debet neceſſario eſſe quadrupla velocitatis corporis A, & conſequenter etiam quantitas ejus motus, quoniam corpora ſunt æqualia; unde ſequitur æqualia eſſe $4 x$ & $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ unde deducitur valor ipſius x, $\frac{5}{17} A$, qui exprimit quantitatem motus corporis A in pendulo compoſito; Jam ſi fiat, ut $\frac{5}{17}$, velocitas corporis A in pendulo compoſito, eſt ad 1, velocitatem, omnium corporum gravium in extremitate pendulorum ſimplicium, ita D A, 1; eſt ad D G, $\frac{17}{5}$, erit hæc longitudo penduli ſimplicis iſochroni; ſi enim ſpatia ſunt inter ſe ut velocitates, tempora æqualia ſunt.

 Si

TAB. XXVIII. Fig. 7.

Si addamus ad pendulum compoſitum D A B novum pondus C æquale cuivis ponderi A & B, ita ut D C duplum ſit D A, conſiderari debent pondera A & B tanquam appenſa ad G commune ſuum Oſcillationis centrum, in extremitate penduli ſimplicis D G; & tunc ponendo x, quantitatem motus corporis C in pendulo compoſito D C G, habebimus C-x pro reſiduo exceſſu quantitatis motus corporis C. Quantitas hæc reſidua applicata in C exercet vim in punctum fixum D, & punctum G, quod conſidero ut fixum ipſius reſpectu; habebimus ergo D G, $\frac{17}{5}$, eſt ad D C, 2, ut C-x eſt ad $\frac{10C-10x}{17}$, portionem ejus exceſſus, quæ diſtribuitur in G; unde ſequitur, quantitatem motus corporum A & B in pendulo compoſito D A C B futuram $\frac{5}{17}$ A + $\frac{20}{17}$ B + $\frac{10C-10x}{17}$ id eſt $\frac{35C-10x}{17}$; Ob virgam autem inflexilem D B, velocitas corporis A in pendulo compoſito erit neceſſario dimidia velocitatis corporis C, & velocitas corporis B erit dupla velocitatis corporis C, & eædem quoque inter motus quantitates rationes dantur, cum tria corpora ſint æqualia inter ſe; datur ergo æqualitas inter $2x + \frac{1}{2}x$ & $\frac{35C-10x}{17}$, unde deducitur quantitas $\frac{2}{3}x = C$, exprimens quantitatem motus corporis C in pendulo compoſito D A C B. Jam ſi fiat, ut $\frac{2}{3}$, velocitas corporis C in pendulo compoſito, eſt ad 1, velocitatem cujusvis corporis gravis in extremitate penduli ſimplicis; ita D C, 2. eſt ad D E, 3, erit hæc longitudo penduli ſimplicis iſochroni.

Si pondera A, B, C eſſent inæqualia, inveniretur ſemper, ſequendo hoc ratiocinium, centrum Oſcillationis. ita ut hæc methodus ſit generalis, quicunque ſit ponderum numerus, & quæcunque eorundem inæqualitas. Oſtendendum nunc, methodum hanc etiam uſu venire, ſi pondera ſint ad puncti fixi partem utramque diſpoſita.

Sit pendulum compoſitum A D B mobile circa punctum fixum D, & oneratum ponderibus æqualibus A & B, ſitque D B quadrupla ipſius D A, patet quod corpus A debeat retardare motum corporis B in pendulo compoſito; & ut præ-

præciſe inveniatur quantum retardet, voco x quantitatem motus corporis B in pendulo compoſito A D B, & conſequenter exceſſus reſiduus quantitatis ejus motus erit B - x; ſed ob virgam B A, velocitas corporis A debet neceſſario eſſe quarta pars velocitatis corporis B: quantitas ergo ejus motûs in pendulo compoſito erit $\frac{1}{4}$ x (cum enim corpora A & B ſint æqualia quantitates motus ſunt proportionales velocitatibus. Illa autem motus quantitas produci non potuit, niſi per reſiduum exceſſum quantitatis motus corporis B. Patet ergo, quod ille exceſſus B - x debeat ſuperare quantitatem motus corporis A inferiora verſus, & eidem præterea imprimere quantitatem motus $\frac{1}{4}$ x ſuperiora verſus; id eſt quod debeat agere in corpus A ac ſi vis A + $\frac{1}{4}$ x immediate applicita in A, illud ſurſum propelleret. Sed vis B x ob punctum fixum D agit in A acſi vis 4 B - 4 x immediate applicita in A, illud ſurſum propelleret; dabitur ergo æqualitas inter 4 B - 4 x & A + $\frac{1}{4}$ x: unde deducitur quantitas x = $\frac{12}{17}$ B, quæ præciſe exprimit quantitatem motus corporis B in pendulo compoſito A D B; Porro ſi fiat, ut $\frac{12}{17}$, velocitas corporis B in pendulo compoſito, eſt ad 1, velocitatem corporis omnis gravis in extremitate penduli ſimplicis, ita D B, 4. eſt ad D G $\frac{17}{3}$, erit hæc longitudo penduli ſimplicis Iſochroni.

Facile concluditur ex his omnibus, principium D^ni^ Bernoulli eſſe verum; ſed eundem falli in concluſione quam inde deducit; quoniam conſiderat velocitates acquiſitas corporum A & B, cum conſiderare deberet, uti nos fecimus illorum velocitates incipientes & præterea motus quantitates. Alias enim nunquam poſſet applicari hoc principium, quod non differt à principio, quod obtinet circa vectem, quum corpora ſunt inæqualia; Adeo ut credam me plane petitioni ejus ſatisfeciſſe, *Rogantur hac occaſione eruditi* &c.

Vides, quo pacto diverſæ viæ ducant ad cognitionem ejusdem veritatis; nolim tamen meam tuæ æquiparare, quæ ultra omnem comparationem eruditior eſt & magis Geometrica; Interim ſi exiſtimes, non inutile fore demonſtrare rationes Phyſicas, quas hic affero, perfecte convenire cum

tuis demonſtrationibus, idque inſervire poſſe tollendo D^{ni} Bernoulli dubio, per me licet publici juris fieri has litteras, ſed ſimul peto, ut iisdem obſervationes tuas ſubjungere digneris, & perſuaſum habeas me a judicio tuo non provocaturum, quod procul dubio doctum ſimul clariſſimum & æquiſſimum futurum eſt: ſum ex animo &c.

X I I.

Obſervationes D^{ni} Hugenii in literas præcedentes & in relationem D^{ni} Bernoulli, cujus in iis ſit mentio.

Semper credidi difficile eſſe inventu centrum Oſcillationis aliâ methodo, quam quâ ipſe uſus ſum; neminem quoque vidi, qui id proſpero ſucceſſu tentârit, ſive reſpectu ſolutionis generalis, ſive in caſu pendulorum compoſitorum, quorum pondera ſunt in lineâ recta cum puncto ſuſpenſionis. Hunc caſum D^{nus} Marchio de l'Hôpital ſibi poſt plures alias propoſuit, & primus, quod vere poſſum dicere, ſperatum ſortitus eſt eventum; nam D^{i} Walliſius, Mariotte, & Pater Deſchales quæſiverunt tantum centrum Percuſſionis, nec potuerunt demonſtrare idem eſſe cum Centro Oſcillationis, licet id revera ita ſe habeat.

Cæterum licet demonſtratio Domini Marchionis valida ſit & legitima, & naturæ rei congrua videatur, multa tamen continet quæ Lectorem aliquantum detinere queant; ut, quando conſiderat quantitatem motus corporis in primo initio caſus, & quum diſtinguit & dividit, reſiduum motum corporis A, ſcilicet quem haberet cum ſeparatim caderet, præ illo quem haberet, ſi deſcenderet veluti pars penduli compoſiti, & tandem, quum in pendulo trium ponderum vult A & B tanquam fixa conſiderari in G, centro Oſcillationis illorum. cum hæc omnia non ſint prorſus evidentia, patet viam, quam ingreſſus eſt Marchio, ſatis eſſe difficilem, & accuratum valde ratiocinium fuiſſe requiſitum, ne hic deviaretur; D^{us} Bernoulli in ſua relatione controverſiarum me inter & Abbatem Catelanum, de qua in ſequentibus aliquid

quid obſervabo, eandem viam fuerat ſecutus, ſed cum nec illam ad finem usque ſequi potuerit, novo inde ratiocinio ejusdem difficultas colligitur.

Obſtrictus ſum D.º Bernoulli, quod ſemper in hac controverſiâ a meis partibus ſteterit adverſus D.um Abbatem Catelanum. Interea non potui concipere, quo pacto, poſtquam dixit propoſitionem meam fundamentalem de centro Oſcillationis pendere a magno illo principio, ſcilicet *quod commune centrum gravitatis plurium ponderum non poſſit aſcendere altius per gravitatis eorum effectum, quam unde deſcendit*, in ſequentibus vertat contra me quoddam ratiocinium, quemadmodum ipſe confitetur; incertum, ac ſi poſſet in dubium vocare veritatem hujus ipſius propoſitionis; cum potius deberet concludere, ſe erraſſe in ſuo ratiocinio.

Ad id vero, quod mihi imputat, me in prima reſponſione non refutaſſe falſum D.ni Abbatis principium, idque in ultima non refelliſſe per cauſam ejus Phyſicam, reſpondeo me in prima reſponſione crediſiſſe, ſufficere, ſi evidens vitium oſtenderem in ratiocinio, quod mihi opponitur, licet ulterius hanc materiam non examinarem; In exceptione autem 8. Junii 1684. pari jure cum D.no Bernoulli poſſem pertendere me id principium refutaſſe per ſuam cauſam Phyſicam, quoniam oſtendi, repugnare illud magno principio naturali *quod corpora gravia ſponte non poſſint aſcendere.*

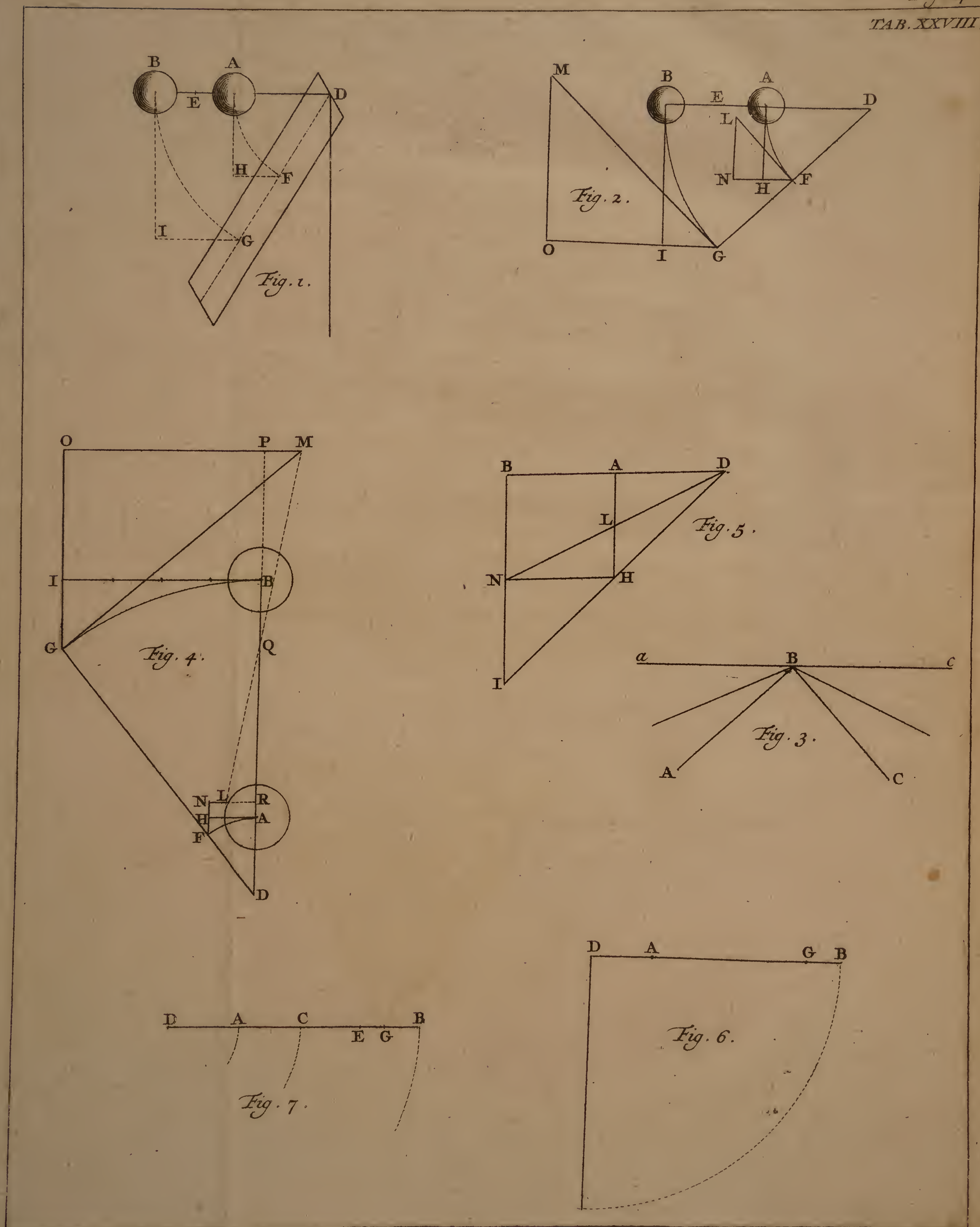
Credo enim, in hoc æque conſiſtere cauſam Phyſicam hujus phænomeni, ſcilicet quod in pendulo compoſito pondera A & B, cum deſcenderint junctim ad partem infimam vibrationum ſuarum, non acquirant ſimul tantam velocitatem, quantam acquiſiviſſent ſeparatim ex iisdem altitudinibus cadentia, quam in eo, quod pondus A conſumat partem ſui motus agendo in punctum fixum F, juxta demonſtrationem D.ni Bernoulli & D.ni Marchionis de l'Hoſpital; Et ad hoc credendum ex eo adducor, quod ſæpe pereat pars motus, licet hunc in aliquo affectu edendo conſumi, affirmare non poſſumus, ut in multis caſibus percuſſionis duorum corporum durorum, juxta id quod obſer-

ſervavi, quum in lucem ederem leges ejusmodi motuum in diariò Pariſienſi 1669 menſis Februarii, ita ut minime pro lege naturæ habendum ſit, eandem motus quantitatem ſemper conſervari, niſi alicui impendatur & conſumatur, ſed hæc conſtans lex eſt, corpora ſervare vim *ſuam adſcendentem*, & idcirco ſummam quadratorum velocitatum illorum ſemper manere eandem; Hoc autem non ſolum obtinet in ponderibus pendulorum, & percuſſione corporum durorum, ut ibidem obſervavi, ſed in multis quoque aliis mechanicis experimentis.

Demonſtraveram admittendo principium Abbatis Catelani, *vim aſcendentem* ponderum penduli augeri, & ita commune eorum gravitatis centrum altius poſſe reverti quam unde deſcenderat, unde inferebam, hoc poſito inventum fore perpetuum mobile. D^us^ Bernoulli non concedit hanc conſequentiam ob aëris obſtaculum, & quædam alia, quæ effectum impedirent: ſed conſiderare debuiſſet, cum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, ſemper determinata ſit quantitas, & effectus obſtaculorum non ſit determinatus, imo minui magis magisque poſſit, facile conſtrui poſſe machinam, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum, præponderaret impedimento obſtaculorum; ſed revera id experiri neceſſe erit nunquam.

F I N I S.

TAB. XXVIII.


B
A
E
D
H
F
I
G
Fig. 1.
M
B
E
A
D
L
N
H
F
Fig. 2.
O
I
G
O
P
M
I
B
G
Fig. 4.
Q
N
L
R
H
A
F
D
B
A
D
L
Fig. 5.
N
H
I
a
B
c
Fig. 3.
A
C
D
A
C
B
E
G
Fig. 7.
D
A
G
B
Fig. 6.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

I.

Excerpta ex Literis Domini Hugenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactiſſimorum ac portatilium concernentibus.

CUm invenerim artificium diu deſideratum quo fiant Horologia & exactiſſima ſimul & portatilia, credo rem gratam me facturum publico, ſi id communicem. Quamobrem mitto Tibi & deſcriptionem & picturam formæ, continentem id quod in hoc invento habetur ſingulare, ut inter cæteras novitates ſcientiarum, hanc quoque poſſis inſerere, ſiquidem ita collubuerit, Ephemeridibus Tuis.

Horologia formâ modicâ ad hunc modum conſtructa, erunt horarum indices portatiles quam exactiſſimi, ſub majori forma autem ubique utiliter adhibebuntur, ac ſpeciatim in longitudinibus terrâ marique inveniendis, ſiquidem ipſorum motus regitur à principio quodam æquabilitatis, non aliter ac aliorum cum pendulis, per cycloidem quippe ita correctorum ut nullum vecturæ genus illa poſſit ſiſtere aut ſufflaminare.

Arcanum inventionis conſiſtit in pinna quadam ſpirali quæ altera ſui extremitate interiore affixa eſt haſtæ animulæ ſeu raſtri æquilibris, ſed majoris ac ponderoſioris quam pro ſolito, ac ſupra ſuos cardines ultro citroque mobilis; alterâ vero extremitate cohæret particulæ cuidam ſupra Horologii ſuperius tegmen eminenti: quæque vibrato ſemel Horologii libramento, ſpiras ſuas alternis comprimit ac relaxat, ac accedente ſibi parvulo adjumento ab Horologii rotis veniente, raſtri, ſeu æquilibrii, motum conſervat, ita quidem, ut, licet majores aut minores faciat excurſus, ejus reciprocationes

TAB. XXIX. Fig. 1. tamen una alteri ſint tempore prorſus æquales. In figura, ſuperius Horologii planum eſt A B, circulus æquilibrii vel libramentum circulare C D, hujusque axis ſeu haſta E F: Pinna ſeu elaterium in ſpiram contortum G H M, ferruminatum ad haſtam æquilibrii in M, & lamellam ſupra planum Horologii ſupremum in G, ita quidem ut ſpiræ omnes elaterii è duobus iſtis ſuſtentaculis in aëre ſuſpenſæ hæreant, infernè nihil attingentes: N O P Q eſt quædam coronis aut fultura in qua vertitur alter cardo æquilibrii ſeu libramenti: R S eſt una ex rotis dentatis Horologii, habens motum quendam libratorium ab occurrente rota proxima ſibi impreſſum. Et hæc rota R S implicatur tympano T, ad axem ſeu haſtam libramenti firmato, cujus adeo motus hoc medio conſervatur quantum opus eſt.

II.

Nova Libella, Teleſcopio inſtructa, propriam ſecum ferens probationem, & quæ in unica ſtatione verificatur, & rectificatur.

TAB. XXIX. Fig. 2. Hujus inſtrumenti præcipua pars eſt Teleſcopium A B, unius, duorum, aut plurium pedum longitudinis, prout ab eo plures exſpectantur effectus: ex duobus, quatuorve con-

convexis vitris modo ordinario, ſat ſuperque cognito, perficitur; duo ad inverſa objecta videnda, quatuor ad ea erigenda inſerviunt. Tubus ex Bractea, aut alio metallo ad Cylindri formam componitur, tranſitque in annulum aut Cylindrum minorem Cupreum C, qui ipſum in medio includit & illi conferuminatur. Cum annulo duo plana & ſimilia cohærent brachia D & E, unum in ſuperiori parte, alterum in inferiori, utriusque longitudo eſt fere quartæ partis longitudinis Teleſcopii, adeo ut tota Machina Crucem imitetur. In brachiorum extremitatibus duplicia fila, per parvulos annulos transeuntia, & inter laminas inſerta cum brachiis cohærent. Harum laminarum altera brachio affixa eſt, dum altera ſeparari poteſt ut fila inter illas inſerantur. Annulo crux ſuſpenditur ex hamo F, dum ope alterius annuli cruci, uti poſtmodum notabitur, annectitur pondus ejusdem circiter gravitatis cum illa, & in pyxide G incluſum. Ex hac pyxide ſolus egreditur ponderis uncus. Spatium in pyxide vacuum oleo nucum, lini, aut alio quocunque quod frigore non coaleſcit repletur, quo motus ponderis & Teleſcopii illico reprimuntur.

In interiori Teleſcopii parte filum ſericum horizontaliter ad vitri objectivi focum expanſum eſt, ſive unum, duo, aut tria adſint ocularia; hoc filum ope cochleæ, quæ circumvertitur in foramine H in Teleſcopii tubo, elevatur, & deprimitur. Methodus diſponendi filum poſtea explicabitur. I levis admodum ex Cupro annulus eſt, non majoris ponderis, quam $\frac{1}{80}$ aut $\frac{1}{100}$ partis ponderis ipſius crucis, & qui juxta Teleſcopii tubum movetur, & ubi libuerit hæret; inſuper ſi Crux non in æquilibrio eſt, alter annulus in interiori Teleſcopii parte ſufficientis ponderis apponitur, ut æquilibrium detur, id eſt, ut Teleſcopii tubus Horizonti parallelus fiat, in quo tamen ſumma cura haud requiritur.

Plana Crux ex ligno Machinæ ſuſpenſioni inſervit, ad hoc ſuperne uncus F habetur, & in brachiorum altero furca K majorem Teleſcopii motum lateralem reprimens, ita ut per ſpatium ſemilineæ, id eſt $\frac{1}{24}$ pollicis, tantum agitari poſſit.

Pyxis plumbum, & oleum continens eidem Cruci annectitur, ad latera, & fundum incluſa; ut autem ventus a Libella arceatur, cava crux L planæ ligneæ cruci cum duobus aut tribus hamis annectitur, adeo ut integra tum conficiatur pyxis.

Ut uſui libella accommodetur, ac rectificetur, ut dictum ſuſpenditur, plumbo non infernè annexo, & in quoddam diſtans objectum collineatur, attendendo ad punctum quod Horizontale filum obtegit, filum enim diſtincte, ut objectum ipſum obſervari poteſt. Deinde plumbum addatur, id eſt annulo inferiori jungatur, ſi tum Horizontale filum eidem objecti puncto reſpondeat, conſtabit crucis centrum gravitatis exacte dari in recta linea quæ duo ſuſpenſionis puncta conjungit, id eſt quæ tranſit per puncta quibus fila brachiis annectuntur. Hæc eſt primaria requiſita præparatio: verum ſi hoc minime reperitur, res facilè perficitur ope annuli I, obſervando, annulum vitrum objectivum verſus promoveri debere, ſi Teleſcopium declinat, dum pondus annexum eſt; contra retrahi debere, ſi Teleſcopium poſt annexum pondus elevetur.

Ubi ergo ita conſtituta eſt Machina, ut ad idem punctum appenſo & ſublato pondere viſum dirigamus, invertenda eſt, ſuſpendendo eam ex annulo inferiori, & plumbum brachio alteri annectendo; quia citius motum ſiſtere jubet, & quia hoc ad reliqua quæ ſuperſunt perficienda plurimum conducit.

Quod ſi tunc filum in Teleſcopio, uti antea collineando, punctum idem ac in præcedenti obſervatione obtegat, punctum hoc in eodem plano Horizontali cum centro tubi Teleſcopii exiſtere certiſſimum eſt, quemadmodum demonſtrabitur.

Verum ſi filum punctum idem collimando non obtegat, elevando & declinando filum, ope cochleæ huic uſui adaptatæ, eo poterit reduci, elevando nempe filum ſi ad punctum magis elevatum viſus dirigatur, & contra, Teleſcopium poſt ſingulas fili mutationes invertendo.

His peractis Inſtrumentum perfecte erit rectificatum, nec obſtat

obſtat (quod notabile eſt) ſi lentium axes non per harum centra transeant, aut ſi ipſæ non exacte in recta linea collocentur; & conſequenter ſecure Machinâ utemur, dummodo nulla ſuperveniat mutatio; filum namque Horizontale cujuscunque objecti, ad quem fiet collimatio, indicabit locum qui eſt in eodem plano Horizontali cum centro Teleſcopii; ſi autem mutatio quædam detur, in ſingulis obſervationibus detegi poteſt, primo cum plumbo annexo, deinde ſine plumbo collineando, & tandem Teleſcopium invertendo. Et hoc utique præcipuum eſt, quo Libella præ cæteris gaudet commodum, quod in uſu erroris periculum nullum detur.

Pes, quo Machina innitatur, eſt rotunda ferri, aut bracteæ lamella modice concava, cui annectuntur tres baculi longitudinis circiter trium pedum cum ſemiſſe, pyxis huic lamellæ impoſita hanc in tribus punctis, tangit, quare facile movetur, & ita conſtituitur, juvante cavitate lamellæ, ut plumbum in pyxide ſua libero fruatur motu, quod videtur trans aperturam M in operculo ligneo.

Gravitas plumbi, ut pyxis firmiter pedi inhæreat, inſervit, verum ſi firmius eam ſuſtentari velimus in lamellæ cavæ medio foramen fiat.

Si totum pondus in pyxide G recludi nolumus, tertia vel quarta tantum pars huic includatur & reliquum eidem ferreæ caudæ annectatur, ſed extra pyxidem; primo tunc obſervabitur cum minori pondere ſolo, pyxide contento, tum cum altero deſuper addito, in conſtituendo filo Horizontali ambobus utentum.

Hac methodo Teleſcopii agitationes promptiſſime, in omnibus obſervationibus quæ ad rectificandam Machinam inſtituuntur, ceſſant; ſi autem nullum in quibusdam obſervationibus imponatur pondus, hæ motiones difficilius ſiſtuntur.

Uncus F, cui Libella appenditur, ſimpliciter ligneæ planæ cruci annecti poteſt, licet hic annexus apparet annulo, qui ope cochleæ adhærentis annulo, quo Machina defertur, elevari & deprimi poteſt.

Quan-

Quantum hoc proſit, experitur in ipſius tranſlatione, nam tum crucis fila laxari queunt curando, ut ſupra furcam K, & brachium exiguum curvatum R, deſcendat Teleſcopium, ne quidem thecam ligneam aperiendo.

Ne oleum pyxide G contentum ex hac defluat, dum Libella in itineribus confertur, pyxidis hujus foramen ipſo pondere incluſo claudi poteſt; curabitur ad hoc, ut pondus illud deſuper planum admodum ſit, & detineatur juxta pyxidis operculum ope annuli cochleati S.

TAB. XXIX. Fig. 3. Tubus N, illum in magno repræſentat, cui in interiori Teleſcopii parte Horizontale filum cohæret, continet elaſtrum O P furcæ Q annexum, cui ſericum filum cera affigitur; hoc elaſtrum furcam ad fruſtum bracteæ T trahit, quod ingreditur cochlea, quæ reſpondet foramini H in tubo Teleſcopii, quo dato foramine etiam modice tubus N verti poteſt, ut filum exacte fiat Horizontale, de quo judicatur per Teleſcopium videndo.

Rectificationis Libellæ Demonſtratio.

Rectificationis requiſitum primum fuit hoc; ut centrum gravitatis ſuſpenſæ crucis in recta linea per puncta, quibus fila brachiis annectuntur, transeunte daretur. Ut hujus præparationis neceſſitas concipiatur, ſciri oportet, non ſufficere ſi Teleſcopium ex utroque annulo ſucceſſive ſuſpenſum ad idem objecti punctum dirigatur, hoc enim fieri poteſt, licet objecti punctum multum infra, aut ſupra Horizontale planum inveniatur. TAB. XXIX. Fig. 4. Sit A B Cylindri Teleſcopiani axis; ſit C I ſuſpenſionis, aut nexuum filorum linea, quarum linearum longitudinum hic non habetur ratio, quoniam, cujuscunque magnitudinis Teleſcopium ſit, nihil hoc ad ſuſpenſi corporis ſitum conferre, notum eſt: ponimus A B, C I ſe mutuo ad angulos perfecte rectos ſecare in puncto H. Deſuper centrum gravitatis crucis in E, ponatur in axe A B, magis tamen verſus B, quam punctum H; Cruce itaque ſuſpenſa in C, linea quæ a C ad centrum terræ tendit erit C E, ita

ita ut axis A B declinaturus ſit infra Horizontale planum, cui C E perpendicularis eſt, & cum quo efficiet angulum æqualem angulo H C E; ſi vero viſus radius A B filum Horizontale, & vitri objectivi B centrum pertranſiens continuetur in recta linea ad objecti punctum usque; iſtud punctum infra Horizontale planum tunc eſſe futurum, evidens eſt; Invertendo interim Teleſcopium, & hoc per I ſuſpendendo, ita tamen, ut extremitas B ad eandem partem remaneat, facile patet eundem ſitum, quem ſuſpenſum per C habebat, eum acquirere; quia, directionis linea denuo per punctum E tranſibit: igitur juxta filum Horizontale, uti antea collineabimus ad idem objecti punctum; licet minime æqua ſit Libella.

Per primariam rectificationis partem, defectus hic detegitur, & corrigitur: nam primo ſi gravitatis Crucis centrum exiſtit in H, directionis linea erit C I, & conſtat, pondere in I annectendo, crucis ſitum non mutari; & idcirco per Teleſcopium ad idem punctum, collineabimus; ſed ſi centrum gravitatis crucis ſit in E, & pondus in I appendatur, extremitas B elevabitur, & ideo viſus per Teleſcopium ad punctum magis elevatum, quam ante, dirigitur. Quod aperte videtur ducendo lineam I E, eamque dividendo in K, ita ut pars I K ſit ad K E, uti crucis pondus eſt ad pondus in I annexum; nam commune centrum gravitatis erit K, & C K directionis linea: & angulus K C E æqualis erit illi, quo elevabitur Axis A B. Quia linea C E ſupra C K tali angulo elevatur, & quia A B cum C E eundem quem ante efficit angulum.

Ut vero clare pateat, appendendo pondus in I ſufficienter detegi, an centrum gravitatis crucis detur extra ſuſpenſionis lineam; dico, angulum K C E, poſito pondere appenſo æquale ponderi ipſius crucis, ſenſibiliter æquari ½ anguli I C E, qui æqualis eſt angulo quo Axis A B, & ideo quoque Viſus Radius, magis deprimitur verſus partem B, quam feciſſet, ſi centrum gravitatis crucis in H fuiſſet; nam ducendo K L parallelam ad E H, in duas partes æquales dividet H I, &

H N valebit $\frac{2}{3}$ lineæ L K, aſt L K eſt dimidium H E; ergo H N eſt $\frac{1}{3}$ ex H E, & N E ideo $\frac{2}{3}$ ex H E, ſed uti E N eſt ad E H, ita ſenſibiliter angulus E C N eſt ad angulum E C H quia exigui ſunt, id eſt E C K ad E C I.

Cum autem angulus E C K illi æqualis eſt, quo Teleſcopium elevatur addendo pondus in I, ſequitur exiguum pondus P verſus H retro trahendum eſſe ut magis elevetur Teleſcopium, ita tamen ut prima elevatio dupla ſit ſecundæ, quia angulus K C E duplus eſt K C I; & tunc directionis linea erit C I, in qua neceſſario gravitatis centrum crucis exiſtet, quandoquidem centrum gravitatis ponderis in I appenſi, in hac datur, uti & centrum gravitatis commune ejusdem ponderis & crucis, cujus pars eſt exiguum pondus P. Si annectendo pondus in I Teleſcopii extremitas B deprimatur, dimidia ſua parte augenda erit depreſſio, quod eodem modo demonſtratur. Hæc angulorum cognitio, ad primam Libellæ præparationem faciliorem reddendam uſu venit.

Quod aliam verificationis partem ſpectat, ubi centrum gravitatis crucis eſt in C I, ſuſpenſionum linea, ex ante explicatis ſequitur, hanc lineam eſſe perpendicularem ad Horizontem, ſive crux per C, ſive per I ſuſpendatur, & ſive illi ad infra pondus annectatur, ſive crux ſola ſuſpendatur.

TAB. XXIX. Fig. 5. Tandem, poſitâ brachiorum ut & filorum æqualitate, certiſſimum eſt, centrum Cylindri Teleſcopii, quod ſit H, ad eandem in utraque ſuſpenſione altitudinem dari: ſint itaque D H M, E H P, axis Cylindri in una, & altera ſuſpenſione, ponendo primo, quod differentibus gaudeat poſitionibus, ſit O objecti punctum, ad quod juxta filum Horizontale collineamus, & O M, O P, Radii luminis, qui a puncto O tendunt ad centrum aperturæ vitri objectivi, & inde æque ac omnes alii radii, qui a puncto O ad vitrum objectivum perveniunt, Horizontali filo obviam proficiſcuntur, ſive filum iſtud Teleſcopii axem pertranſeat, ſive non; hoc namque per Dioptricæ leges ſequitur, cum filum punctum O tegere videatur, & utrumque diſtincte appareat. Ductis lineis rectis H O, M P, ultima parallela erit C I, quia H M,

H P

H P ſunt æquales, ac æqualiter inclinatæ ad C I. Ergo anguli M, P, trianguli M H P ſunt æquales; aſt angulos H M O, H P O etiam eſſe æquales certum eſt, nullo habito reſpectu ad id, quod radiis O M, O P intra Teleſcopium accidit, nec ſi vitri objectivi axis per hujus centrum tranſeat, id eſt, an maximam ſuam in centro habeat craſſitudinem. Anguli igitur M, P, trianguli M O P ſimiliter æquales ſunt, & triangulum hoc eſt Iſosceles, uti M P H; recta idcirco H O ſecabit M P ad angulos rectos; ſed M P parallela erat C I; O H ergo perpendicularis eſt C I, & idcirco punctum O in eodem plano Horizontali cum centro H Teleſcopii, quod probandum erat.

Si nunc centrum vitri objectivi M, P, in utroque caſu detur in eodem puncto ut S, recta H S perpendicularis erit C I, quandoquidem anguli C H S, I H S tum æquales ſint, propter Teleſcopii inverſionem, verum quia S O tendit ad idem punctum O in ambabus ſuſpenſionibus, neceſſario erit in eadem recta linea cum H S, ſi enim lineæ hæ angulum conficerent, angulus iſte ſuperne in una ſuſpenſione eſſet dum in altera ſitum contrarium haberet, ſicque juxta filum ad duo diſtincta puncta collinearemus, cum ad unicum punctum id fieri poſuimus; ſed integra igitur linea O S H eſt perpendicularis ad C I, ideoque punctum O in eodem datur plano Horizontali cum puncto H.

III.

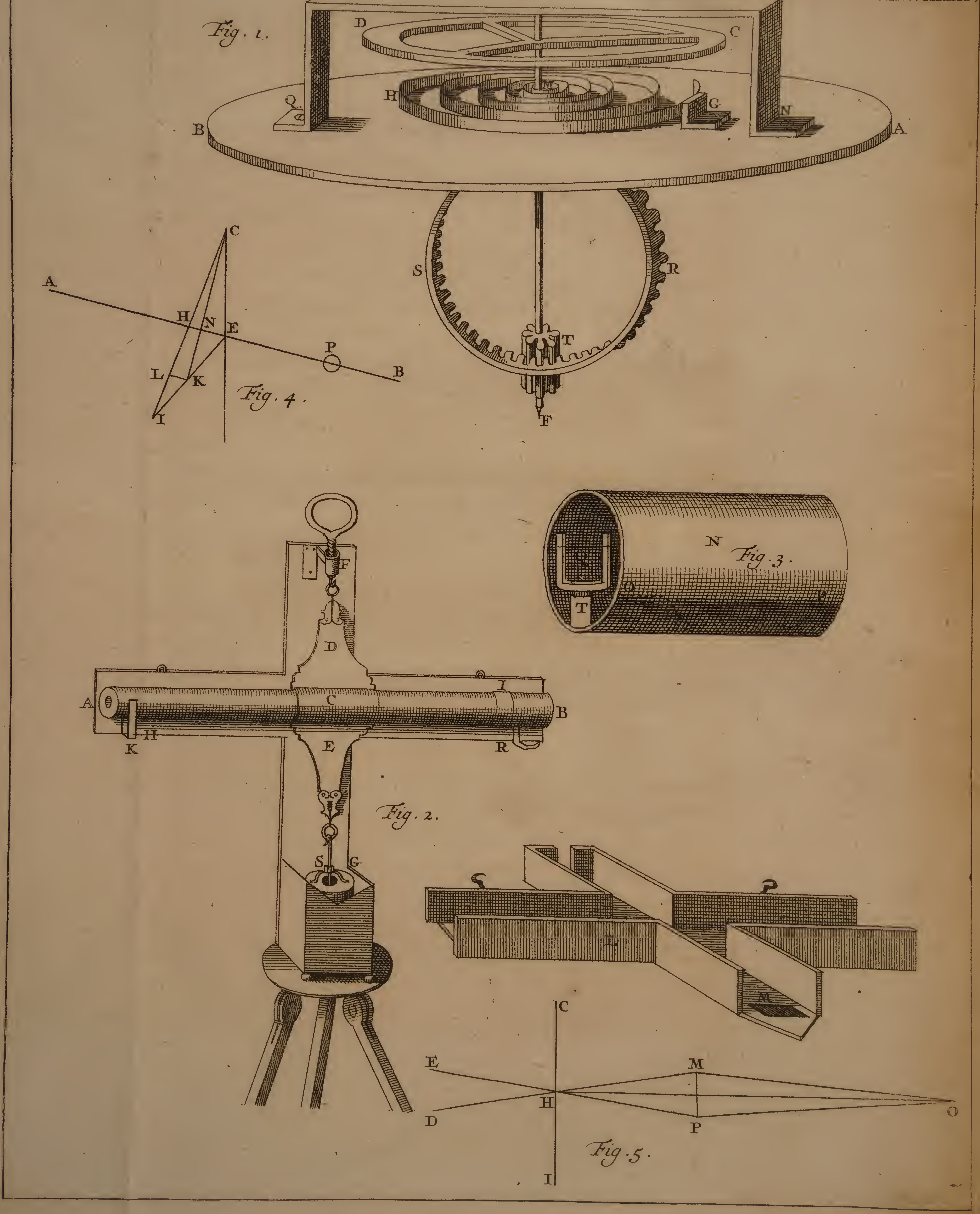
Aſtroſcopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata.

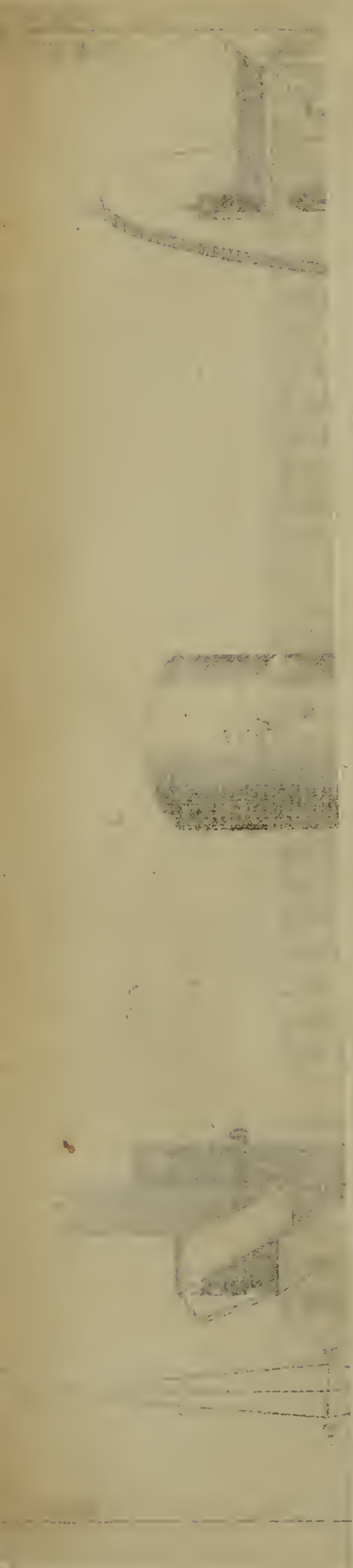
QUod pleriſque omnibus accidit novis inventis, ut, à parvis orta initiis, cura & tractatione hominum auctiora fiant ac perfectiora, id vel præcipuè, in admirando illo proferendi viſus artificio, uſu veniſſe animadvertimus. Notum eſt enim quàm fuerit à prima origine tenue ac pene nihili, cum rudimenta ejus quædam, in Portæ Neapolitani libris,

obſcure expoſita conſpicerentur; quibus tantum præcelluere noſtratium hominum conatus, ut non ſane immerito primi ejus inventores haberentur. Hos vero rurſus longiſſime prævertit Galilæus, tot tantiſque rebus, tubi ſui opera, in cælo deprehenſis, quarum nihil quidquam ante ipſum fuerat perceptum. Videbatur nihil præſtantius iis, quæ ſibi paraverat, organis repertum iri. At, ſi nunc in vitam redeat, quis dubitet quin ſuis ipſe multo præpoſiturus ſit ea quæ deinde exſtiterunt; tum noſtra, quibus Saturni planetæ veras figuras annulumque primi conſpeximus; tum magis etiam, quæ his ſucceſſerunt Italica, ab egregiis artificibus elaborata. Quibus uſus Vir Clariſſimus Dominicus Caſſinus, alia inſuper nova phænomena cœlo deduxit; planetariorum globorum in ſeſe revolutiones, comiteſque Saturni duos, præter eum quem nos repereramus, reliquis manifeſtiorem.

Quod ſi attendamus quibus acceſſionibus in tantum hæc ars continue creverit, nihil aliud reperiemus niſi auctam tuborum longitudinem, lenteſque, quas vocant, vitreas in ſphæræ majoris convexitatem diligentius conformatas. Etſi enim modos quoſdam alios, compendiaque inveſtigaverint viri ſubtiliſſimi; jam conicarum ſectionum præſcriptis figuris, quæ vitro inducerentur; jam ſpeculorum reflexionibus radios lucis colligendo; certum eſt hæc omnia vel fruſtra fuiſſe, vel votis & expectatione longe minora, ob cauſas quas exponere non eſt hujus loci; unamque adeo rationem, qua proficeretur, hactenus eſſe relictam, tuborum productionem. Et ſane, quanto magis rei ipſius naturam intueor, tanto propius eſt ut exiſtimem, nihil alia via ne impoſterum quidem eſſe ſperandum.

Optime igitur operam ſuam ij collocaſſe videntur, qui parandis tubi majoris lentibus incubuerunt. Quorum diligentiæ ſucceſſus hac in parte non defuit. Sed aliunde non exiguum oblatum fuit incommodum, nimia tuborum longiorum gravitas ac moles; quibus movendis neceſſario machinæ in auxilium advocandæ fuerunt. Hæ vero & in iis quæ nunc extant, pedum triginta aut quadraginta, longitudinibus difficile conſtruun-


Fig. 1.
P
E
O
D
C
Q
H
M
G
N
B
A
S
R
T
F
Fig. 4.
C
A
H
N
E
P
B
L
K
I
Fig. 3.
N
Q
O
T
P
Fig. 2.
F
D
A
C
I
B
K
H
E
R
S
G
L
M
C
E
M
H
D
P
O
Fig. 5.
I



ſtruuntur tractanturque; &, ſi ulterius progrediendum ſit, multo plus exhibituræ ſint negotii. Adeo ut hic velut obex quidam fixus fuiſſe videatur ad majora tendentibus. Quare rem inprimis gratam me facturum arbitror hæc ſtudia colentibus, ſyderumque obſervationi intentis, ſi, quod nuper inveni, oſtendero qua ratione impedimentum illud omne ac tædium tollatur; magnoque temporis, operæ & ſumptuum compendio, maxima quæque teleſcopia ad hæc ſpectacula adhibeantur. Scio inter cætera quæ in hunc finem propoſita fuere, hoc quoque, quod hic adferimus, aliis in mentem jam à multis annis veniſſe, ut ſine tubo lentes diſponerentur; ſed quod volebant efficere eos nequiiſſe, niſi machinatione quadam difficili nimium, quæque propterea adhuc exitum non habuerit. Nos autem quæ docebimus, reipſa utilia eſſe invenimus, idque magno commodo noſtro quotidie experimur. Ea vero ſic ſe habent.

Loco patente & undique aperto, malus in terram defigitur, ad perpendiculum erectus. Noſter, quo primum uſi ſumus, pedum quinquaginta altitudinem habebat; teleſcopiis nempe pedum 70 & amplius ſuffecturus, quanquam non in omni ſyderum ſupra horizontem aſcenſu. Deberet enim non multo infra totam teleſcopii longitudinem produci. Hujus, priuſquam erigatur, latus unum dolabra complanatur, atque ibi regulæ binæ affiguntur inter ſe parallelæ, ac ſeſquipollice diſtantes, itaque canalem efficientes, interius paulo latiorem, qui à ſummo malo ad imum fere pertingat, reliquis tantum pedibus tribus vacuis. Præterea in ipſo mali cacumine, orbiculus imponitur, circum axem mobilis, inque eum funis ducitur dupla mali longitudine, craſſitudine minimi digiti dimidia. Utque eo, ſi forte opus ſit, aſcendi poſſit; triangula lignea æqualibus ſpatiis defiguntur, quibus ſcandentis pedes inſiſtant. Ita demum paratus malus erigitur, parte ea, qua terra tegendus, illita pice, circumdataque arena, quo minus putredine corrumpatur. Uſus mali eſt, ut lens major ejus opera in altum tollatur quouſque opus eſt; quod fit hoc modo.

Aſſerculus bipedalis uno latere ita inciditur, ut intra canalem, quem diximus, liberrime moveri queat. Hujus medio affigitur brachium itidem ligneum, pedem unum à malo exſtans, cujus in extremo aliud ſesquipedale, media item ſui parte, conjungitur rectis angulis. Utrumque vero Horizonti parallelum extenditur. Huic tranſverſo brachio lens imponitur ea qua dicemus ratione, atque omnia ſurſum adducuntur, adnexis aſſerculi extremis ad funem ante demonſtratum; qui ab imo malo ad ſummum aſcendens, ac ſuper orbiculum transiens, inde deſcendit rurſus ac, priuſquam terram attingat, in ſui ipſius caput alterum innectitur. Habet autem funis is adjectum plumbum, pondere æquali quantum eſt brachii mobilis cum lente impoſita; eoque loco deligatum, ut ad ſummum malum pertingat, cum lens in imo conſiſtit. Ita hæc facillime ad eam quæ requiritur altitudinem erigitur &, omiſſo fune, ſponte ibi ſuſpenſa manet. Forma plumbi parte utraque in coni apicem deſinit, ne obhæreat ad triangula quæ per malum defixa diximus.

Cæterum lens hæc teleſcopii major collocatur aptaturque hoc modo. Primum in annulum ſeu cylindrum cavum, è ferri bractea fabricatum, ipſa includitur, longum digitos quaternos. Huic cylindro, ſive alteri potius in quem hic inſeritur, bacillus pedalis, digiti craſſitudine, extrinſecus ſecundum latus affigitur, totus in partem unam prominens. Hæc omnia globulo æneo inſiſtunt, avellanæ nucis magnitudine, qui bacillo cohæret, inque ſubjecto ſui moduli cavo liberrime volvitur; ita tamen ut excidere nequeat. Cavum partibus duabus conſtat, quæ, ſuper pediculo tereti, cochlea junguntur adſtringunturque, ſed ita ut globulum nihil prorſus premant. Lens igitur, cum bacillo ſibi adfixo, hoc modo mobilis efficitur. Quæ porro ut æqualiter librata conſiſtat, pondus unius libræ circiter infra bacillum appenditur, filo æneo craſſiore ſemipedali conjunctum atque infixum. Cujus flexu facile ita pondus temperatur, ut centrum commune, ſuæ lentisque gravitatis, cum centro Sphærulæ conveniat, atque hoc pacto quocunque poſitu lens ſuſpenſa

maneat,

maneat, attactuque leviſſimo moveatur. Qua in re potiſſima verſatur inventi pars. Pede enim globuli in foramen transverſi brachii, quod ſuprà deſignavimus, immiſſo, (duo autem vel plura ejusmodi foramina fiunt, ut in omnem cæli partem commode lens obverti poſſit) filum vel funiculus tenuiſſimus bacillo, ſive caudæ extremæ, illigatur; juncturus nempe lentem majorem cum ea quæ oculo proxima ponitur, ac proinde futuri teleſcopii longitudinem æquans, vel potius paulo excedens. Hinc, ubi ſublata ad malum fuerit lens, quocunque id filum, manu leviter tractum, circumferetur, lentem una movebit, eamque hoc modo ad aſtrum quodcunque recta opponet. Quod certe absque hoc libramento fieri non poſſet. Cæterum ut extento filo cauda ſeu bacillus, quem lenti adpoſuimus, parallelus fiat, quod omnino neceſſe eſt, infigitur parti ejus extremæ ſtylus æreus digiti longitudine, cui deorſum flexo, donec cuſpide ſua tantundem ac centrum globuli infra bacillum deſcendat, ita demum filum, quod diximus, adnectitur. Cur autem ſtylo flexili hic utamur poſtea dicetur.

Jam vero & de oculari lente explicandum, quomodo cum priore componatur; quod multis verbis non indiget, ſiquidem eadem fere omnia, quæ in majori lente, obſervanda ſunt. Similiter enim tubo, ſeu cylindro brevi, hæc quoque includitur; item bacillo ſeu caudæ conjungitur; quæ porro globulum ſuum cui innitatur habet. Sed hujus loco axiculus transverſus adhiberi poteſt. Infra bacillum vero pondus exiguum rurſus appenditur, quanto opus eſt ad faciendum libramentum. Porro capulus, globulum vel axiculum ferens, manu obſervatoris apprehenditur; bacillus lentem majorem ſublime poſitam verſus, directus eſt, filo eidem, quod inde deſcendit, illigatus. Adducta vero manu, contentoque leviter filo, parallelas inter ſe fieri lentes perſpicuum eſt. At non eodem modo, bacilli hujus extrema parte, filum adnectitur, ac ſuperiori illi, qui lentem majorem dirigit, ſed per foramen trajectum, inde verticillo involvitur, cujusmodi ſunt quibus teſtudinum chordas intendunt; qui verticillus

medio

medio bacillo à latere infixus eſt. Hujus converſione, inter obſervandum, fili longitudo producitur contrahiturve, donec intervallum inter lentem utramque, oculo ſpectatoris exacte conveniat, poſtquam antea prope verum fuerit repertum, quod eſt facillimum.

Vide Auctarium. pag. 274.
Cæterum, quo poſſit obſervator immotam detinere lentem ſibi proximam, quod apprime neceſſe eſt, fulcrum quoddam præſto eſt è levi materia compactum, duobus pedibus inſiſtens, ac ſuperiori parte transverſum habens baculum, cui brachia utraque, ſive ſtantis ſive ſedentis, innitantur; dum altera manus, quomodo diximus, lentem ſuſtinet. Multoque expeditior eſt hæc ratio, atque ad uſum accommodatior, quam ſi tertius pes fulcro accedat, inque ipſum lens ocularis imponatur.

Ut vero noctu, atque in tenebris, ſtellæ quævis teleſcopio noſtro facile reperiantur, lumine utimur laternæ incluſo, quales jam vulgo notæ ſunt, vitri convexi vel ſpeculi opera longe lucem projicientes. Hujus radiis ad malum lentemque in eo hærentem directis, ubi circulus ipſam continens conſpectus fuerit, facile eo transfertur viſus, ut ſtella ipſi media lente tegatur, ſimulque admota lente minori, per utramque ſe ſpectandam præbeat. Ac ſane multo citius hoc peragitur, quam factum ſit hactenus teleſcopiis tubo inſtructis. Adeo ut hoc quoque nomine longe præſtet nova hæc obſervandi ratio. Lunam vero contemplari volentibus, lucerna nihil opus eſt, quod ipſius aſtri luce lens conſpici poſſit. Sed hic ob diſci lunaris amplitudinem; ne partem quampiam intuenti, ab alia parte lux, aliaque via quam per majorem lentem, ad oculum accidat; circulus papyraceus lenti huic circumponitur, paulo majore quam dupla diametro ad eum quo tota Luna tegeretur. Quod niſi fiat, dilutiores apparent umbræ tractuſque ii qui, cæteris obſcuriores, in ejus globo conſpici ſolent. Atque ita jam teleſcopii noſtri aërii rationem omnem & apparatum explicuimus, non ſane operoſum; filoque illo, velut Ariadnæo, unde hactenus inventus non erat, exitum reperimus.

Cæ-

Cæterum quo clarius ea, quæ diximus, intelligantur, delineationem hic ſubjicimus, in qua

Malus eſt, a b. TAB. XXX.

Aſſerculus in canali mobilis, c d.

Brachium ipſi ad angulos rectos infixum, e.

Baculus tranſverſus in quem lens imponitur, f f.

Funis in ſe rediens, g g.

Plumbum funi innexum, h.

Orbiculus in ſummo malo, a.

Cylindrus cavus lentem primariam continens, i.

Bacillus cylindro affixus, k l.

Globulus æneus bacillo hærens & in ſubjecto cavo volubilis, m.

Plumbum filo æneo junctum, n.

Stylus brevis ac flexilis, extremo bacillo inſertus, l.

Tubulus minorem ſeu ocularem lentem ferens, o.

Bacillus tubulo affixus, p.

Axiculus mobilis, q.

Capulus manu tenendus, r.

Glans plumbea, ſ.

Verticillus cui filum involvitur, t.

Pinnulæ decuſſatim poſitæ, atque ita foramen efficientes quo filum trajicitur, u.

Filum tenue bombycinum, l u.

Fulcrum cui ſpectator innititur, x.

Laterna, y.

Triangula per malum diſpoſita, quibus conſcendi poſſit, omiſſa ſunt, ne figuram obſcuriorem redderent.

Supereſt ut nonnulla, quæ fortaſſe nondum expertis ſcrupulum injicere poſſent, paulo accuratius examinemus. Verebuntur primum ne, ſubſidente filo quod ad utramque lentem pertingit, flexus ejus, quanquam exiguus, in magnis tamen illis, pedum centum aut ducentorum, longitudinibus impediat poſitum earum parallelum. Et profecto, ſi fune graviore opus foret, non parum noceret curvatura ejus, nullaque fere tendendi vehementia ſuperari poſſet hoc incommodum. Nunc verò, ſuſpenſa librataque lente majori ut à no-

bis factum eſt, leviſſimi tantum fili bombycini tractu eam dirigimus; cujus pondus in pedes quinquaginta ſemidrachmam non ſuperat; quodque idem appenſas libras ſeptem ſuſtinet priuſquam rumpatur. Quare flexus ejus neque in hac, neque in multo majori lentium diſtantia quidquam officit, etſi non niſi modica vi trahatur, duabus tribuſve æquipollente libris; utique cum geometrica perfectio nequaquam hic requiratur, ut cuilibet experto notum.

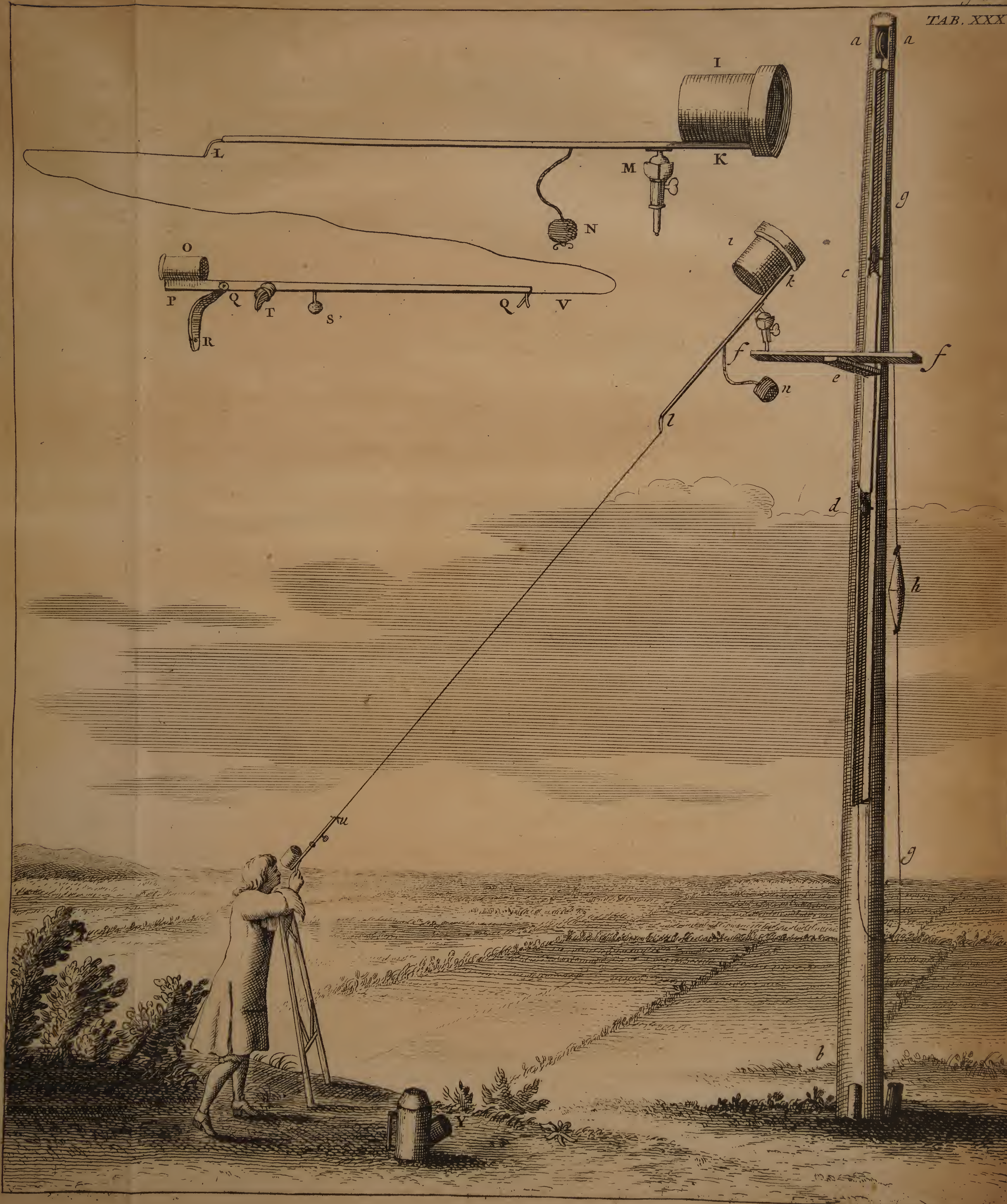
Etenim certum eſt eadem ratione, qua funis fune levior eſt, vim tenſionis diminui, qua utrumque ad rectam lineam æqualiter accedat. Ut proinde funiculus quinquaginta pedes longus, atque unciam pendens, vi librarum quadraginta octo opus habeat, ubi filum noſtrum, longitudine pari, non niſi tribus libris indigebit. Atque hoc per ſe clarius eſt quam ut demonſtratione comprobetur. Idem enim eſt prorſus cum ſexdecim funiculi ſemidrachmales trahuntur ſinguli trium librarum pondere, atque cum uncialem funiculum ſimul componentes, is à conjunctis itidem ſexdecies ternis libris contenditur.

Sed ulterius quoque hæc, quæ ad fili flexum attinent, geometriæ rationibus, experimentiſque expendi poſſunt. Nempe contentum filum, flexu illo exiguo, parabolicam lineam tam prope exprimit, ut pro vera abſque errore habeatur. Cujus parabolæ profunditatem, in longitudine pedum centum quinquaginta, invenimus pedis unius circiter quartam partem; cum filum horizonti parallelum tenderetur, nec niſi vi librarum duarum & ſemis. Sit fili parabola *a b c*, profunditas ejus *d b*, ducta nimirum recta *a d c*. Porro tangant parabolam rectæ *a e*, *c f*: quibus occurrant *c e*, *a f*, parallelæ *d b*. Intuenti igitur ex *a* puncto, ſecundum rectam *a e*, notatum fuit ſpatium *c e* fieri pedis unius; unde fit *d b* pedis quarta pars. Ipſi vero *c e* æquale eſt *a f*. Itaque lentem in *c* poſitam ita trahit filum *c b a*, ut non ad oculum, qui eſt in *a*, ſed ad *f* punctum directe oppoſita ſit. Ut proinde pedis unius intervallo à vero loco oculus abſit: quod in illa pedum 150 diſtantia nihil obeſſe poteſt. Fit enim angulus

TAB. XXXI. Fig. 1.

defle-

TAB. XXX.



deflexionis $c\,a\,e$ vel $a\,c\,f$ tantum duarum quintarum unius gradus; adeo ut remedio, quod tamen dabimus, non ſit opus. Sumpta autem $g\,h$ diſtantia prioris dupla, ſeu pedum trecentorum, ut filum incurvum ſit $g\,b\,h$, erit cavitatis menſura $k\,b$, prioris $d\,b$ quadrupla quidem, ſed angulus deflexionis tantummodo duplus, hoc eſt, $\frac{4}{5}$ unius gradus; ut facile perſpicitur, ducta tangente $g\,l$, quæ cum perpendiculari $h\,l$ conveniat. Ipſa enim $h\,l$ quadrupla erit ad $k\,b$ ſive $c\,e$; diſtantia vero $g\,h$ ad $a\,c$ erat dupla. Quare angulus deflexionis $h\,g\,l$, antea inventi $c\,a\,e$, duplus cenſeri poteſt.

Hæc verò, ſcrupulorum 48, aberratio nullius adhuc momenti eſt, neque neglecta nocebit. Attamen, quo minus cauſandi locus hic ſuperſit, oſtendam jam quænam adhiberi poſſit correctio, atque ejusmodi quidem ut, una opera, omnem aliam lentis declinationem reſtituat.

Igitur ſemel ab initio, ad ſuperiorem lentis magnæ præparationem, hoc quod dicemus, adjungatur. Nempe lente quemadmodum præcepimus librata, atque ad oculi altitudinem defixa, filum caudæ adnexum manu altera capiatur, eaque oculo admoveatur; altera lucernam juxta teneat. Tum paulatim recedendo, extentumque filum producendo, obſervetur an duplex flammæ imago circa mediam lentem appareat, ab utraque nimirum ſuperficie ejus reflexa. Id ſi contingat ubi jam tota fili longitudo exierit, quanta nimirum futuro teleſcopio debetur, indicio eſt rectiſſime lentem ad oculum converti. Quod ſi altera tantum flammæ reflexio conſpiciatur, male collocata erit, ſin neutra, pejus. Hic vero jam remedium adhibebitur, ubi cognitum fuerit in quam partem lens declinet. Stylus enim æneus extremæ caudæ adjectus, filumque innexum habens, in partem eandem parumper flectendus eſt; ac rurſus, ut ante, lucernæ reflexio tentanda; idque ita repetitis vicibus faciendum, quoad utraque flammulæ imago in unum convenire conſpiciatur. Tenſione autem fili utendum mediocri, qualem ſupra definivimus, duarum aut trium librarum vim referente, eique

quatenus licet adſueſcendum. Hoc modo correcta ſemel lentis poſitio ad omnes obſervationes valebit. Neque hic ſubtiliter nimium objiciat quiſquam quod obliquo fili aſcenſu, cum ad aſtra dirigitur, paulo minor efficitur flexus ejus à gravitate ortus, quam cum filum idem horizonti parallelum extenditur. Eſt enim differentia hæc perexigua, præſertim in tanta fili levitate; & lentium parallelismus, ut jam diximus, àd geometriæ leges exactus non requiritur.

Multo magis ventus obeſſe dicendus foret, filum ſinuans atque in latus impellens, præſertim in magnis, quas diximus, longitudinibus; niſi quod tubis quoque idem ventus adverſus eſt, qui concuſſu ejus tremunt ac vacillant, magno ſpectantis incommodo; ut propterea ſæpe obſervationibus ſuperſedendum fuerit. Sed quo æquiore animo hæc diſpendia feramus, ſciendum eſt, flantibus ventis, ſemper fere aëris pelluciditatem adeo turbari, etiamſi ſerenus videatur, ut hoc uno omnis teleſcopiorum proſpectus impediatur; quod exercitatis ignotum eſſe nequit. Imo & tranquillo interdum ac prorſus ſereno cœlo, ſcintillantibus cum maxime ſideribus, fruſtra tamen teleſcopia adhibentur; humido vapore quodam aërem obſidente, quo fit ut ad Planetarum corpora reſpicienti, undatio quædam tremula & fluctuans omnem viſus aciem intercipiat. Poſſetque, ubi hoc accidit, ipſa lentium bonitas ſuſpecta eſſe, niſi alio tempore ac puriore cœlo fuiſſet cognita. Idem vapor, ut hoc quoque obiter admoneam, non raro, lenti majori adhæreſcens, radiorum lucis partem avertit: cui malo, calefacto modice ad ignem vitro, occurritur.

Videamus nunc & illud quod de illuſtranda lente eadem diximus ad malum ſubrecta. Quæ ſi valde procul diſtet, puta ad ducentorum & amplius pedum intervallum, vix videtur tantum luminis, ut ab obſervatore cerni poſſit, acceptura, etiamſi lucerna convexo vitreo juvetur, uti præcepimus. Sed hic intendere amplius lumen licebit, vel aucto lucernæ ipſius ellychnio, vel latiori lente adhibita leniusque convexa, quæ lucem tranſmiſſam, etiamſi pari quantitate

acci-

accipiat, minus tamen diffundet, longiusque proinde ejaculabitur.

Quantum igitur ad hæc attinet, nihil admodum referre liquet quænam fuerit teleſcopii longitudo, ſed æque facile qualiacunque in uſum deduci. Aliquod tantum diſcrimen in varia mali altitudine poſitum eſſe. Cujus quidem parandæ plures modi ſuppetunt. Poſſumus enim, uno ſtatuto malo, alium ejus opera duplo altiorem juxta attollere, ac ſimul firmiorem reddere, transverſis fibulis utrumque conſerendo. Ac firmiſſima quidem fuerit compages hujusmodi, ſi duo mali humiliores, cum tertio duplæ altitudinis, binis ternisve pedibus inter ſe diſtent, in triangulum diſpoſiti, atque uti diximus religati. Qua ratione facile ad centum pedum altitudinem perveniemus. Ad multo majores vero, vel validiori malorum ac trabium ſubſtructione utendo, vel ad turrim aut ædificii altioris angulum inferiora ligna applicando; ita ut nihil tamen obſtet, quo minus, ab imo ad ſummum, lens primaria adducatur, per continuum canaliculum, uti diximus, aſcendens. Sed & ſuper turri aut domus culmine erigi malus poteſt, ut ibi adſtet is cui funis cura demandata eſt, ad evehendam demittendamve lentem.

Nec vero præpropera aut ſupervacua cūra hæc à nobis agitari quis putet, quod veriſimile non ſit his altitudinibus opus fore. Ecce enim, dum hæc ſcribo, Caſſini literis certior fio, lentes quatuor, quarum maxima teleſcopio pedum centum quadraginta deſtinata ſit, à Joſepho Campano, eaſque præſtantiſſimas Romæ eſſe perfectas, & ad magnum Galliæ Regem miſſas. Etſi enim ad cœleſtium obſervationem nondum fuere admotæ, non dubitandum tamen interdiu inſtitutum fuiſſe earum examen, in atriis porticibuſve prælongis unde lux excluſa eſſet. Nunc vero, hoc noſtro invento, utilitas ſua tum his lentibus, tum ſi quæ has longitudine excedentes prodeant, conſtabit.

Quod ſi cogitemus quibus modis teleſcopiorum efficaciam alii augere ſtuduerint; quæ fruſtra illi quæſiverunt, ea nos levi hac opera conſecutos eſſe videri poſſit. Sive enim figu-

ris lentium hyperbolicis ellipticiſve, ut Carteſius, ſive ſpeculis cavis, ut Neutonus, ſive alia quavis ratione id aggreſſi ſint, huc omnia redibant ut brevioribus teleſcopiis, ac minori molimine uſurpandis, multum amplificarentur res viſæ. Nam neque accurata illa ac ſcrupuloſa ſuperficierum formatio devitari poterat, neque etiam lentium ſpeculorumve magnitudo. quoniam obſcuritate nimia, quicquid machinati fuerimus, inutile reddi neceſſe eſt, niſi pro ratione percepti augmenti creſcant aperturæ quibus primum lux ſubintrat. Nos vero longitudines quidem non imminuimus, ſed ne obeſſent effecimus, quod fere eodem redit.

Si quis vero jam requirat quouſque & quo operæ pretio extendi porro teleſcopia poſſe exiſtimem, & num productis longe ultra modum eorum quæ paulo ante diximus, ſperandum ſit adhuc decuplo propius ad lunam cæteraque aſtra nos acceſſuros, quam quo triginta pedes habentibus proceſſimus; quibus tanti itineris partes centum quadraginta novem, una duntaxat reliqua, confectæ ſunt: reſpondebo me certos quidem arti terminos præfinire non poſſe; huc tamen, quo dixi, nec maximo hominum conatu perventum iri. multoque minus futurum, quod aliqui videntur non deſperaſſe, ut lunam ac Planetas cæteros velut è propinquo inſpiciamus, & utrum animalibus habitentur, an præter vaſtas ſolitudines nihil habeant, viſu penetremus. Primum enim, in parandis lentibus, ſcio quantopere creſcat cum magnitudine formandi difficultas; ipſiuſque inveniendi vitri quod vitiis iis careat, quæ maxime huic operi infeſta ſunt. Quanto enim ulterius radii colligentur, tanto magis hæc vitia ſe prodant neceſſe eſt. Conſtat præterea, ut jam iſta nihil obſtent, non amplificari res viſas, niſi pro ratione diametrorum aperturæ lentis exterioris. Quæ diametri nequaquam creſcunt cum teleſcopiorum longitudine; ſed, quantum video, rationem longitudinum ſubduplam ſequuntur. Adeo ut data apertura pollicum trium, in teleſcopio triginta pedes longo; quantam circiter experientia concedi ſinit; alia, ad trecentos pedes, non niſi novem unciarum & ſemis ſit futura,

futura, ac propterea tantum triplo majora fere omnia ſint apparitura, prægrandi hoc teleſcopio, quam illo pedum tricenum. At ſi decuplo exceſſu idem ſuperandum ſit, jam ter mille pedum longitudine opus erit, quo quidem nulla humana ope perveniri poſſe, vel ſolius altitudinis cauſa, manifeſtum eſt.

Sane majores multo forent, & majori proportione creſcerent, eæ, quas diximus, aperturæ, ſi nihil aliud obſtaret quam figuræ ſphæricæ parum idonea, in colligendis radiis, curvatura. Nunc vero alia quædam, ex ipſa refractionis natura, oritur radiorum aberratio, quam ante annos aliquot Neutonus egregiis quibusdam experimentis & priſmatum vitreorum coloribus comprobavit. Hæc vero & ipſa leges ſuas habet, quibus, ſi recte eas perſpicio, ſubdupla illa, quam dixi, aperturarum ad longitudines ratio colligitur.

AUCTARIUM.

Videbatur jam perfecta abſolutaque omnibas numeris nova Aſtroſcopia noſtra; typisque excuſa, nondum tamen edita erat; cum ſecundis cogitationibus, ut fit, alia quædam nobis in mentem venere, quibus ea melior commodiorque fieret. Quæ cum auctarii vice hic adponere viſum ſit, ſimul hoc monemus, ut, ſicut poſterius reperta fuere, ita ultimo loco, poſtquam reliqua deſcriptio ac delineatio percepta fuerit, legantur.

Cum primum ſpectatores invento noſtro, ac Planetis nacti ſumus, teleſcopicis obſervationibus minus aſſuetos, docuit experientia, eos quidem per ſe difficilius ſtellæ conſpectum conſequi; ſicut antehac quoque, ubi in grandiores tubos inciderant, eveniebat. Quod autem hic fieri ſolitum, ut, reperto prius ſidere, ac manente tubo, tantummodo oculum ei ſpectator juſſus admoveret, id non perinde nobis nunc imitari licebat; cum lens oculo proxima, ubi defigeretur, non haberet. Itaque hic quoque ratio fuit excogitanda, qua poſitum ſuum ſervaret ocularis lens. Quod quidem præſtitimus

mus machinæ exiguæ opera, quæ fulcro bipedi, in deſcriptione deſignato affigitur; ut in figura adjecta videre eſt.

Tranſverſarii namque in ſummo fulcro pars eſt *a a*. Rhombus plicatilis ex ære *b b*, binis lateribus ad duplam longitudinem productis. Longitudo laterum pollices $5\frac{1}{2}$, latitudo paulo major pollice dimidio; craſſitudo parte ejus decima. Hunc rhombum tranſverſarii medio applicitum tenet cochlea ferrea *f*, ſuppoſitâ æris vel ferri particulâ *g*, ac præterea orbiculo ex ære tenui, leniter convexo, cujus preſſu lentus æquabiliſque efficitur motus rhombi ac diductio. Porro ex angulo ejus ſuperiore, axis ſeu columella prominet *c*, perpendiculariter inſiſtens, longitudine ſesqui pollicis. Cujus capite altero lamella mobilis adhæret, 4. pollices longa, dimidium lata; quæ hic conſpici nequit, quippe tecta capulo ligneo *d*, paris longitudinis, cui conſerta eſt. Huic demum capulo, plano ac parte anteriori leviter inciſo, inſeritur lamella altera ænea *e*, quæ ſuper axiculo mobili bacillum ſuſtinet, cum affixa oculari lente, tubulo ſuo incluſa. Ut autem rhombus cum impoſito onere æqualiter libretur ſuper axe *f*, adjiciuntur in productis lateribus extremis pondera paria *h h*, quantis ad hoc opus eſt.

TAB. XXXI. Fig. 2.

Quibus ita ſe habentibus, quocumque perducta fuerit obſervantis manu lens ocularis, capulo *d* ſemper deorſum converſo, ibi ſponte ſua conſiſtit; atque ita, invento ſidere, facile imperitior ſpectator in prioris locum ſuccedit, eodemque fruitur ſpectaculo. Facit enim funiculus utramque lentem conjungens, ut poſitum ſuum fulcrum ſervet, ſpectatorem verſus reclinans, etſi duobus tantum pedibus inſiſtat; ſimulque fulcri pondere, eorumque quæ ipſi impoſita docuimus, idem funiculus intenditur; adeo ut nihil aptius commodiusve hac in re optari queat.

Altitudo fulcri eſt pedum 4. poll. 9. Gravitas ejus librarum $2\frac{3}{4}$. Lentis ocularis, cum tubulo & bacillo, gravitas libra dimidia. Rhombi cum ponderibus *h h*, libræ $2\frac{1}{4}$. Quæ propterea adſcribo, ut conſtructionem noſtram, experientia comprobatam, eo facilius cuivis imitari liceat.

Nunc

Nunc vero aliud præterea addemus, quo perfectior evadat hæc noſtra obſervandi ratio. quod licet, omiſſum, nihil plerumque noceret, curioſo tamen ſyderum inſpectori nequaquam eſt negligendum. Nempe cum Saturni comites illos Caſſinianos diligentius requirerem, eoſque difficulter adſequerer, præſertim noctibus non admodum obſcuris, intellexi in cauſa eſſe lucem tenuem quandam, ab aëre ad oculum manantem; non eam quæ per lentem majorem advenit, ſed quæ extrinſecus circum latera præterlabitur. Huic importunæ luculæ excludendæ, nonnihil quidem conducere ſciebam, ſi circulum illum papyraceum, quo in luna obſervanda utebar, etiam hic lenti majori circumponerem. Sed aliud efficacius remedium, circa hæc occupato incidit, priori illi jungendum; ut nempe, perforatæ laminæ oppoſitu, oculi pupilla arctaretur, quæ alioqui per tenebras late patere ſolet. Cujus ſimul ac experimentum feci, jam clare tres Saturni Lunulas conſpexi; cum amoto exiguo foramine media illa noſtra tantum cerneretur. Quia vero, ita reductâ pupillâ, minus facile propoſitum ſydus inveſtigatur, quam cum tota patet, idcirco orbiculum illum perforatum, ac ſemipollicem latum, brachiolo quodam mobili, ac Græco Λ hærentem ſimili, cui in figura hac adſcriptum eſt *k*, ita conjunximus tubuli fundo per quem lens ocularis inſpicitur, quique latiori foramine pervius eſt, ut non ante quam hoc foramine ſydus inventum fuerit, ſuperinducatur alterum illud anguſtius.

Credidiſſet fortaſſe aliquis hac oculi contractione non parum viſum obſcurari. cum tamen certum ſit, ſi diameter exigui foraminis, ad diametrum aperturæ lentis majoris eam rationem habeat, quam habent inter ſe focorum utriuſque diſtantiæ, nihilo obſcurius teleſcopio ejuſmodi omnia cerni, quam ſi apertus ac liber oculus relinquatur. Sed præſtat duplicare tantillam hanc latitudinem, vel paulo etiam augere amplius, quo minus difficilis ſit rei videndæ inquiſitio, nec nimium cito inventa ſtella elabatur, ob mundi converſionem diurnam. Nobis in teleſcopio 34 pedes longo, foraminuli dia-

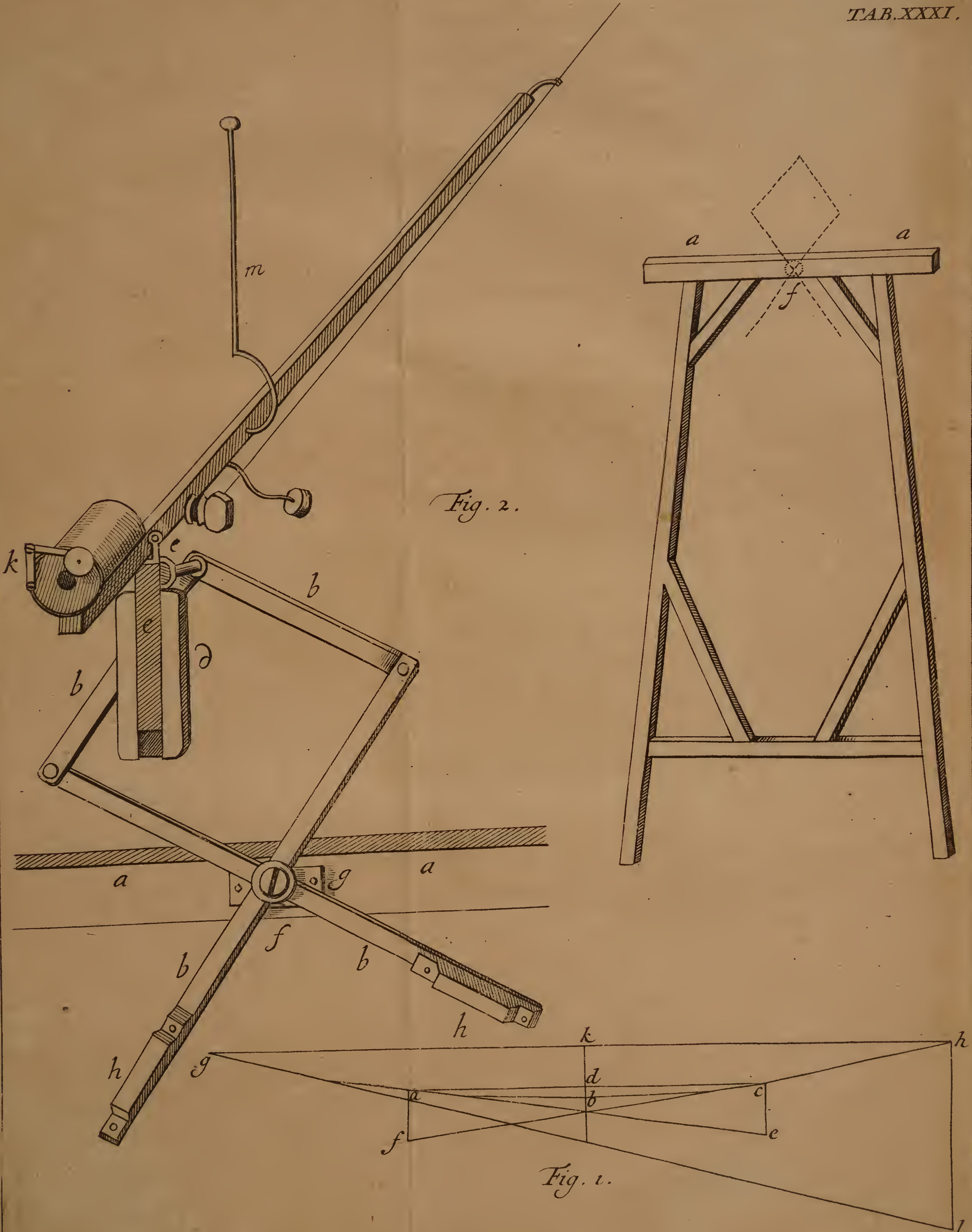
meter decimam ſextam circiter pollicis partem habet. Ipſum vero duos pollices cum dimidio ab oculari lente abeſt, quanta eſt præciſe in hac lente foci diſtantia. Quod diligenter curandum, quia alias non poterit amplum ſpatium, ut ſolet, uno obtutu comprehendi. Facile autem deltoidis brachii flexu, qui quidem in ſchemate noſtro conſpici nequit, quantum opus eſt, lamella perforata removetur, quæ nobis ſemipollice à tubuli fundo extat.

Porro circulus lenti magnæ circumdatus, teleſcopii partem longitudinis quadrageſimam quintam circiter diametro æquet. Cujus circuli objectu quia paulo impeditiorem reddi neceſſe erat aſtri inveſtigationem, viſum fuit imponere bacillo, ſeu caudæ lentis ocularis, ſtylum *m*, perpendiculariter erectum; cujus apex tantundem ſupra axem lentium attollitur quantus eſt circuli illius ſemidiameter. Hinc enim fit, ut ſi oculum prius ibi collocemus, unde cum ſummo margine circuli in eandem rectam lineam ſtella conveniat; tumque, apprehenſo capulo *d*, moveamus lentem ocularem cum adjuncto bacillo, donec in eandem quoque rectam quadret extremum ſtyli *m*; fit inquam ut, ad tubulum ocularem viſum referenti, ſtella eadem per teleſcopium ſeſe conſpiciendam det, vel certe parum abſit. Uſu vero & exercitatione tum hæc, tum cætera quæ ad hanc obſervandi rationem pertinent, facilia fiunt.

IV.

Excerpta ex literis Dni Hugenii de novâ methodo conſtruendi Barometrum.

Quod novam meam methodum Barometri ſpectat, noſti, diverſas aëris atmoſphæræ preſſiones multo magis fore viſibiles, & faciliores diſtinctu, ſi in tubo 30 pedes alto fiat barometrum ope aquæ quam ſunt in barometris vulgaribus, quæ cum Hydrargyro conſtruuntur. Cum enim maxima diverſitas ſit circiter duorum pollicum in barometris vulgari-


m
k
e
b
d
a
g
f
h
Fig. 2.
k
h
g
d
a
b
c
f
e
l
Fig. 1.

garibus, in novo hoc barometro erit viginti octo pollicum id eſt decies & quater major erit, aliæque variationes augebuntur eadem ratione, quæ ipſa datur inter Mercurii & aquæ gravitates ſpecificas.

Sed uti difficile eſt bene diſponere hæc barometra ob magnam tubi altitudinem, quæ impedit etiam, quo minus commodè locari poſſint, aut de loco in locum transferri. Cogitavi, quo pacto conſtrui poſſet barometrum mediocris magnitudinis & portatile, cujus effectus quam proxime idem eſſet ac aliorum illorum magnorum barometrorum, & duas diverſas conſtructiones inveni.

Prima eſt, ut fiat tubus vitreus A B quatuor pedum cum ſemiſſe, qui clauſus ſit in extremitate A, & cujus cavitas ſit circiter duarum linearum; requiritur ut latior ſit in loco medio, ubi detur quaſi pyxis cylindrica C D, cujus altitudo ſit circiter unius pollicis, & Diameter E E 14 vel 15 linearum, id eſt ſepties vel octies major diametro tubi; infunditur in apertam extremitatem tantum aquæ, quantum requiritur ad replendum dimidium receptaculi C D cum partis ſuperioris tubi dimidio C F; Porro repletur quidquid ſupereſt Mercurio; qui etiam infunditur in vas G ad altitudinem ſemipollicis, deinde immergitur in hunc extremitas tubi B; tum pro parte exit Mercurius, & qui ſuper eſt manet ad altitudinem E E; aqua, quæ ſupernatat, deſcendit usque in F, relinquens reliquum tubi F A aëre vacuum, & ſuperficies aquæ, adſcendendo & deſcendendo denotat diverſum atmoſphæræ pondus, gradibus fere æqualibus iis quibus aqua illud denotat in barometro 32 pedum. TAB. XXXII. Fig. 1.

Altera conſtructio partim ſimilis eſt priori, ſed multo melior eſt; detur tubus in medio incurvatus H M N, duæ in hoc tubo requiruntur pixides cylindricæ æquales K & M, quarum una, ſc. K, quæ eſt ad tubi extremitatem, hermetice ſit clauſa ſuperius, & M, quæ eſt paululum ſupra curvaturam, ſit utrinque aperta in locis in quibus cum tubo jungitur; longitudo crurum determinata eſt per diſtantiam pyxi- TAB. XXXII. Fig. 2.

dum K, M, quæ ſit circiter $27\frac{1}{2}$ pollicum *, menſurando diſtantiam inter harum media. Altitudo cujusvis pyxidis eſt præterpropter unius pollicis cum ſemiſſe; diameter interior unius pollicis vel 15 linearum; diameter cavitatis reliqui tubi $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{12}$ ejusdem magnitudinis. Primo infunditur ſolus Mercurius in tubum per aperturam N, ut fiat barometrum vulgare ex iis, quæ inferius recurvata ſunt. Infundendum vel tollendum eſt Hydrargyrum donec ſuperficies dentur circiter in medio pyxidum K & M, ſi tempore quo fit hæc operatio aër mediæ ſit gravitatis, id eſt in barometris vulgaribus Mercurius ſit ad altitudinem $27\frac{1}{2}$ pollicum; alioquin enim ſi preſſio aëris ſit major vel minor ordinariâ, ad hoc attendendum, computando pro uno pollice variationis, in vulgari barometro, lineam unam cum ſemiſſe variationis in quavis pyxide: Poſtquam Mercurius bene aëre depurgatus erit, ita ut nullus detur in pyxide K infundetur per aperturam N quidam liquor, qui hieme non congelatur, & qui nequit diſſolvere Mercurium; E. G. aqua communis mixta cum $\frac{1}{8}$ aquæ fortis: ſpiritus vini quidem poſſidet has duas qualitates, ſed non conveniret barometro, quia per calorem dilatatur. Hoc etiam referri debet ad primam formam Barometri.

Quod attinet ad liquoris quantitatem, debet illa adſcendere ad pedem unum circiter in tubum B C poſitâ mediâ aëris preſſione.

Diſpoſito ita hoc Barometro videbimus, maximam differentiam preſſionis aëris, quæ notabitur per ſuperficiem liquoris in tubo M N, fore propemodum 22 pollicum, ſi diametri pyxidum cylindricarum, ſint decies majores diametro tubi. Et ut inveniamus quantum differentiæ quas indicatæ barometrum hoc noſtrum excedant illas, quas poteſt indicare barometrum vulgare, generalis eſt regula, differentias noſtri novi Barometri eſſe ad differentias Barometri vulgaris, ut decies & quater quadratum diametri pyxidum ad idem quadratum plus vicies octies quadratum diametri tubi, qui aquam continet; & hinc ſequitur, cujuſcunque magnitudinis ſint pyxides, maximas differentias non poſſe excedere 28 pollices, quandoquidem differentiæ Barometrorum ordinariorum non excedunt duos pollices. Ut

* *Pollices hi ſunt partes duodecimæ pedis Regii Gallici.*

Ut transferatur commode hoc Barometrum, aſſeri adjungendum eſt: vel Thecâ includendum; & notari debent in ligno diviſiones æquales ad indicandas altitudinum differentias, quæ augebuntur eadem ratione, in quâ minuetur atmoſphæræ pondus.

Sic parvæ mutationes, in pondere atmoſphæræ, & quæ non percipiuntur in Barometris ordinariis, in his ſenſibiles fiunt.

Exempli gratiâ ſi ferantur in Turrim *de Noſtre Dame* vel *Montmartre* videbimus ſuperficiem aquæ deſcendere in primo Barometro quosdam pollices, & tantum in altero adſcendere; ſi ferantur in domum elevatam tantum 50 pedes, & porro inde deſcendamus, habebimus notabilem mutationem $\frac{1}{2}$ propemodum pollicis, ita ut poſſimus ope hujus inſtrumenti ſatis bene menſurare diverſam altitudinem montium a ſe invicem diſſitorum, & regionum, quarum ſitus non ſinit, ut has metiamur aliter. Si mutationes temporum ope Barometrorum, prævideri poſſint uti ſperandum videtur, certum eſt, quod illa, quæ hoc modo conſtructa ſunt, magnam utilitatem habebunt præ aliis, quæ adhibita ſunt huc usque.

Verum eſt quod quædam novorum horum Barometrorum ſenſibiliter quodammodo mutentur ex calore vel frigore aëris exterioris, quamcunque etiam adhibeamus operam ad illa interiori aëre purganda; ſed Barometra ordinaria ſunt etiam eidem varietati obnoxia, & ſi in noſtris magis conſpicua ſit, hoc inde venit, quod multo majores differentias indicent, quam Barometra vulgaria: ſed ut occurramus huic malo, quod plane nobis impedimento eſſet, ſi vellemus metiri altitudines, poſſumus Thermoſcopium includere in parte Barometri aëre vacuâ, & efficere calefaciendo aërem, qui utrumque cingit, ut Thermometrum redeat ad eandem notam in utraque operatione; & hac viâ certi erimus, quod aër externus nullam inducat mutationem Barometro, & quod omnis varietas, quæ ibi apparebit, oriatur ex diverſâ atmoſphæræ gravitate.

Dixi poſteriorem conſtructionem alterâ meliorem eſſe, non

 ſolum,

ſolum, quia ultimum Barometrum multo minoris voluminis eſt, ſed &, quia obſervavi, quod in priori parum aëris, quem aqua exhalat in vacuo, pedetentim augeatur temporis diuturnitate; cui vitio certum eſt Barometrum 32 pedum, de quo ſupra dixi, pariter obnoxium eſſe; Et, ut huic malo occurratur, quærendus eſt liquor, qui non producit aërem, ut faciunt aqua & ſpiritus vini. Sed patet, quod poſterius noſtrum Barometrum hoc vitio non laboret, quoniam aqua in vacuo non eſt incluſa: Quod ſi percipiamus aquam, quæ eſt in poſteriore Barometro, vapores emittere, tantum ſuperius infundenda eſt gutta olei, quod frigore non inſpiſſatur, quodque calore non emittit vapores, ut oleum amygdali dulcis.

V.

Nova vis movens mediante pulvere nitrato & aëre.

Deſideratum a longo tempore eſt artificium quo vis pulveris pyrii aliis, quam quibus huc uſque inſerviit, uſibus applicari poſſet, in quibus omnibus vis admodum ſubita requiritur, qualem obſervamus in exploſione bombardæ & ſclopeti & disruptione cuniculorum: ſi impetus ille promtus poſſet moderari & reduci ad vim magis placidam, maximam in mechanicis utilitatem haberet, & in multis occaſionibus, in quibus vim hominum, equorum, venti, aliarumque potentiarum adhibemus, inſerviret. Ad hunc effectum excogitavi machinam, hic delineatam. Hanc non propono, acſi in omnibus partibus perfecta foret, ſed tanquam inventum, quod cum pro parte ſucceſſit, poterit ad majorem proferri perfectionem.
TAB. XXXII. Fig. 3. A A cylindrus cavus eſt, intus bene politus, & ubique æqualis magnitudinis; B eſt embolus in ſuperiori parte Cylyndri, & qui in hoc poteſt moveri; in C C cylindrus eſt perforatus duobus foraminibus, quorum diametri circiter ſunt $\frac{1}{4}$ diametri cylindri; tubi D, D, corii madidi & mollis, firmiter

miter alligati ſunt duobus cylindris minoribus, qui cum majori cohærent, & circumdant foramina; tubus unus exhibetur pendens, alter extenſus. In fundo cylindri cum hoc conjungitur ope cochleæ interpoſito annulo coriaceo pyxis H; ita ut exacte claudat apperturam cylindri; E E ſunt retinacula, quæ cylindrum in inferiori parte conjungunt cum theca, qua includitur, ſed quæ hic non eſt exhibita, ne turbetur figura: E F eſt funis annexus embolo B, circumponitur trochlea G, & inſervit ad movendum id, quod ei applicatur.

Obtecto parvâ aquæ quantitate embolo, qui ſuperius firmiter debet conſiſtere, ne poſſit exire ex cylindro, immittitur in ciſtam H parum pulveris tormentarii cum parva quantitate igniarii Germanici accenſi, & clauditur bene ciſta mediante ſua cochleâ.

Pulvis ille paulo poſt accenſus implet cylindrum flammâ & fugat aërem per tubos coriaceos C D, C D, qui extenduntur, quique ſtatim clauduntur iterum ab aëre exteriore; ita ut cylindrus maneat aëre vacuus, ſaltem maximâ parte; porro embolus B eſt adactus per preſſionem aëris, qui ſupra gravitat ad deſcendendum, & ſic trahit funem F F pariter illud quod ei appenditur.

Quantitas ejus preſſionis cognita eſt, & determinata, per gravitatem aëris, & per magnitudinem diametri emboli, qui, ſi ſit unius pedis, ita premitur, ut ſuſtineat pondus 1800 circiter librarum; poſito, quod cylindrus totus fiat aëre vacuus, quod huc uſque efficere non potui; etiam experimenta eo reſpectu in magnis & parvis cylindris non eodem modo proceſſere.

Cylindrus diametri $2\frac{1}{2}$ pollicum, & 20 poll: longus, pondere 6 granorum pulveris aëre, evacuatus fuit $\frac{4}{5}$ partibus; in cylindro ejusdem latitudinis, ſed longitudinis 44 poll., requiruntur 36 grana pulveris ut ejiciantur $\frac{4}{5}$ aëris; Et in cylindro diametri unius pedis, & $3\frac{1}{2}$ altitudinis, $1\frac{1}{2}$ drachma pulveris ad fugandum $\frac{1}{5}$ aëris; & duplicata pulveris quantitate vix magis evacuatus fuit cylindrus.

Aër

Aër vero ille qui ſupereſt in cylindro, impedit magnam partem effectus, quem exereret machina, ſi omnis aër prorſus exhauriretur; ut ſatis videre eſt, & ſimul determinari computatione poteſt. Ideo deberet examinari, quæ ratio inter altitudinem & diametrum cylindri ſit optima in hâc machina ad hanc maxime evacuandam adhibitâ minima quantum poſſet pulveris quantitate, nam licet totus cylindrus non evacuetur, vis hujus preſſionis nihilominus magnum ederet effectum.

Poterit hæc inſervire non tantum elevationi magnorum ponderum quorumcunque & aquarum. Sed etiam ad projicienda globos & ſagittas magna vi, juxta methodum baliſtarum veterum.

Ulterius, cum propter cylindri convexitatem, non ſit neceſſe, ut ſit valde ſolidus ad reſiſtendum preſſioni aëris externi, certum eſt totam machinam exigui ponderis eſſe poſſe, quæ levitas conjuncta cum magna vi, quam habet, poterit forte uſui eſſe ad effectus edendos quos huc uſque impoſſibiles duximus.

VI.

Demonſtratio Æquilibrii bilancis.

TAB. XXXII. Fig. 4. In demonſtratione, quam Archimedes dedit de propoſitione fundamentali Mechanices, tacite ponit quid, de quo jure aliquo poſſumus dubitare; eſt autem hoc, ſi plura pondera æqualia annexa ſint libræ ad diſtantias æquales a ſe invicem; ſive omnia ſint ad eandem partem puncti ſuſpenſionis, ſive quædam transferantur ad patrem oppoſitam, ut in hac figura, ubi punctum ſuſpenſionis eſt A, pondera habere eandem vim ad deflectendam libram quam ſi forent omnia ſuſpenſa in puncto, ubi eſt commune eorum centrum gravitatis, ut hic eſt punctum B. adeo ut ſi ſeparatim ſuſpenſa in æquilibrio forent cum contrario pondere C, hoc etiam obtineret ſuſpenſis omnibus ponderibus in puncto B, vel eorum loco pondus D, quod æquat omnium gravitatem.

Qui-

Quidam Geometræ parumper mutando hanc demonſtrationem tentarunt defectum minus ſenſibilem reddere, ſed in totum fuiſſe ſublatum mihi non videtur. Igitur conatus ſum alio modo eandem propoſitionem demonſtrare uti ſequitur.

1°. Poſtulatur cum Archimede, duo pondera æqualia appenſa extremitatibus brachiorum æqualium libræ fore in æquilibrio.

2°. Poſitis ponderibus æqualibus, & brachiis libræ, cui appenſa ſunt, inæqualibus, illam inclinari ad latus brachii longioris.

3°. Poſtulatur poſſe concipi, lineas & plana, de quibus loquimur in hac demonſtratione, inflexilia & ſine gravitate eſſe.

PROP. I. *Si ſuper planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem verſus ad quam applicatur erit major, quam ſi poſitum ſit prope dictam lineam.*

Sit planum Horizontale A B impoſitum lineæ rectæ C D, & cui applicetur pondus E, cujus diſtantia a C D lineâ perpendiculari E H menſuratur; & cui porro applicetur idem pondus in F, ita ut diſtantia F H minor ſit quam E H, dico, quod habebit plus virium ad planum deflectendum, ſi ſit applicatum in E quam in F. TAB. XXXII. Fig. 5.

Nam producta recta E F H in G & poſitis H G & H F æqualibus, certum eſt, pondus æquale illi, de quo locuti ſumus, applicatum in G in æquilibrio futurum cum altero in F, propter æqualia brachia F H, H G.

Sed pondus tranſlatum ex F in E deflectet planum, quoniam plano exiſtente ſine gravitate effectus idem eſt ac in bilance brachiorum inæqualium quæ æqualibus ponderibus gravantur, idem ergo pondus poſitum in E plus virium habet ad planum deflectendum quam ſi eſt in F; Q. E. D.

PROP. II. *Si planum Horizontale, oneratum plurimis ponderibus, maneat in æqualibrio, impoſitum lineæ rectæ, quæ*

id ſecat in duas partes, centrum gravitatis plani ſic onerati erit in ipſa lineâ rectâ.

TAB. XXXII. Fig. 6. Sit planum Horizontale A B oneratum ponderibus C C, D D & quod manet in æquilibrio, impoſitum rectæ E F; dico centrum ejus gravitatis eſſe in illa linea E F; nam poſito, ſi fieri poteſt, centrum gravitatis eſſe alibi in puncto G, ducatur per id punctum recta H K parallela ipſi E F.

Tunc ergo, quia planum fultum in puncto G, manet in ſuo ſitu Horizontali, debent, ducta linea recta quacunque in plano per punctum G, pondera ad utramque partem lineæ eſſe in æquilibrio.

Idcirco pondera C C facient æquilibrium cum ponderibus D D, quando planum fulcitur a recta H K: id quod fieri nequit, quoniam manet in æquilibrio fultum a recta E F; nam patet, omnes diſtantias ponderum ad unam partem eſſe diminutas, ſcilicet ponderum C C, & conſequenter etiam effectus gravitatis eorum; & diſtantias ponderum oppoſitorum D D eſſe auctas, & eodem tempore effectum eorum gravitatis, adeo ut ultima pondera deflexura ſint planum ad ſuam partem, & multo magis ſi unum vel plura pondera C C ſint ad alteram partem lineæ H K; Centrum ergo gravitatis plani onerati erit in linea E F. Q. E. D.

PROP. III. *Duo gravia commenſurabilia appenſa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, ſi brachia ſint in ratione reciproca gravium.*

TAB. XXXII. Fig. 7. Sint gravia commenſurabilia A & B, quorum A ſit majus; & libra C D E, cujus brachium D E ſit ad D C, ut grave A ad grave B; dico, libram eſſe in æquilibrio appenſo A ad extremum C, & B ad extremum E, ſi C E ſuſtineatur in D.

Concipiatur planum parallelum ad horizontem tranſiens per lineam C E, in eo plano ſint ductæ per puncta E & C rectæ L E G, K C M perpendiculares ad C E; fiat ulterius E F æquale C D, & ducantur G F K, M D L quæ cum C E angulos ſemirectos efficiunt & ſeſe mutuò ad angulos rectos ſecant in N; illæ lineæ neceſſario occurrunt duabus prioribus, quas duximus per E & C; ponamus pun-

cta

ȼta occurſus eſſe G, K & M, L; manifeſtum eſt, E G æquale eſſe E F, & C K, C F; uti etiam G K, M L, ſe mutuo ſecare in medio in puncto N; & triangula G N L, K N M eſſe ſimilia & æqualia: ſumatur E H æquale E G, & C O æquale C K; tum, quia E D eſt ad D C ut pondus A ad B, patet quod lineæ E D & D C, ſint commenſurabiles, ut & H G & K O, cum inter ſe ſint ut E F ad F C, id eſt ut C D ad D E. Sint ergo K O & H G diviſæ in partes æquales per maximam earum communem menſuram, & quantitates A & B pariter diviſæ; idcirco habebuntur tot partes ponderis A; quot habentur partes in linea K O, & tot partes ponderis B, quot habentur partes in linea H G, quæ partes ponderum, æquales inter ſe, ſint ſingulæ appenſæ in medio unius ex partibus linearum K O, H G.

Jam demonſtrabimus, quod gravibus ita diſpoſitis, planum maneat in æquilibrio, quando fulcitur a puncto D, unde veritas propoſitionis erit manifeſta; quoniam concipere poſſumus omnes partes plani eſſe ſublatas & ſolas lineas K O, H G, oneratas ponderibus æqualibus ipſis A & B, ſuſtineri in extremitatibus libræ C & E, nam cum planum ſit ſine gravitate, partes ſublatæ non poſſunt mutare æquilibrium.

Ad demonſtrandum igitur, æquilibrium plani, ut dictum eſt gravati, dari in puncto D, ſint ductæ ex quovis pondere perpendiculares ad lineam L M, quantum neceſſe eſt, productam, uti R S, Z I, T V, X Y. Perpendiculares T V & R S, quæ ducuntur a ponderibus maxime vicinis punctis G & K erunt inter ſe æquales; nam triangula G N L, K N M ſunt æqualia & ſimilia, uti dictum eſt, & latera G L & K M ſunt etiam æqualia inter ſe, ut & intervalla G T & K R, quæ ſingula æqualia ſunt dimidio unius ex partibus æqualibus in quas diviſæ ſunt lineæ H G, K O; unde patet lineas T V, R S, etiam fore æquales, uti dictum eſt; Tunc ſi fulciatur planum in linea L M Q, pondus T in æquilibrio erit cum pondere R.

Pariter, ob æqualitatem perpendicularium X Y & Z I, pondus X erit in æquilibrio cum pondere Z, & ſic con-

ſequenter omnia pondera lineæ G H cum tot ponderibus ſumtis poſt K in linea K O; id eſt, ſi ſumatur pars K P æqualis lineæ G H, pondera appenſa inter K & P, æquiponderabunt cum omnibus ponderibus lineæ G H.

Si ergo pondera reliqua in linea P O etiam faciant æquilibrium unum cum altero in plano fulto a linea L M Q, ſequetur planum oneratum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio ſuper eandam illam lineam.

Æquilibrium autem ponderum reliquorum ita invenitur: cum ſit K O = 2 C F; & K P = H G, id eſt 2 C D, erit P O = 2 D F; ſed M O = D F; quoniam C M = C D; ergo M P eſt dimidium P O; Adeo ut lineâ P O, quæ continet numerum partium, quibus K O ſuperat H G, in 2 partes æquales dividatur per rectam L M Q, manifeſtum ergo eſt æqualem numerum ponderum illorum quæ continet illa linea P O dari ad partem utramque puncti M, & ſimiliter diſponi; ideo ſi numerus, illorum ponderum ſit impar, illud quod in medio eſt, erit in puncto M; unde ſequitur, ſingulas perpendiculares quas duximus ab iiſdem ponderibus ad lineam L M Q æquales eſſe ſibi reſpondentibus, & conſequenter pondera eſſe in æquilibrio, quando planum fulcitur a linea L M Q; quod cum ita ſit demonſtratum de aliis ponderibus linearum P K & H G, ſequitur planum cum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio fultum a linea L M Q; Centrum ergo gravitatis plani ſic onerati eſt in illa linea; ſed centrum gravitatis etiam eſt in linea C E, quoniam evidens eſt planum etiam futurum in æquilibrio ſi in hac linea ſuſtineatur, Erit ergo centrum gravitatis punctum commune illis duabus lineis L M Q & C E, ſcilicet punctum D in quo ſi planum ſuſtineatur manet in æquilibrio. patet ergo, veritas Theorematis.

VII.

TAB. XXXII.

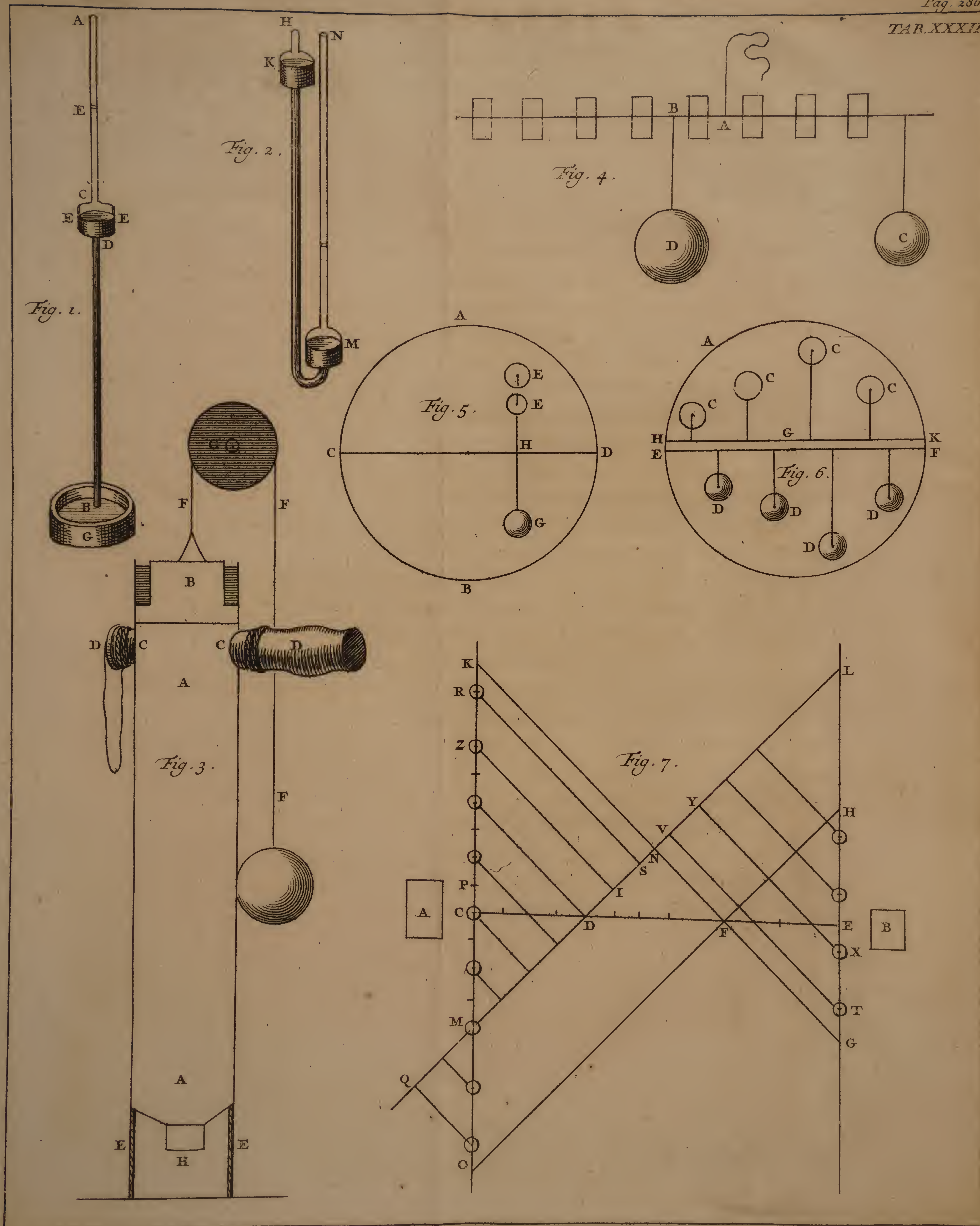


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

VII.

De potentiis fila funesve trahentibus.

PROP. I. *Si punctum A trahatur a filis duobus A B, A C angulum B A C facientibus, ſintque potentiæ trahentes ut filorum ipſorum A B, A C, longitudines multiplices ſecundum numeros datos N & O; juncta vero B C dividatur in E, ut ſit reciprocè C E ad E B ſicut numerus N ad O, & jungatur A E: dico filis A B, A C ita trahentibus, æquipollere filum A E tractum à potentia quæ ſit ut longitudo A E multiplex ſecundum numerum æqualem utriſque N & O.* TAB. XXXIII. Fig. 1.

Producantur enim A B, A C ad F & G, ut ſit A F multiplex A B ſecundùm numerum N, & A G multiplex A C ſecundùm numerum O; junctæque F G occurrat A E producta in H, & ſint B K, C L parallelæ A H.

Quia ergo F H ad H K ut F A ad A B, hoc eſt, ut numerus N ad unitatem; H K vero ad H L ut B E ad E C, hoc eſt, ut numerus O ad numerum N: erit, in proportione turbata F H ad H L, ut numerus O ad unitatem, hoc eſt ut G A ad A C, ſive ut G H ad H L. Itaque F H ad H L ut G H ad H L, ac proinde F H æqualis H G.

Sit jam A H continuata uſque in P, ut ſint æquales A H, H P, & jungantur G P, F P: eritque F A G P parallelogrammum, ad cujus diametrum P A ducantur F Q, G R, parallelæ B C. Manifeſtum igitur eſt fieri triangula ſimilia & æqualia F P Q, G A R, quorum latera inter ſe æqualia P Q, R A. Eſt autem A E ad A R ut A C ad A G, hoc eſt, ut unitas ad numerum O. Eadem verò A E ad A Q ut A B ad A F, hoc eſt, ut unitas ad numerum N. Ergo erit A E ad utramque ſimul A Q, A R, ſive A Q, Q P, hoc eſt, ad A P, ut unitas ad utrumque ſimul numerum N & O.

Cùm ergo potentiæ fila A B, A C trahentes, ſint ut A F, A G, quibus æquipollet attractio per filum A E à potentia quæ ſit ut A P, ex theoremate Mechanico ſatis noto, manifeſta eſt propoſiti veritas.

PROP. II. *Datis poſitione quotlibet punctis; ſive in eodem plano fuerint, ſive non: ſi à puncto quod eorum commune eſt gravitatis centrum, ad unum quodque datorum fila extendantur, eaque ſingula trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.*

TAB. XXXIII. Fig. 2. Sint data puncta A, B, C, D, E, quæ vel in eodem plano vel aliter utcunque collocata intelligantur: attributâ autem ſingulis æquali gravitate, conſtat commune eorum gravitatis centrum inveniri hoc modo.

Jungantur nempe duo quælibet datorum punctorum rectâ A B, quâ bifariam ſectâ in F, erit hoc centrum gravitatis punctorum A, B. Ducatur deinde ad punctum aliud C recta F C quæ ſecetur in G, ut ſit C G dupla G F; & erit G centrum gravitatis punctorum trium A, B, C. Rurſus ducatur ad aliud punctum recta G D, ſeceturque in H, ut ſit D H tripla H G, & fiet H centrum gravitatis punctorum quatuor A, B, C, D.

Similiterque ductâ H E ad punctum quintum E, ſectâque in K, ut K E ſit quadrupla K H, erit K centrum gravitatis punctorum quinque A, B, C, D, E. Ac ſimili ratione quotcunque punctorum centrum gravitatis invenire licebit.

Porro extentis filis à puncto K ad A, B, C, D, E, quæ trahantur ſingula à potentiis quæ ſint inter ſe ut ipſæ longitudines K A, K B, K C, K D, K E: dico fieri æquilibrium manente nodo communi in K. Ducantur enim à centris gravitatis inventis F, G, H, ad centrum gravitatis omnium punctorum K, rectæ F K, G K, H K. Itaque conſtat filis A K, B K, punctum K trahentibus cum potentiis quæ ſint ut longitudines eorum filorum, æquipollere filum F K, tractum à potentia quæ ſit ut dupla longitudo F K. Rurſus verò duobus his, filo F K trahenti cum potentia quæ ſit ut dupla F K, & filo C K trahenti cum potentia quæ ſit ut ſimplex longitudo C K, æquipollet filum G K tractum à potentia quæ ſit ut tripla K G per præcedentem: ergo filum G K ita tractum æquipollet filis tribus K A, K B,

K G,

K C. Similiter verò duobus his, filo G K tracto à potentia quæ ſit ut tripla G K, & filo D K tracto à potentia quæ ſit ut ſimplex longitudo D K, æquipollet filum H K tractum à potentia quæ ſit ut quadrupla H K. Ergo hoc æquipollet filis omnibus K A, K B, K C, K D, punctum K uti dictum eſt trahentibus. Atqui filo K H in directum opponitur filum K E tractum à potentia quæ eſt ut longitudo K E, id eſt ut quadrupla K H. Ergo cum filis K E, K H, in partes directè oppoſitas trahentibus cum potentiis æqualibus, punctum K neceſſario in locum ſuum ſervatum ſit, ſequitur & filis K A, K B, K C, K D, uti dictum eſt trahentibus & ex alia parte filo K E nodum reſtare immotum. Quod erat demonſtrandum.

Poſſunt autem & binorum quorumque punctorum centra gravitatis primò deſignari, & per hæc deinceps centra gravitatis quaternorum, & per hæc octonorum & ſic porro; qua ratione ſimplicior plerumque efficitur demonſtratio; ac præſertim ſi datorum punctorum numerus fuerit pariter par.

Ut ſi quatuor data fuerint *A*, B, C, D; ſive in eodem plano, ſive non: junctis A B, C D, diviſiſque bifariam in E & F; ductâque inde F E, quæ rurſus bifariam ſecetur in G; conſtat G eſſe centrum gravitatis punctorum *A*, B, C, D. Quod ſi jam nodus G trahatur filis G A, G B, G C, G D, à potentiis quæ ſint inter ſe ut hæ ipſæ filorum longitudines; dico fieri æquilibrium. TAB. XXXIII. Fig. 3.

Conſtat enim filis G A, G B, æquipollere filum G E tractum à potentia quæ ſit ut dupla G E; filis verò G C, G D, æquipollere filum G F tractum à potentia quæ ſit ut dupla G F. Cum ergo G E, G F æquales ſint, unamque lineam rectam efficiant, eodem modo nodus G trahitur, ac ſi traheretur à potentiis æqualibus per fila G E, G F. Unde immotum manere neceſſe eſt.

Conſtat verò ſi puncta A, B, C, D non ſint in eodem plano, fore G centrum gravitatis pyramidis cujus anguli hæc ipſa quatuor puncta; cum in omni pyramide idem ſit centrum

trum gravitatis ipſius ſolidi & quatuor punctorum angularium, uti oſtendere facillimum eſt. Et hinc patet veritas theorematis Robervalliani, *Si à centro gravitatis pyramidis fila tendantur ad quatuor angulos, quæ trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum ipſorum longitudines, fieri æquilibrium manente nodo in dicto gravitatis centro.*

VIII.

Solitio problematis a G G. Leibnitio propoſiti in diario (cui titulus Nouvelles de la Republique des Lettres) *menſis Sept.* 1687.

PROBLEMA.

Detegere lineam juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat.

SOLUTIO.

Impoſſibile eſt problema ſi requiratur ut corpus motum in tali linea inchoet a quiete.

TAB. XXXIII. Fig. 4. Sed ſi ponamus corpus quandam, quantumvis exiguam, velocitatem habere ex. gr. quam acquirit cadendo ab altitudine A B, quæſito ſatisfacit curva B C, cujus hæc eſt proprietas ut cubus altitudinis B D æqualis ſit quadrato perpendicularis C D ad A B continuatam ducto in $\frac{9}{4}$ A B.

Præter curvam hanc B C, in numeræ aliæ dantur ejuſdem generis, & quæ facile deteguntur, in quibus corpus etiam, temporibus æqualibus, æqualiter, ſed lentius quam per B C, ad Tellurem accedit.

Si B D ſit dupla ipſius B A, tempus deſcenſus per curvæ partem B C aquale erit tempori caſus per A B.

H. D. Z.

IX.

IX.

Christiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile ſe pondere proprio curvat.

Si Catena C V A ſuſpenſa ſit ex filis F C, E A utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A ſint pari altitudine, deturque Angulus inclinationis filorum productorum C G A, & catenæ totius poſitus, cujus vertex ſit V, axis V B. TAB. XXXIII. Fig. 5.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut ſi punctum datum ſit L, unde ducta applicata L H dividat æqualiter axem B V. Jam ſi angulus C G A ſit 60°, erit inclinanda a puncto A ad axem recta A W, æqualis $\frac{1}{2}$ A B, cui ducta parallela L R, tanget curvam in puncto L. Item ſi latera G B, B A, A G ſint partium 3, 4, 5, erit A W ponenda partium $4\frac{1}{2}$.

2. Invenitur porrò & recta linea catenæ æqualis, vel datæ cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo C G A, data erit ratio axis B V ad curvam V A. Velut ſi latera G B, B A, A G ſint ut 3, 4, 5, erit curva V A tripla axis V B.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc eſt, ſemidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc deſcriptus totus intra curvam cadat. Nam ſi angulus C G A ſit 60°, erit radius curvitatis ipſi axi B V æqualis. Sin vero angulus C G A ſit rectus, erit radius curvitatis æqualis curvæ V A.

4. Poterit & circulus æqualis inveniri ſuperficiei conoidis, ex revolutione catenæ circa axem ſuum. Ita ſi angulus C G A ſit 60°, erit ſuperficies conoidis ex catena C V A genita æqualis circulo, cujus radius poſſit duplum rectangulum B V G.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvæ K N, cujus evolutione, una cum recta K V, radio curvitatis in verti-

ce, curva V A deſcribitur; atque evolutæ ipſius K N longitudo. Velut ſi angulus C G A fuerit 60°, erit K N tripla axis B V. Si vero latera G B, B A, A G ſint ut 3, 4, 5, erit illa $\frac{9}{4}$ axis B V.

6. Præterea ſpatii N K V A N quadratura datur. Poſito enim angulo C G A 60°, erit ſpatium illud æquale rectangulo ex axe B V, & ea quæ poteſt triplum quadratum ejusdem B V. Si vero latera G B, B A, A G ſint ut 3, 4, 5, erit idem ſpatium æquale ſeptuplo quadrato B V, cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenæ inveniri poſſunt, poſita quadratura curvæ alterutrius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, vel $xxyy = 4a^4 - x^4$. Vel etiam data diſtantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abſcindunt rectæ axi parallelæ in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvæ pendet a ſummis ſecantium arcuum per minima æqualiter creſcentium: quæ ſummæ ex Tabulis ſinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod ſi angulus C G A ſit rectus, & ponatur axis B V partium 10000; erit B A, 21279, non una minus. Curva autem V A, per ſuperius indicata cognoſcitur hic eſſe partium 24142, non una minus.

In his omnibus non niſi ad caſus ſingulares ſolutiones problematum dedi, vitandæ prolixitatis ſtudio & quoniam non dubito quin regulas univerſales Viri docti affatim ſint exhibituri. Quod ſi tamen aliquæ ex noſtris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud Clariſſimum Virum *G. G. Leibnitium* involucro quodam obtectas depoſui.

X.

Hugenii Annotationes in librum Pariſiis 1689. editum, de Manuaria Nautica.

Auctor hujus libri eſt D. Renaldus (*M. Renau, Ingenieur general de Marine*), ſumma cura & methodo conſcriptus eſt, &

& auctoris peritia in Geometricis, & analyſi in hoc patet; nulla ponuntur principia, quæ vera non fatear, & integra ſi Theoria inde legitime deducta foret, nihil in opere culpandum eſſet; hoc tamen deficiente, utile credidi de notabili quem notavi errorem, monere, cum enim ſpectet ad maximam partem regularum, quæ in hoc libro Nautis præſcribuntur poſſet hos in maximos, & periculoſos admodum errores inducere.

Initium faciam memorando quæ in Art. 1. cap. 2. continentur, in quo Auctor navem H B M ponit, in qua linea recta D C Veli poſitionem repræſentat, quod tanquam plana ſuperficies concipitur, perpendiculariter ſuper iſtam lineam elevatam; A B eſt directio venti qui velum propellit; B G eſt perpendicularis ad D C; G K eſt perpendicularis ad B K, carinam navis productam; G E A eſt arcus circuli centro B deſcripti; B K G eſt circuli peripheria cujus Diameter eſt B G. TAB. XXXIII, Fig. 6.

Veriſſimum eſt quod Auctor notat, ſuperficiem C D a vento A B propelli juxta lineam B G, ita ut navis per B G ad punctum G tenderet, ſi nullibi magis quam ad proram aqua reſiſteret. Addit, navem iſtam lineam percurrendo directe progredi per B K, & ad latus per K G; ſed cum navis majori difficultate aquam lateribus, quam prorâ ſecet, non poterit juxta directionem K G per integram hanc lineam progredi, ſed deerit pars, quæ ſequetur rationem exceſſus quo difficultas ſecandi aquam ad latus ſuperat difficultatem qua navis hanc prorâ ſecat; ex. gr. ſi difficultas ſecandi aquam ad latus ſe habeat ad difficultatem qua prora illam ſecat ut decem ad unum, ſi fiat K G ad K L ut 10 ad 1, & ducatur B L, dicit Auctor navem moveri per B L, hancque lineam percurrere eo tempore quo potuiſſet in G pervenire, ſi reſiſtentia ab omni parte fuiſſet æqualis.

Auctorem huc uſque nos fuiſſe ſecutos ſufficiat. Contendo ipſius errorem in eo dari, quod dicat navem pervenire ex B in L *eodem tempore*, quo perveniſſet ex B in G. Nam ſi deviatio nullam eſſe ponamus, ut ambages removeantur, certiſſimum eſt navem, juxta Auctorem, progredi

ex B in K, eodem tempore, quo pergeret ex B in G, ſi undequaque aquam eadem facilitate ſecaret, aut directe per B G, æque ac per B K progrediretur.

In his ſic ratiocinatum fuiſſe auctorem videtur, ſcilicet, ſi in motu ex B in G, navis feratur ad latus per K G & directe progrediatur per B K, oportet, ut ſublato motu per K G, motus per B K ſuperſit, quo motu linea B K percurrebatur eodem tempore quo B G.

Sed notandum erat, licet motus navis per B G poſſit concipi tanquam compoſitus ex motibus per B K, & K G, inde non ſequi ſi in re ipſa tantum ſuperſit motus per B K (ſive figura ipſius navis in cauſa ſit, ſive hæc cohæreat cum fune infinito B R, perpendiculari ad B M) ventum qui navem ex B in G tranſtuliſſet, hanc æquali tempore poſſe transferre ex B in K. Ut enim determinemus viam juxta B K percurſam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad reſiſtentiam quam ex actione aquæ patitur navis.

Conſtat autem in Mechanicis, vim, qua velum D C, navem pellit per B K, eſſe ad vim qua idem velum, & in eadem poſitione reſpectu venti, illam pelleret per B G, uti B K ad B G: ut Auctor ipſe ponit in his, quæ ſcripſit de impreſſionibus aquæ in gubernaculum Art. 5: hujus ſecundi Cap. Sed celeritates quoque eſſent ſicuti B K ad B G; quia ponit Auctor lineas æqualibus temporibus percurri. Vires ergo forent ut celeritates, quod impoſſibile eſt, dictiſque Auctoris repugnat in 13° Art. primi Cap. ubi dicit, *ut corpus diverſis velocitatibus in fluido moveatur, requiri vires in ratione quadratorum celeritatum*: lineæ ergo B K, B G, non percurruntur æquali tempore. Ut autem determinetur, ſpatium juxta B K percurſum continuanda eſt B K in S, ita ut B S ſit media proportionalis inter B K, B G. Tum B S erit ſpatium, quod eo tempore permeabit navis quo pergeret per B G; ſi aquam juxta hanc directionem eadem facilitate ſecaret. nam quadrata celeritatum per

B G,

B G, & B S, & conſequenter etiam aquæ reſiſtentiæ ſunt inter ſe ut B G ad B K; aſt, uti modo oſtendi, virium ratio eſt etiam ut B G ad B K; vires igitur ſunt ut reſiſtentiæ, & etiam ut quadrata velocitatum. Hæ ergo ſunt velocitates, quæ ſunt ut B G ad B S, quas Navis in ambobus motibus acquirere debet ſecundum ipſam Auctoris ſtatim memoratam, nec in dubium revocandam, regulam. Non ergo ut credidit Auctor circumferentia circuli B K G determinat ſpatia a navi permeanda in diverſis carinæ poſitionibus, manente eadem veli C D poſitione reſpectu directionis venti, ſed determinantur hæc ſpatia curvâ B I S G T, cujus puncta eodem modo ac S, facile inveniuntur. Hic autem notandum eſt, ſpatia quæ hac curvâ deteguntur, eo magis ab iis differre, quæ Auctor adhibitâ circumferentiâ B K G determinat, quo angulus quem carina cum venti directione efficit acutior eſt; ita juxta B N navis progredietur per B I, quæ dupla eſt ipſius B N circulo inſcriptæ, ſi B N ſit $\frac{1}{4}$ B G; & tripla ſi B N ſit $\frac{1}{9}$ B G.

Error a me notatus in toto fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur Theoremata quæ de cætero elegantia videntur. Quale eſt inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, carinæ ſitum, quo in adverſum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati; unde Auctor deducit, ponendo quod deviatio nulla ſit, carinæ & veli ſitum in hoc caſu omnium maxime utilem dari, quando angulus quem carina cum vento efficit eſt 60 gr., & angulus venti cum velo 30 gr., quod a vero abeſt; nam per Regulam, quam veram novi detego, quando venti & carinæ angulus eſt graduum 60, navem celerius moveri, ideoque in adverſum venti magis progredi, ſi angulus veli & venti 38 gr. 23′. fiat, quam ſi angulus hicce foret 30 graduum. Regula qua detego veli ſitum, ut navis omnium celerrime moveatur, ubi carinæ cum vento angulus datus eſt, talis eſt $x^4 = aaxx + \frac{1}{3}ppxx - \frac{4}{9}aapp$. ſcilicet, ſi x deſignat ſinum O Q anguli veli cum vento, a radius B A, p ſinus F P anguli carinæ cum vento. Et congruit hæc regula cum illa quam

D. Fatio antea invenit, cum aliis pulcherrimis circa hanc materiam, ut percepi in tabula quadam, in qua quorundam iſtorum angulorum rationes deſignarat. Duas veras radices continet æquatio hæc inſervientes duobus caſibus, in quibus carina cum venti linea eundem angulum efficit, utpote, quando navis vento ſecundo aut adverſo utitur.

Cæterum quin vera ſit noſtra regula non poterit, D. Renaldus dubitare, cum per eam angulus gubernaculi cum carina, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem determinavit in capite 7°. Quod ipſius inventum certe utiliſſimum eſt. Ponendo enim $p = a$, id eſt ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, noſtrâ regulâ habetur $x = \sqrt{\frac{2}{3} aa}$, quem ille detexit ſinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod ſic neceſſario ſeſe habere facile patet.

Licet Theoria hæc poſt a me indicatam correctionem difficilior evadat, quam in tractatu D^ni^ Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi poſſe, qua & navis & veli ſitus determinarentur, ut in adverſum venti omnium maxime progrediatur, ſed computatio nimium longa foret, quare hanc nunc non aggredior. Quibus addendum navis deviationem in hac computatione non conſiderari, ex qua conſideratione maxima daretur difficultas. Quia non modo cum auctore attendendum eſt ad relationem inter reſiſtentias quas patitur navis proram verſus & ad latus, ſed etiam ad actionem venti in ipſam navem, præcipue in hujus latus; ita ut ex unica obſervatione quæ ad deviationem ſpectant non poſſent deduci.

X I.

Reſponſum D^ni^ Renaldi ad Dominum Hugenium.

D^nus^ Hugenius hæc ponit, *licet motus navis per B G poſſit concipi tanquam compoſitus ex motibus per B K & K G, inde non ſequi, ſi re ipſa tantum ſuperſit motus per B K, ventum, qui navem ex B in G tranſtuliſſet, hanc æquali tempore poſſe trans-*

transferre ex B in K. Et primo in eo mihi videtur falli. Nam ut navis poſſit ferri ex B in G tempore determinato, neceſſe eſt ut reapſe celeritatem habeat, quâ eodem tempore ſecundum determinationem B K, lineam B K, & ſecundum determinationem K G, lineam K G poſſit percurrere. Et ne hoc in dubium vocari poſſit, concipiamus navim pelli ſecundum determinationem B K, vi quâ certo tempore ex B poſſit pervenire in K; concipiamus eandem ſimul pelli ſecundum K G, vi quâ eodem tempore poſſit percurrere lineam K G: cum duæ hæ vires nec ſibi contrarientur nec etiam concurrant (eſt enim B K perpendicularis ipſi K G) neceſſe eſt ut harum unicuique navis ex toto obſecundet; & per conſequens celeritas, quam ſingulis momentis habebit ſecundum B K, erit ad celeritatem, quam iiſdem momentis habebit, ſecundum K G, ut B K ad K G; & ita navis utrique vi ſatisfaciens, movebitur per B G, & tempore determinato perveniet in G; Et ideo ſi in effectu ipſi relinquatur ſolus motus per B K, vis quæcunque, quâ pelleretur ex B in G, illam tempore æquali pellet ex B in K. Inutilem enim reddendo illam impreſſionis partem, quæ requiritur ut eodem tempore navis percurrat K G, neque augetur, ut diximus, neque minuitur celeritas per B K. Fateor, ſi angulus B K G eſſet acutus, vim peculiarem quâ pelleretur navis ſecundum K G, aliquid detracturam celeritati, quam haberet ſecundum B K utpote ſibi contrariæ; & contra, ſi angulus B K G foret obtuſus, eandem celeritatem utpote cum altera concurrentem, eſſe augendam; ſed cum angulus B K G rectus ſit, vis illa celeritatem navis ſecundum B K neque auget, neque minuit.

¶ Addit D^nus^ Hugenius; *Ut enim determinemus viam juxta B K percurſam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad reſiſtentiam quam ex actione aquæ patitur navis.* Statim oſtendi relationes celeritatum in variis determinationibus ſibi invicem perpendicularibus, ſufficere ad detegendam viam, quam navis eſt ſecutura; nec per conſequens ad id requiri relationem virium, nec reſiſtentiarum; ſed cum dictæ celeritates à viribus dependeant, idem ex rela-

relatione virium facile probabo.

Demonſtravi Articulo 13° Cap. 1. Theoriæ manuariæ nauticæ, de quo Articulo D^{nus} Hugenius mecum conſentit, vires navem propellentes eſſe inter ſe ut quadrata velocitatum; & propterea vis requiſita, ut navis certo tempore ſecundum determinationem B K conficiat B K, eſt ad vim, quâ ſecundum determinationem K G conficiat K G, ut quadratum B K, ad quadratum K G; unde ſequitur, navem, ſi ſecundum duas illas determinationes ſimul pelleretur, habituram vim duabus illis viribus æqualem; cum ſcilicet neutra neutri quicquam vel addat vel detrahat; per conſequens vis illa exprimetur per quadratum ipſius B G, quod æquale eſt quadratis B K & K G; & ita navis habebit celeritatem ex illa vi ortam, id eſt, dicto tempore quantitatem B G peragrabit. Et propterea, ſi navis pelleretur ſecundum B G, vi quæ exprimitur per quadratam B G, perveniret in G eodem tempore, quo perveniret in K, ſi pelleretur ſecundum B K, vi quam exprimit quadratum B K.

Pergit D^{nus} Hugenius hoc modo; *Conſtat autem in mechanicis, vim, quâ velum D C pellit navem per B K, eſſe ad vim, quâ idem velum, & in eadem poſitione reſpectu venti, navem pelleret per B G, ut B K ad B G.* Non ego fateor id ex regulis Mechanices ſequi; è contra certum eſt, virium illarum relationem inter ſe eſſe ut quadratum B K ad quadratum B G, non vero ut B K ad B G; & ut omne hic dubium eximatur, concipiamus aërem ſecundum lineam A B duplo citius moveri uno tempore quam altero. Quando duplo citius movebitur quadruplo fortius in velum impinget, quoniam unaquæque particula duplo fortius impingit propter velocitatem duplam, propter quam etiam duplo plures particulæ eodem tempore impingunt. Quare ſi velocitas ſit dupla, & maſſa itidem dupla, vis ſeu potentia eſt quadrupla. Si tripla foret velocitas, unaquæque particula triplo fortius impingeret, quia tripla eſſet velocitas; & ſimul quia tripla eſſet velocitas, triplo plures

par-

particulæ ſimul impingerent; unde triplâ exiſtente velocitate, maſſâ etidem triplâ, potentia aut vis erit noncupla; ex quo patet maſſam augeri in eadem ratione, qua velocitas augetur; & cum unaquæque pars etiam fortius impingat in ratione auctæ velocitatis, potentia aut vis venti in velum, eſt in ratione duplicata celeritatum venti, id eſt, in ratione quadratorum velocitatum venti in velum. Agnoſcit hocce principium Cl. Hugenius; reſtat ergo tantum, ut illud applicemus.

Prima applicatio oſtendet, quare vis venti in velum, cum ventus velo perpendicularis eſt, ſeſe habeat ad vim ejuſdem venti in velum, quando illud inclinatum vento opponitur, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ; aut, quod idem eſt, cur vires ejuſdem venti in vela varia inclinatione ipſi obtenſa, ſint inter ſe in ratione quadratorum ſinuum angulorum incidentiæ, quod demonſtravi Articulis 7. 8. & 9. Cap. 1., & quod etiam hoc modo nunc demonſtro. Probatum dedi in Theoria Manuariæ Nauticæ, Artic. 6. Cap. 1. corpus motum ab A in B non occurrere ſuperficiei C D niſi ſecundum determinationem ſuam A V, ponendo ſcilicet A V perpendicularem ipſi D C productæ, & in illam ſuperficiem nullam vim exſerere niſi ſecundum hanc determinationem; quod agnoſcit D^nus^ Hugenius. Hoc poſito, ventus A B in velum non agit, niſi ſecundum hanc determinationem, id eſt, cum velocitate A V. Si velum C D vento A B perpendiculare eſſet, ventus in velum ageret velocitate A B; & per conſequens ex principio quod ſtatim adſtruxi, vis cum qua ventus in velum ageret, ſi vento eſſet perpendiculare, eſt ad vim venti in velum D, quod inclinatè vento obtenditur, ut quadratum A B ad quadratum A V, id eſt, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ.

Secunda applicatio inſervit ſolvendæ quæſtioni, de qua lis eſt inter D^num^ Hugenium & me, id eſt oſtendit, quod, velo conſtituto in ſitu C D, & navi in ſitu B K, vis, qua ventus ope veli, navim ſecundum B G propellit, ſit ad vim, qua idem ventus, ope ejuſdem veli navim propellit ſecun-

 dum

dum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K; & non quemadmodum ſuſtinet Hugenius, ut B G ad B K.

Quod ut pateat, concipiamus ventum in velum impingere cum velocitate B G; quoniam in illud impingit ſolummodo per motum, qui dirigitur ſecundum B G ſpectandus eſt ventus, tanquam latus ex B in G velocitate B G. ſed quando illa velocitate fertur ex B in G, fertur velocitate B K ſecundum determinationem B K, & velocitate K G ſecundum determinationem K G; quare ex iis quæ ſuperius a me dicta ſunt, vis qua navis pellitur ſecundum B G eſt ad vim qua pellitur ſecundum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K; & ad vim, qua pellitur ſecundum K G, ut quadratum B G ad quadratum K G. Obſervandum autem eſt, eandem vim venti in velum, id eſt, vim totalem ſecundum B G, quam vim exprimit quadratum B G, diviſam eſſe ſecundum B K, & K G, in duas partes, quarum ſumma vim totalem adæquat; & illa vis, potentia, ſeu motus, quibus tribus una eademque res ſignificatur nominibus, nullum vel augmentum vel imminutionem accipit, ex noſtris motum conſiderandi modis, qui motus non in ſola corporum velocitate conſiſtit, ſed ex eorundem maſſis quoque conſtituitur. Ergo potentia, vis, ſeu motus, eſt productum quadrati celeritatis per maſſam. Quare potentia ex duabus aliis potentiis conflata, iis æqualis eſt, dummodo unius determinatio determinationi alterius ſit perpendicularis, quia eo in caſu duæ illæ potentiæ, nec quicquam addere, nec detrahere quicquam altera alteri, poſſunt, duabus determinationibus, uti diximus, nihil oppoſiti habentibus. Inde fit ut potentia ſecundum B K eadem manere poſſit, idemque per conſequens illius effectus, licet in infinitum augeatur ſeu minuatur potentia ſecundum K G. Eo in caſu ſola potentia totalis B G mutationem patietur, quia ſemper æqualis erit ſummæ potentiarum, ex quibus producta fuerit.

Ex omnibus, quæ a me nunc dicta ſunt, ſequitur, navem H B M, ſi pellatur ſecundum B G ope veli D C, & ſi

ſi velocitas, quâ movetur ad latus, ſit ad velocitatem quâ directè progreditur, ut G K ad L K, ſequitur, inquam, navem juxta B L proceſſuram, & in L perventuram eodem tempore, quo perveniſſet in G, ſi ab omni parte aquas ſecaret eadem facilitate, quâ ſecat has à parte proræ; & ſi, quemadmodum poſuit D^nus Hugenius, navis fune B R infinite longo, & ipſi B K perpendiculari adſtringeretur, ad tollendum omnem motum ſecundum determinationem K G, ſequeretur etiam perventuram navim ad punctum K eodem tempore quo perveniſſet ad punctum G; quod erat in quæſtione, & quod erat demonſtrandum.

Si vera foret mechanices regula, quam memorat D^nus Hugenius, ſcilicet vim cum qua velum D C navim propellit ſecundum B K eſſe ad vim, cum qua idem velum navem ſecundum B G propellit, ut B K ad B G, non ſolum navis non perveniret in K eodem tempore, quo perveniſſet in G, poſitis circumſtantiis, de quibus ſupra, ſed & navis aquam æqualiter ab omni parte ſecans, & a velo D C, ſecundum B G ipſi perpendicularem propulſa, non ferretur juxta lineam B G: nam ex eadem mechanices regula, vis, qua ferretur navis juxta B K ope veli, foret ad vim qua ferretur ſecundum K G, ut B K ad K G, & velocitates navis eſſent inter ſe ut radices virium. Ergo velocitates quæ ex illis viribus orirentur, ſcilicet velocitas quam ſingulis momentis acquiſiviſſet navis in motu juxta B K, eſſet ad velocitatem quam iiſdem momentis haberet ex motu juxta K G, ut radix B K ad radicem K G. Sed ut navis moveatur ſecundum B G, quando inæquales ſunt velocitates inter ſe, quales hic a nobis ponuntur, requiritur, ut ſint inter ſe ſingulis momentis, ut B K ad K G, & non ut eorundem radices. Ergo navis non ferretur juxta B G, quod eſt abſurdum; nam cum vis totalis, quæ navem impellit, ſit juxta B G, ponendo navem ab omni parte æqualiter aquam ſecare, non poteſt non illam lineam ſequi.

Ita pergit Cl. Hugenius, *Error à me notatus in toto*

fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur theoremata, quæ de cætero elegantia videntur. Quale eſt inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, Carinæ ſitum, quo in adverſum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati. Unde Auctor deducit &c.

Siquidem, quem errorem credidit Dnus Hugenius, errorem non eſſe oſtenderim, intacta remanent tractatus mei theoremata.

Addit; *Cæterum, quin vera ſit noſtra regula non poterit dubitare Dnus Renaldus; cum per eam angulus gubernaculi, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem Cap. 7. determinavit. Quod certe ipſius inventum utiliſſimum eſt. Ponendo enim p* $\sqsupset$ *a, id eſt ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, noſtrâ regula habetur x* $\sqsupset \sqrt{\frac{2}{3} a a}$, *quem ille detexit ſinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod ſic neceſſario ſeſe habere facile patet.*

Et hic à Dno Hugenio diſſentire cogor, & ab ipſo meo conſequenter tractatu, in quo error datur maximus, ſtatim à me, detectâ prius ingenue ejuſdem cauſâ, oſtendendus. Compoſueram primo librum meum, pro vero ponendo principium falſum, à P. Pardies, art. 118. ſcientiæ virium motricium prolatum; præter quod nil continet de navis motu tractatus illius, & quod nec ipſum ulli rei applicatur; imo nullam auctor viam aperit ſolvendi vel unam, quæ ſpectat theoriam Manuariæ Nauticæ, propoſitionem. Cum jam ſub prælo ſudarent ultimæ libri I. paginæ; principii memorati falſitatem animadverti, & quoniam per omnes tractatûs propoſitiones diſperſum, falſas reddebat reſolutiones omnes, totam editionem ſuppreſſi. Solidiori poſtea fundamento nixus eaſdem denuo ſolvi, præloque ſubjeci, hæ ſunt quæ in lucem ſunt editæ. Sed aliis diſtentus negotiis, vocem *vis*, loco *velocitatis*, quæ erat ſubſtituenda, in demonſtratione Art. 5. Cap. 2. incogitanter reliqui; quod Dnus Hugenius non attendit. Fateor me, in Art. 6. Cap. 1. promiſcue vocibus *virium* & *velocitatum* uti, ſed unius tantum corporis in vacuo motum ibi

ibi conſidero, & in eo caſu velocitas & vis eandem ſemper relationem habent. Capitis autem 7. errorem, poſt alteram tantum libri mei editionem animadverti, neque tunc illum corrigere per negotia mihi licuit. Falſitatem vero ita demonſtro.

Centro B deſcribatur circulus A D R E C, & repræſentet linea A B carinam navis, B R vero carinam productam. Supra B R, tanquam diametrum deſcribatur ſemicirculus B G R, & ſimiliter ſupra A B ſemicirculus A V B. Sit B D certus gubernaculi ſitus, & B C gubernaculum productum; B E perpendicularis ſupra A B; B G & A V perpendiculares ſupra D C; & G H perpendicularis ad B E. Ponendo alium gubernaculi ſitum, qualis eſt B *d* producta in *c*; ducantur in iiſdem circumſtantiis lineæ B *g*, A *u*, & *g h*. Si navis antrorſum moveatur ſecundum lineam B A, anguli A B C, & A B *c* æquales angulis G B E, & *g* B E, ſunt anguli incidentiæ aquæ in gubernaculum. Unde ſequitur, aquam, poſito gubernaculo in ſitu B D, impingi ſecundum determinationem & cum velocitate A V, & per conſequens cum vi, quam exprimit quadratum ipſius A V. Et quoniam velocitas navis ſeſe habet tantum ut radix ipſius vis, propter aquæ reſiſtentiam, propellitur navis ſecundum determinationem B G, velocitate quæ exprimitur per B G, quia B G eſt æqualis & parallela ipſi A V. Sed quando propellitur navis ſecundum B G velocitate B G, propellitur ſecundum B E velocitate B H. Si gubernaculum foret in alio ſitu B *d*, iiſdem ratiociniis probaretur, navem pellendam fore ſecundum B E velocitate B *h*. Sed quando majori velocitate navis pellitur ſecundum B E, citius etiam convertitur. Quare ſi B G, quæ perpendicularis eſt ad gubernaculi ſitum, ſecet ſemicirculum B G R bifariam, id eſt, ſi angulus G B E, æqualis angulo incidentiæ A B C, ſit 45. graduum, G H perpendicularis ipſi B E, erit tangens ſemicirculi. Ergo G H quæ exprimit celeritatem, quâ navis pellitur ſecundum B E, eſt omnium maxima. Nam ſi gubernaculum conſtituatur in alio ſitu, ut in B *d*, tunc B *g* ipſi perpendicularis, ſecabit

TAB. XXXIII. Fig. 7.

ſemicirculum in g, unde ſi ducatur perpendicularis $g\ h$, erit illa propior puncto B, quam ipſa G h, & navis pelletur ſecundum B E velocitate B h, quæ minor erit quam B H. Quare, ut navis citiſſime convertatur, neceſſe eſt ut *vectis* gubernaculi B C cum carinâ navis faciat angulum 45. graduum, non autem, ſicut Cap. VII. Theoriæ dicitur, angulum graduum circiter 55.

Concludit Cl. Hugenius hiſce verbis, *licet theoria hæc poſt indicatam à me correctionem difficilior evadat, quam in tractatu Dni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi poſſe, qua & navis & veli ſitus determinarentur, ut in adverſum venti omnium maxime progrediatur, ſed computatio nimium longa foret quare hanc nunc non aggredior.*

TAB. XXXIII. Fig. 8. In meo certe tractatu facillima foret determinatio ſitûs navis velique, non tantum ſi in adverſum venti omnium maxime ſit progrediendum, ſed & conveniens cuicunque viæ inſtituendæ, ſi deviatio navis à calculo ſecluderetur; quod ut pateat, ſit linea venti A B, & ſit data via B K, cum vento conſtituens angulum quemcunque A B K. Ut inveniatur, quo veli ſitu, navis illâ viâ citiſſime poſſit progredi, ſi ſcilicet nulla ſit deviatio; ſumatur B R tanquam diameter, & centro M deſcribatur ſemicirculus B G V; ab eodem puncto M ducatur M G viæ B K parallela; a puncto B ad punctum G ducatur B G, & tandem ducatur D B C perpendicularis ipſi B G. Dico D C repræſentare veli ſitum, quo per viam B K navis omnium citiſſime poſſit progredi. Ad id probandum, ducatur G K perpendicularis ipſi B K. Ex omnibus quæ ſuperius dicta ſunt; patet ventum A B propellere navem ope veli D C, ſecundum B G velocitate B G, eodem tempore quo eandem propelleret ſecundum B K velocitate B K. Et quoniam G K eſt perpendicularis ipſi B K, erit itidem perpendicularis ipſi M G. Ergo G K eſt tangens ſemicirculi. Ergo quotcunque ducantur perpendiculares ex aliis circumferentiæ ſemicirculi punctis, ſupra B K, cadent omnes inter B & K. Ergo navis celeritas in veli ſitu D C erit omnium maxima. Addo, velum D C ſecare bifariam an-

angulum A B K, qui eſt angulus venti cum viâ. Ad quod demonſtrandum ducatur M N perpendicularis ipſi B G. ſecat M N angulum B M G angulo A B K æqualem, bifariam; & quoniam M N eſt parallela ipſi D C, angulus B M N dimidius anguli B M G, qui æqualis eſt angulo A B K, æqualis eſt angulo A B C, qui ipſe per conſequens æqualis eſt dimidio angulo A B K. Unde ſequitur, veli ſitum ſemper bifariam debere ſecare angulum venti & viæ, & cum agitur de progrediendo in adverſum venti, debere illum cum velo conſtituere angulum 30. graduum, proramque itidem cum velo angulum 30. grad.; quia, ut demonſtratum fuit in Theoria Manuariæ Nauticæ, quocunque in ſitu reſpectu venti diſponatur velum, neceſſe eſt ut ejus complementum prora bifariam ſecet. Et exinde apparet, quocunque in ſitu conſtituatur prora, quæ ſemper cum via congruit; quia ponitur navem non deviare, neceſſe eſſe ut angulum quem cum prora, ventus conſtituit, velum bifariam ſecet. Unde ſequitur angulum rectum debere à prora & velo in tres partes æquales ſecari, id eſt, ventum cum velo 30. gradus conſtituere, proram itidem cum velo 30. gradus; & cum vento per conſequens 60.

XII.
Exceptio Dni Hugenii ad Reſponſum Dni Renaldi.

Mihi evidens videbatur illud quod in obſervationibus de errore primario, qui reperitur in tractatu de manuaria nautica Dni Renaldi, propoſueram, & cenſuerunt viri in re Mathematicâ verſatiſſimi, argumentum meum omni exceptione majus eſſe; idcirco neque credideram, velle ipſum quidpiam reſpondere, quo ſuam confirmaret Theoriam; interim ex iis, quæ in lucem edidit, apparet eum minime de ſuo errore mecum ſentire; & quandoquidem rationibus utitur, e quibus haud ita facile ſe expedire poſſent illi, qui non ſatis hæcce omnia excuſſerunt, obſtrictum me credidi ad demonſtrandum ma-

majori evidentiâ, quam antea, ejus Theoriam ſuſtineri non poſſe, niſi principia mechanices, jam dudum ſtabilita, quorumque veritatem negare nec auderet, nec vellet, evertantur.

Ne inutiliter protraham controverſiam noſtram reſpondendo argumentis quæ Dus Renaldus mihi objicit, oſtendam tantum illum, ut jam obſervaram, erraſſe in propoſitione, qua nititur tota ejus Theoria, deinde paucis indicabo, quid huic errori anſam dederit.

TAB. XXXIII. Fig. 9. Ut oſtendam, quinam ſit quæſtionis ſtatus, hic maximam partem eorum, quæ noſtras figuras ſpectant, repeto, ſcil; H M eſt navis carina; C D velum; A B linea venti velum inflantis; B G eſt perpendicularis ad C D; G K perpendicularis ad B K, quæ indicat carinam prolongatam; continuo G B ad Z, & M H ad X.

Dus Renaldus in Theoria cap. II. Art. 1. dicit, ſi ponatur navem undique eâdem, qua puppis, facilitate aquam findere, illam ita a vento propelli, ut progreſſura ſit per rectam B G, quod eſt verum; ſed ſi juxta ſitum carinæ navis tantum progredi queat in recta B K, vel ſi funis B R perpendicularis ad B K, & cujus longitudo cenſetur infinita, eam cogat inſiſtere in via B K, contendit, velo & vento iiſdem ac antea manentibus, navem percurſuram ſpatium B K, eodem tempore quo percurriſſet B G; ego autem defendo, quod percurreret ſpatium B S, medium proportionale inter B K & B G; Et hic eſt controverſiæ noſtræ ſtatus.

In probatione, quam affert in reſponſione ſuâ, loco venti A B oblique cadentis in velum C D, ſubſtituit ventum Z B, qui in id perpendiculariter agit; quod poteſt, & minime controverſiam mutat, quum certum ſit, quod quocunque ſenſu ventus in velum C D cadat, conetur navem propellere per viam B G perpendicularem ad C D; neque ullius uſus ſunt, quas habet D. Renaldus, diverſas conſiderationes de motu venti. Ratiocinando dein invenit, quod vis, quâ navis pellitur a vento ſecundum B G ope veli, ſit ad vim, qua pellitur ab eodem vento ope ejuſdem veli ſecundum B K,

ut

ut quadratum B G ad quadratum B K, non vero ut B G ad B K, quod ego contendo, & inde tota res pendet.

Ut determinemus cujus ſententia vera ſit, concipiamus planum, in quo noſtra figura exiſtit, ita ad Horizontem erectum, ut linea B G ad eundem ſit perpendicularis, & ſit R B X funis affixus in R, ad quem in B alligatum & ſuſpenſum ſit pondus Q: Ponamus ulterius portionem B X perpendicularem ad R B a manu retineri in X; clarum eſt, id exacte repræſentare caſum navis, de quo eſt quæſtio; nam loco venti, qui impingendo in velum C D propellat navim ſecundum B G, hic habemus pondus Q, quod trahit punctum B juxta B G; & funis B R, qui cenſetur infinitæ longitudinis, & impedit, quo minus navis aliam plagam versùs, quam B K poſſit progredi, hic eundem edit effectum reſpectu nodi B.

Ut ergo vis, qua ventus propellit navem ſecundum B G, eſt ad vim, qua hanc propellit ſecundum B K, ita eſt pondus Q ad gravitatem, quæ agit in manum quæ in X cohibet, quò minus nodus B moveatur verſus B K; illa enim gravitas æquipollet vi, qua nodus ſecundum B K trahitur. Cum autem G K parallela ſit ipſi B R, certum eſt ex notiſſimis Mechanicæ regulis, quod pondus Q ſit ad id quod retinet chordam B X, vel ad gravitatem quæ in X agit in manum ut B G ad B K. Vis ergo, qua navim propellit ventus ſecundum B G, eſt ad vim, qua propulſa eſt verſus B K, ut B G ad B K non vero, ut illarum linearum quadrata, ut Dnus Renaldus contendit.

Ponamus porro, navem H M, quæ undas eadem undique facilitate ſecat, propelli per ventum Z B vel A B (perinde enim eſt) quo naviget certo tempore per B G, velo exiſtente in C D, & determinandum eſſe, quantum progreſſura ſit ſecundum B K æquali tempore eodem vento, eodemque veli ſitu. Cum celeritates navis in duabus illis viis tales debeant eſſe, ut reſiſtentiæ, quas infert ipſi aqua, ſint ut vires, quibus propellitur (nam in eo caſu ſolo motu æquabili progreditur), & cum reſiſtentiæ

ſint ut quadrata celeritatum, ideo requiritur ut quadrata celeritatum ſint ut vires, id eſt ut G B ad B K; & conſequenter ut velocitates ſint ut G B ad B S; quandoquidem quadrata G B & B S ſunt ut lineæ G B, B K per conſtructionem. Probavi ergo ex ordinariis Mechanices principiis, id, quod in obſervatione mea propoſueram.

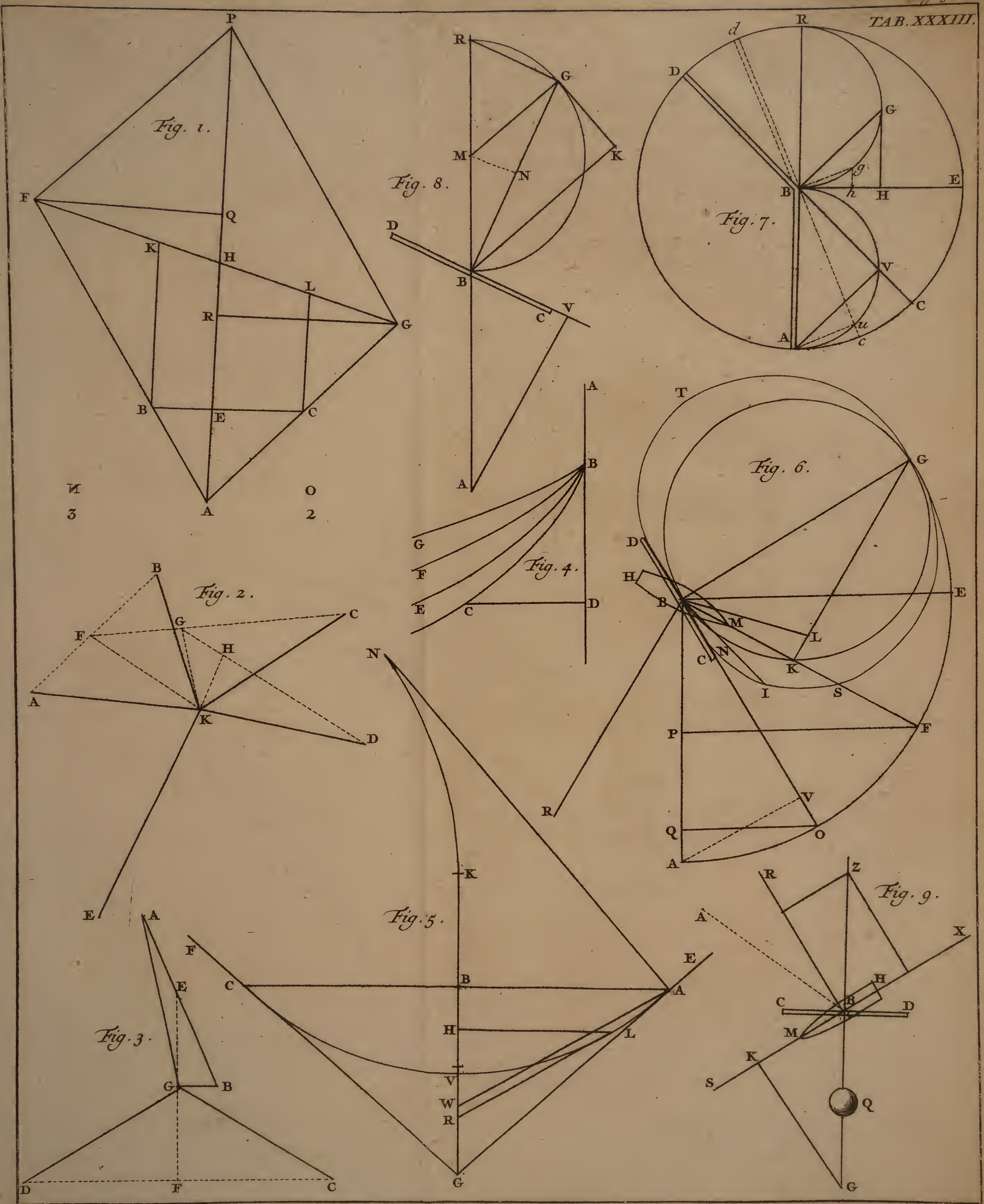
Superfluum foret alia argumenta D[ni] Renaldi examinare, quibus vult hanc eandem, quam refutavi propoſitionem, confirmare; ſolummodo indicabo originem erroris, qui in iis occurrit, præſertim naſci ex eo, quod in Articulo 7. Cap. 1. Theoriæ ſuæ concludat, *vires relativas materiæ fluidæ ad ſuperficies diverſimode inclinatas eſſe inter ſe, ut quadrata ſinuum angulorum incidentiæ;* debuiſſet addere *ad ſuperficies æquales diverſimode inclinatas;* cujus vocis *æquales* paulo ante in eodem Articulo pag. 7. quoque non meminerat; quod ſi suppleatur, tum demonſtratio optime congruit cum concluſione cumque veris principiis P: Pardies in Art. 118. Tractatus de *Viribus moventibus.* Pater hic tantum in eodem illo Articulo deceptus fuit, quod ignorarit vel ſaltem non recordatus fuerit, reſiſtentias aquæ in corpus eſſe ut quadrata velocitatum ejus corporis; ideo enim p. 225. facit *a f ad a u in duplicatâ ratione b o ad m p* cum ſimpliciter facere debuerit *a f ad a u, ut b o ad m p.*

Quod attinet ad utiliſſimum Gubernaculi ſitum, D[nus] Renaldus ſe ipſum nullo jure culpat, & dum quæ primo determinaverat corrigere conatur, male ratiocinatur; in reſponſione p. 303, nam tantum determinandum eſt, in quonam Gubernaculi ſitu aqua id propulſura ſit maximâ vi, juxta perpendicularem ad carinam; unde neceſſario ſequetur maximâ puppis velocitas juxta illam perpendicularem. Errat etiam, quum vult, p. 25 Theoriæ ſuæ de Manuaria Nautica, legi *velocitas* loco *vis.*

Quod ſupereſt, obſervo, totam hanc Theoriam, ut ediderat, veram fore ſi reſiſtentiæ aquæ eſſent ut velocitates navis, ſunt autem ut quadrata illarum velocitatum.

F I N I S.

TAB. XXXIII.


Fig. 1.
P F Q K H L R G B E C A
3 2
Fig. 8.
R G M N K D B C V A
Fig. 7.
d R D G g B h H E V A u c C
Fig. 2.
B G F H C A K D E
Fig. 4.
A B G F E C D
Fig. 6.
T G D H B E M L C N K I S P F R V Q O A
Fig. 3.
A E G B D F C
Fig. 5.
N K F C B A E H L V W R G
Fig. 9.
R Z A X H C B D M K S Q G

CHRISTIANI HUGENII
A ZULICHEM,
Dum viveret Zelhemi Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN SECUNDUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA GEOMETRICA.

TOMUS SECUNDUS.

Tomi ſecundi contenta.

THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, ex dato portionum gravitatis centro. Quibus ſubjuncta eſt Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno CIƆIƆCXLVII. 309.

EPISTOLA AD C. V. FRANC. XAVERIUM AINSCOM. S. I. qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ GREGORII à S. VINCENTIO impugnata fuit. 341.

DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. Accedunt ejuſdem Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones. 351.

DE CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA CONTROVERSIA. 405.

GEOMETRICA VARIA. 483.

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS
ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO:

Quibus ſubjuncta eſt

Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno cIↃ IↃCXLVII.

AD LECTOREM.

DE Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, ſi tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum conſtitutumque, quale nunc eſt, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic ſtellas in cœlo novas, quæ ſuperioribus ſæculis incognitæ, noſtrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetuſtate cedit, ſed nos novitatem ſingulis tribuimus, prout quæque ſeſe nobis offerunt fiuntque manifeſta. Itaque & inſcripti trigoni Parabola ante Archimedem ſeſquitertia fuiſſe dicenda eſt; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus ſemper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini, de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuiſſe conſtet vel determinata. Damus autem non iſti, quam retulimus, Archimedeæ ſimilem determinationem, neque vel ipſa rerum natura, poſt tot ſubtiliſſimorum hominum deluſos conatus, ſpem reliquiſſe videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas ſumpſimus, expectandi: Verùm id præſtitiſſe profitemur, quod in ipſa

quoque inſcriptione expreſſum eſt, & paulò quid amplius, ſi Lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipſes & Circulos ad quadrata redigere non finis eſt horum Theorematum, ſed conſequentia duntaxat; eoque nomine potiſſimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inſcripta triangula rationem demonſtrant. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ deſtinatâ planè, ſed impeditâ difficilique; quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipſin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit conſtans illa in cognatis figuris mirabiliſque convenientia. Quæ quidem univerſim in omnibus hiſce quo minus locum habeat, ſola facit Propoſitionum noviſſima, ſupernumeraria illa quaſi, atque ultra propoſitum adſcita, cujuſque hoc ſolum mihi tribui par eſt, quod ex præcedentibus ipſam non ineleganti ratione comprobari poſſe oſtendi. Dudum enim hîc nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonſtratum dedit acutiſſimus Geometra I. Della Faille, felix, meâ quidem ſententiâ, quod ante alios perſpexerit, quomodo à ſectorum gravitatis centro Quadratura dependeret: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruiſſe agnoſcam, non æquè gaviſus ſum detectâ in reliquis hujus ſegmentis ſimili connexione,

ne, quàm cum eandem in Hyperboles portionibus obſervaſſem, illudque inveniſſem de quo tantus Vir non potuit non & ipſe cogitaſſe. Raros alioqui ſemper hæc figura, ſi cum Circulo conferatur, ſui contemplatores nacta eſt; ejuſque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia ſint inſpecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari neceſſe ſit; cujuſmodi ſunt exacta perimetri longitudo, Helicis Archimedeæ contingens, Quadratricis Dinoſtrati terminus, vel tangens quoque ejuſdem Quadratricis ad terminum alterum, (ſicut aliquando me demonſtraſſe memini) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel ſub ulla conditione Hyperbole cum ſpatio rectis comprehenſo lineis comparari poſſit. Noſtrâ ſanè ætate, paucisque abhinc annis Vir Clariſſ. D. Gregorius à S. Vincentio, de quo mihi deinceps dicendum reſtat, exquiſitâ prorſus novâque methodo utramque Quadraturam aggreſſus eſt, & credidit eâdem ſe propemodum demonſtratione abſolviſſe. At ego cum ampliſſima quæ de hiſce volumina emiſit, perſcriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, ſi quod intenderat obtineret, ſaltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori ſubtilitate quàm ſucceſſu rem arduam tentatam fuiſſe, ratione quoque repertâ quâ id clariſſime oſtendi poſſe confido.

Et

Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui ſibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri poſſet ut longa porro dubitatio maneret circa demonſtrationes, quas certiſſimas eſſe oportet; arbitratus ſum me facturum quod & in publicum utile eſſet & à propoſiti argumenti ratione non alienum, ſi ſimul hîc prodire ſinerem, quæ novam in re obſcura lucem allatura videbantur. Nulla autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem acceſſi, ſed cauſæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offenſam proponi poſſe. Majori quoque fiduciâ, poſteaquam is ſeſe ipſum per literas, quarum aliquod inter nos commercium eſt, auctorem hortatoremque candidè præbuit, ut ſiqua commentatus eſſem, ea cum univerſis communicarem. Ingenuitatem hanc inſignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & ſpero modeſtâ reprehenſione ſatis me declaraſſe, quanti æſtimem Doctiſſ. Viro haberi amicus. Cujus invicem ſumma, quâ me uſque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud exſpectem, niſi ut vel moderatè & ſine ulla acerbitate ad mea reſpondeat, ſi quid iis reponendum eſſe duxerit, vel rationibus evidentiſſimis perſuaſus, æquè lubens noſtra quam alterius poſthac opera veriora ſentiat & amplectatur.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS, ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

THEOREMA I.

Portioni hyperboles, vel ellipſis vel circuli portioni, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majori, circumſcribi poteſt figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat ſpatio quod minus ſit quovis dato.

DATA ſit portio A B C, cujus diameter B D. Super baſin A C conſtituatur parallelogrammum A E, latera duo habens diametro B D parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia ſecto, relinquetur tandem pars quæ TAB. XXXIV. Fig. 1.

minor erit dato ſpatio; ſit ea parallelogrammum B F, & dividatur baſis A C in partes æquales ipſi D F, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad ſectionem rectæ G L, H M, K N &c. diametro B D parallelæ, & perficiantur parallelogramma D O, G P, H Q, K R &c. Dico figuram ex omnibus iſtis parallelogrammis compoſitam (quæ impoſterum ordinatè circumſcripta vocabitur) ſuperare portionem A B C minori quàm datum ſit ſpatio.

Jungantur enim A N, N M, M L, L B, B S, &c. eritque hac ratione inſcripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit exceſſus figuræ circumſcriptæ quæ ex parallelogrammis compoſita eſt, ſuper inſcriptam, quàm ſupra portionem A B C. Exceſſus autem circumſcriptæ ſuper inſcriptam ex triangulis conſtat, quorum quæ ſunt ab una diametri parte, ut A R N, N Q M, M P L, L O B, æquantur dimidio parallelogrammi O D vel B F, quia ſingulorum baſes baſi D F æquales ſunt, & omnium ſimul altitudo, parallelogrammi B F altitudini. Eâdem ratione triangula quæ ſunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi B F: Ergo omnia ſimul triangula ſive dictus exceſſus æqualis eſt parallelogrammo B F, eóque minor ſpatio dato. Sed eodem exceſſu adhuc minor erat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra portionem A B C: igitur hic exceſſus dato ſpatio multo minor eſt. Et apparet fieri poſſe quod proponebatur.

Theorema II.

Datâ portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui baſin habeat baſi portionis æqualem; poteſt utrique figura circumſcribi ex parallelogrammis quorum ſit omnium eadem latitudo, ita ut uterque ſimul exceſſus quo figuræ circumſcriptæ portionem & triangulum ſuperant, ſit minor ſpatio quovis dato.

Da-

Data ſit portio A B C & triangulus D E F, baſibus A C, D F æqualibus; & portionis diameter ſit B G, in triangulo verò ducta à vertice in mediam baſin linea E H. Sint autem utræque B G, E H vel ad baſes rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet B G ad E H, in eandem dividatur ſpatium datum, ſintque partes K & L. Circumſcribatur jam ſicut antea portioni A B C figura ordinatè, quæ portionem ſuperet exceſſu minore quàm ſit ſpatium K. Et triangulo D E F circumſcribatur figura quæ totidem parallelogrammis conſtet, quot ſunt in figura portioni A B C circumſcripta. TAB. XXXIV. Fig. 2.

Quoniam igitur baſes portionis & trianguli æquales ſunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogrammum B M ſit ad E R ut B G ad E H, id eſt ut K ad L, ſitque B M minus quam K [1], erit quoque E R minus quam L [2]. Verùm omnia triangula quibus conſtat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra triangulum D E F, æqualia ſunt parallelogrammo E R, ergo minor eſt idem exceſſus ſpatio L. Sed & exceſſus quo figura circumſcripta portionem A B C ſuperat, minor eſt ſpatio K. Ergo uterque ſimul exceſſus minor erit ſpatio K L dato. Et conſtat fieri poſſe quod proponebatur.

[1] Ex conſtr.
[2] 14. 5. Elem.

Theorema III.

Si portioni hyperboles, vel ellipſis vel circuli portioni, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majori, circumſcribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.

Sit portio quælibet iſtarum A B C, diameter ejus B D; & circumſcribatur ei ut ſupra figura ordinatè. Oſtendendum eſt ejus figuræ centrum gravitatis fore in B D diametro. Ducantur lineæ H K, N R, P S, conjungentes ſuprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque diſtant. TAB. XXXVI. Fig. 3.

Quoniam igitur F H, L K ſunt diametro B D parallelæ, ſuntque D F, D L æquales, oportet lineam H K, quæ duas F H, L K conjungit, à diametro B D bifariam ſecari; quare eadem H K parallela erit baſi A C [1], & E H K G recta linea. Itaque E C parallelogrammum eſt; cujus oppoſita latera quum bifariam dividat diameter B D, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis [2]. Eadem ratione parallelogramma erunt H M, N O, P Q, & ſingulorum centra gravitatis in linea B D. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compoſitæ centrum gravitatis in eadem B D reperiri neceſſe eſt. Iſta autem figura eadem eſt quæ portioni ordinatè fuerat circumſcripta. Ergo figuræ portioni ordinatè circumſcriptæ centrum gravitatis conſtat eſſe in B D portionis diametro. Quod erat oſtendendum.

[1] 5. *lib.* 2. *Con.*

[2] 9. *lib.* 1. *Arch. de Æquipond.*

Theorema IV.

Portionis hyperboles, ellipſis & circuli, centrum gravitatis eſt in portionis diametro.

TAB. XXXIV. Fig. 4.

Eſto portio hyperboles, vel ellipſis vel circuli dimidiâ primum figurâ non major, A B C; diameter ejus B D. Oſtendendum eſt, in B D reperiri portionis A B C gravitatis centrum.

Si enim fieri poteſt, ſit extra diametrum in E, & ducatur E H diametro B D parallela. Dividendo itaque D C continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam D H; ſit ea D F, & circumſcribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum baſes æquales ſint lineæ D F, & jungantur B A, B C. Figuræ itaque portioni circumſcriptæ centrum gravitatis eſt in B D portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur E K, producaturque, & occurrat ei A L parallela B D. Quia autem portio major eſt triangulo A B C, & exceſſus quo figura circumſcripta portionem ſuperat, minor parallelogrammo B F, uti ſupra demonſtratum fuit *; erit major ratio portionis A B C ad dictum exceſſum, quàm trianguli A B C ad B F parallelogrammum, id eſt quàm

* Theor. 1.

A D

A D ad D F; multoque major quam A D ad D H, vel quàm L K ad K E. Sit itaque M K ad K E ſicut portio A B C ad exceſſum quo ipſa ſuperatur à figura ordinatè circumſcripta. Itaque cum K ſit centrum grav. figuræ portioni circumſcriptæ, & E centrum grav. ipſius portionis; erit M centrum gravitatis omnium ſpatiorum quæ eundem exceſſum conſtituunt [1]. Quod eſſe non poteſt; Nam ſi per M linea ducatur diametro B D parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus ſpatia. Manifeſtum eſt igitur, portionis A B C centrum grav. eſſe in B D portionis diametro.

[1] 8. *lib.* 1. *Arch. de Æquipond.*

Eſto nunc A B C portio ellipſis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abſolvatur figura, & producatur B D uſque dum ſectioni occurrat in E; erit igitur portionis A E C diameter E D, & B D E diameter totius figuræ. Et quoniam in B D E diametro eſt figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonſtratis conſtabit, ſi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipſi A C ſit parallela,) & in eadem centr. gravitatis A E C portionis minoris, ſicut modò oſtenſum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ A B C in B D E [2]; quod erat oſtendendum.

TAB. XXXIV. Fig. 5.

[2] 8. *lib.* 1. *Archim. de Æquipond.*

* Lemma.

Eſto linea E B, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ E S, B P, & inſuper alia P D. Dico id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Eſt enim rectangulum E D B æquale iſtis duobus, rectangulo E D P & rectangulo ſub E D, P B: quorum ultimum ſuperat rectangulum E P B rectangulo D P B. Igitur exceſſus rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æqualis eſt duobus iſtis, rectangulo E D P, & D P B. Sed rectangulum E D P addito rectangulo D P B, id eſt rectangulo ſub E S, D P, æquale fit rectangulo S D P. Manifeſtum eſt igitur, exceſſum rectanguli E D B ſupra E P B, æquari rectangulo S D P.

TAB. XXXIV. Fig. 6.

† Eſto rurſus linea E B, cui ad utrumque terminum auferan-

TAB. XXXIV. Fig. 7.

* Idem hoc aliter demonſtratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.
† Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.

rantur duæ æquales E S, B P, & inſuper alia P D. Dico iterum, id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Rectangulum enim E D B æquale eſt iſtis duobus, rectangulo E D P, & rectangulo ſub E D, P B; horum autem E D P rurſus æquale eſt duobus, rectangulo nimirum S D P, & ei quod continetur ſub E S, D P, ſive rectangulo D P B. Igitur rectangulum E D B iſtis tribus æquale eſt rectangulis, S D P, D P B, & rectangulo ſub E D, P B; horum vero duo poſtrema æquantur rectangulo E P B; ergo rectangulum E D B æquale eſt duobus, rectangulo nimirum S D P & E P B, unde apparet exceſſum rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æquari rectangulo S D P.

THEOREMA V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; ſi ad diametrum conſtituatur triangulus hujuſmodi, qui verticem habeat in centro figuræ, & baſin portionis baſi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam baſin pertingit tantam, ut poſſit ipſa rectangulum comprehenſum lineis, quæ inter portionis baſin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. Erit magnitudinis, quæ ex portione & præſcripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod eſt trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.

TAB. XXXV. Fig. 1. 2. 3. Data ſit portio hyberboles, vel ellipſis vel circuli portio dimidiâ figurâ non major, A B C. Diameter ejus ſit B D, & figuræ diameter B E, in cujus medio centrum figuræ F. Et ſumatur F G quæ poſſit rectangulum B D E, ductâque K G H æquali & parallelâ baſi A C, quæque ad G biſariam

riam dividatur, jungantur K F, F H. * Demonſtrandum eſt, quòd magnitudinis compoſitæ ex portione A B C & triangulo K F H, centrum gravitatis eſt punctum F.

Si non eſt in F, ſit ſi fieri poteſt primùm ab ea parte puncti F quæ eſt versùs A B C portionem, atque eſto punctum L; conſtat autem futurum in recta B D G, quum in hac ſint utraque centra gravitatis portionis & trianguli K F H. Jungantur A B, B C, & quam rationem habet G F ad F L, eam habeat magnitudo compoſita ex triangulis A B C, K F H ad ſpatium quoddam M; & circumſcribantur portioni & triangulo K F H figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium ſit eadem latitudo, ita ut duo ſimul exceſſus quibus iſtæ figuræ ſuperant portionem A B C & triangulum K F H, minores ſint ſpatio M [1]. Igitur duorum ſimul triangulorum A B C, K F H ad dictos duos exceſſus ſive reſidua major erit ratio quàm ad M, id eſt quàm G F ad F L; ac proinde longè major ratio portionis A B C unà cum K F H triangulo ad eadem reſidua quam G F ad F L. Sit itaque N F ad F L, ſicut portio A B C ſimul cum triangulo K F H ad duo reſidua, & cadet terminus N ultra trianguli baſin K H. Jam per F ducatur O Ξ parallela baſi A C vel K H; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo K F H æqualiter à diametro diſtabunt, ut ſunt R Q, Σ T, ſint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta Z Λ Δ Ω, ſecans lineam O Ξ in Υ; & ducatur R P baſi A C parallela, abſciſſæque ad verticem lineæ P B ſumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, E S.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim ſunt applicatæ C D & R P, erit ut rectangulum B D E ad rectangulum B P E, ita quadratum C D ad R P quadratum [2]; verùm ut C D ad R P, hoc eſt, ut H G ad Ψ G, ita eſt H F ad Σ F, & ita Z Υ ad Λ Υ; igitur ut C D quadratum ad quadratum R P, id eſt ut rectangulum B D E ad B P E, ita

[1] Theor. 2. h.

[2] 21. lib. 1. Con.

* Notatu dignum quod K F, F H in hyperbole ſunt aſymptoti.

ita eſt quadratum Z Υ ad Λ Υ quadratum. Quare & per converſionem rationis, ſicut rectangulum B D E ad differentiam rectangulorum B D E, B P E, ita quadratum Z Υ ad differentiam quadratorum Z Υ, Λ Υ. Eſt autem differentia rectangulorum B D E, B P E, æqualis rectangulo S D P, ſicut lemmate præmiſſo demonſtratum eſt; differentia verò quadratorum Z Υ, Λ Υ, æqualis quadrato Z Λ & duobus

[3] 4. lib. 2. Elem. rectangulis Z Λ Υ[3], ſive quod idem eſt, rectangulis Z Λ X, Z Λ Υ bis ſumptis, hoc eſt, duplo rectangulo ſub Z Λ, X Υ. Itaque ſicut eſt rectangulum B D E ad rectangulum S D P, ita quadratum Z Υ ad duplum rectangulum ſub X Υ, Z Λ. quare cum rectangulum B D E quadrato F G

[4] Ex conſtr. æquale ſit[4], ideoque & quadrato Z Υ, erit quoque rectan-

[5] 14. 5. Elem. gulum S D P æquale duplo rectangulo ſub X Υ, Z Λ[5]. Quia verò F punctum dividit B E per medium, ſuntque æquales B P, E S, etiam F P, F S æquales erunt, unde additâ utrique F D, erit S D æqualis toti P F D id eſt Δ Υ Ω: ſed Δ Υ Ω dupla eſt lineæ V Υ, quia bis continet utramque Υ Δ, Δ V in hyperbole, in ellipſi verò & circulo bis utramque V Ω & Ω Υ; ergo & S D dupla V Υ, ideoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo ſub Υ V, Ω Δ. Sed idem rectangulum S D P æquale oſtenſum fuit duplo rectangulo ſub X Υ, Z Λ; ergo æquale eſt rectangulum ſub Υ V, Ω Δ, rectangulo ſub X Υ, Z Λ. Eſt itaque

[6] 16. l. 6. Elem. Υ V ad Υ X, ut Λ Z ad Ω Δ[6]; verùm ut Λ Z ad Ω Δ, ita eſt parallelogrammum Σ T ad R Q; itaque & Υ V eſt ad Υ X ut parallelogrammum Σ T ad R Q parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogram-

[7] 7. lib. 1. Archim. de Æquip. mo compoſitæ centrum gravitatis eſt punctum Υ[7]. Eâdem ratione oſtendi poteſt de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppoſitorum centrum gravitatis eſt in linea Ο Ξ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumſcriptis componitur, centr. gravitatis in eadem Ο Ξ reperiri neceſſe eſt. Sed ejuſdem compoſitæ magnitudinis centrum gravit. eſt quoque in recta

B D G,

B D G, quoniam in ea ſunt centra gravitatis utriusque figuræ circumſcriptæ [8]; igitur magnitudinis ex dictis figuris compoſitæ centrum grav. eſt ipſum punctum F. Poſitum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione A B C & K F H triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compoſitæ ex duobus reſiduis, quæ in figuris circumſcriptis remanent, erit centr. grav. in producta L F, ubi ea ſic terminatur, ut pars adjecta habeat ad F L eandem rationem quam portio A B C ſimul cum K F H triangulo ad dicta duo reſidua [9]: is autem terminus eſt N; itaque N punctum eſt centrum gravitatis duorum reſiduorum. Quod fieri nequit; Nam ſi per N ducatur recta baſi K H parallela, erunt ab una parte ſpatia omnia è quibus utrumque reſiduum conſtat. Non eſt igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione A B C & K F H triangulo compoſitæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc ſi dicatur, planè ſimili demonſtratione eò devenietur ut duorum reſiduorum quæ demptâ portione A B C & K F H triangulo, in circumſcriptis figuris ſupererunt, centrum gravitatis ſit ultra portionem A B C; quod eſt æquè abſurdum. Reliquum eſt igitur ut ſit ipſum punctum F; quod erat oſtendendum.

8 Theor. 3. 4.

9 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

Theorema VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera duarum, lateris tranſverſi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.

Eſto hyperboles portio, & inſcriptus ei, qualem diximus, triangulus A B C; diameter autem portionis ſit B D, & latus tranſverſum ſive diameter ſectionis B E, in cujus medio centrum ſectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in

TAB. XXXIV. Fig. 8.

portione punctum L. Dico portionem ad inſcriptum triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius E D ad F L.

Conſtituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus K F H; ſcilicet ut quadratum F G æquetur rectangulo E D B, & ut baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela: ejuſque trianguli ſit centrum gravitatis M, ſumptâ nimirum F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Eſt itaque triangulus K F H ad A B C triangulum, ut F G ad B D: verùm ut F G ad B D, ita eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt rectangulo E D B; & ut E D ad F G, ita ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt F M; ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ E D ad F M. Eſt autem portio hyperboles ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium portionis & trianguli K F H eſt in puncto F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit portio ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ lineæ E D ad F L [4]: quod erat demonſtrandum.

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

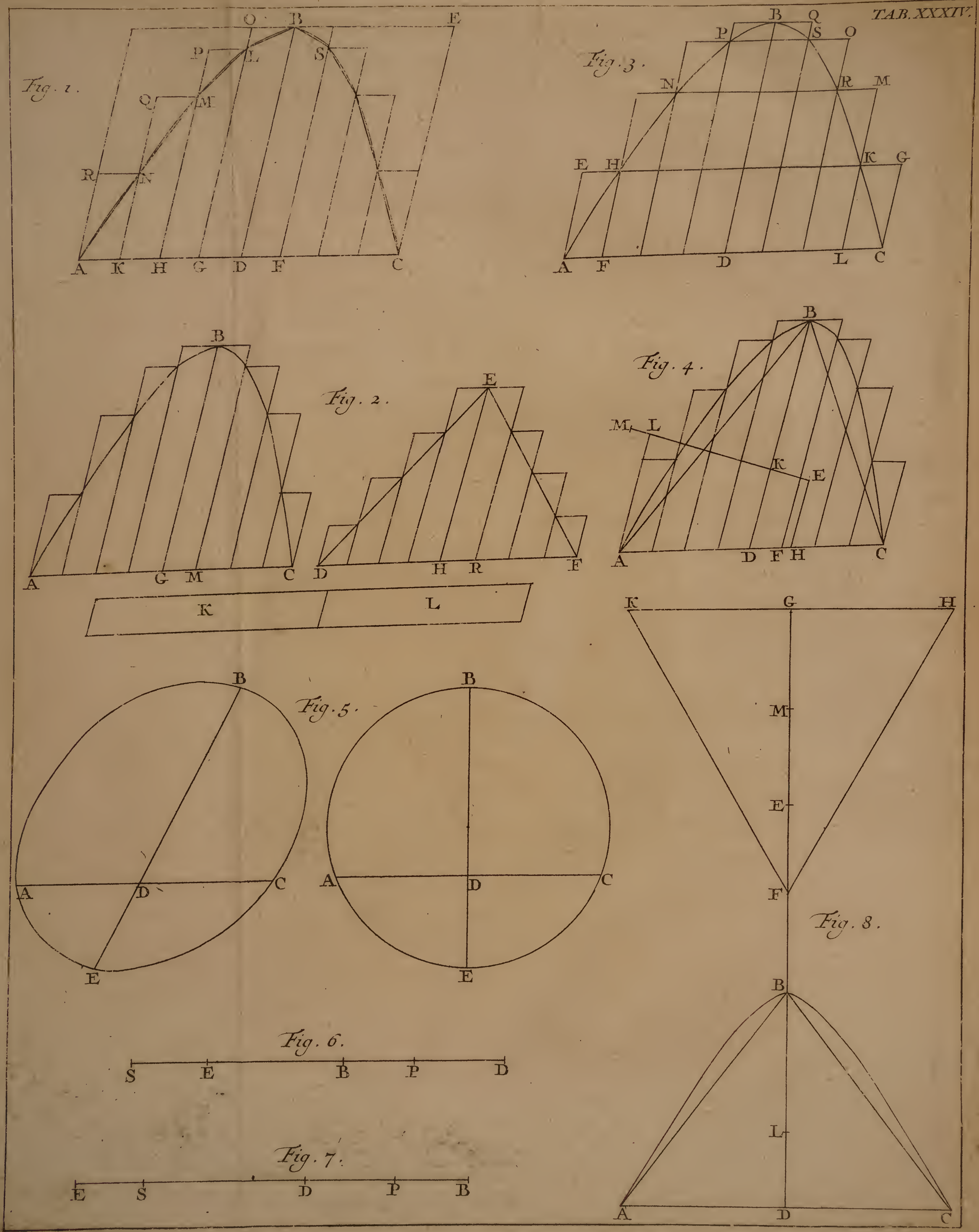
[4] 23. lib. 5. Elem.

Theorema VII.

Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem candemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

TAB. XXXV. Fig. 4. 5.

Eſto ellipſis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inſcriptus ei triangulus A B C, eandem cum portione baſin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis ſit B D, quæ producatur, & manifeſtum eſt quod tranſibit per centrum figuræ; ſit hoc F, & diameter portionis reliquæ D E. Et ponatur centrum gravitatis in portione


TAB. XXXIV.
Fig. 1.
O B E
P L S
Q M
R N
A K H G D F C
Fig. 3.
B Q
P S O
N R M
E H K G
A F D L C
Fig. 2.
B
A G M C
E
D H R F
K L
Fig. 4.
B
M L
K E
A D F H C
Fig. 5.
B
A D C
E
B
A D C
E
K G H
M
E
F
Fig. 8.
B
L
A D C
Fig. 6.
S E B P D
Fig. 7.
E S D P B

tione A B C punctum L. Dico igitur portionem ad inſcriptum ſibi triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L. Conſtituatur enim ut ſupra triangulus K F H, cujus nimirum baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela, & F G quæ à vertice ad mediam baſin pertingit poſſit rectangulum B D E; & centrum gravitatis trianguli K F H ſit M punctum, ſumptâ ſcilicet F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

Triangulus igitur K F H eſt ad triangulum A B C, ut F G ad B D; ut autem F G ad B D, ſic eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt B D E rectangulo; & ut E D ad F G, ſic ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt, ad F M. Ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ſicut duæ tertiæ E D ad F M. Portio autem A B C eſt ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium eorum eſt in F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ſicut duæ tertiæ E D ad F L [4].

Sit nunc portio A B C dimidiâ figurâ major. Dico eam rurſus ad inſcriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L.

Ponatur enim portionis reliquæ A E C centrum gravitatis H punctum, & jungantur A E, E C. Igitur per ea quæ jam oſtendimus, erit portio A E C ad A E C triangulum, ut duæ tertiæ B D ad F H; verùm ut triangulus A E C ad triangulum A B C, ſic eſt E D ad B D, ſive duæ tertiæ E D ad duas tertias B D; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit ſicut portio A E C ad triangulum A B C, ita duæ tertiæ E D ad F H [5]. Sed ut portio A B C ad A E C portionem, ita eſt F H ad F L [6], quoniam totius figuræ centrum gravitatis eſt F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ut duæ tertiæ E D ad F L. Omnis igitur Ellipſis vel circuli portio &c. Quod erat demonſtrandum.

[1] *14. lib. 1. Arch. de Æquip.*

[2] *7. lib. 1. Archim. de Æquipond.*

[3] *Theor. 5. h.*

[4] *23. lib. 5. Elem.*

TAB. XXXVI. Fig. 1. 2.

[5] *23. lib. 5. Elem.*

[6] *8. lib. 1. Arch. de Æquipond.*

Theorema VIII.

In ſemicirculo & quolibet circuli ſectore, habet arcus ad duas tertias rectæ ſibi ſubtenſæ hanc rationem, quam ſemidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum gravitatis.

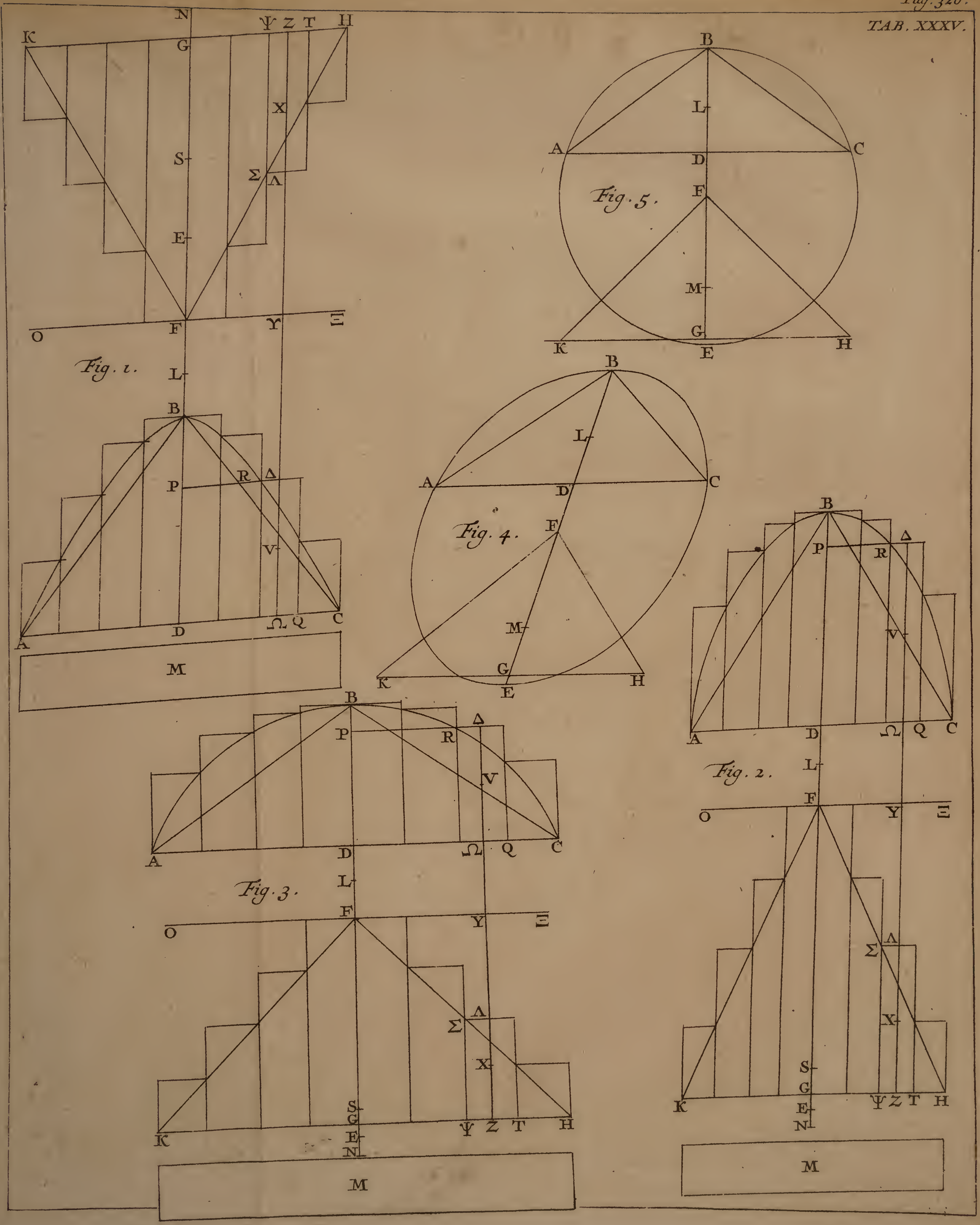
TAB. XXXVI. Fig. 3. Eſto primùm ſemicirculus A B C, deſcriptus centro D, ſectuſque bifariam rectâ B D, in qua centrum gravitatis ſemicirculi ſit E [1]. Dico arcum A B C eſſe ad duas tertias A C, ſicut B D ad D E. Jungantur enim A B, B C. Igitur, ut ſemicirculus ad triangulum A B C, ſic ſunt duæ tertiæ B D ad D E [2], eſt enim B D æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut ſemicirculus, id eſt, ut triangulus habens baſin æqualem arcui A B C & altitudinem B D, ad A B C triangulum, ita eſt arcus A B C ad A C rectam; ergo ut arcus A B C ad A C, ita ſunt duæ tertiæ B D ad D E, & permutando, ut arcus A B C ad duas tertias B D, ita A C ad D E, ſive ita $\frac{2}{3}$ A C ad $\frac{2}{3}$ D E, unde rurſus permutando, ut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita $\frac{2}{3}$ B D ad $\frac{2}{3}$ D E, ſive ita, B D ad D E.

TAB. XXXVI. Fig. 4. Sit deinde ſector D A B C, ſemicirculo minor, bifariam ſectus rectâ D B, in qua ſectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur ſubtenſa A C. Dico rurſus, arcum A B C ad duas tertias rectæ A C eam habere rationem, quam B D ad D E. Jungantur enim A B, B C, & totius circuli ſit diameter K D B, quæ producatur in Q, ut fiat Q F, ad B F, ſicut portio A C B ad A B C triangulum, & jungantur A Q, Q C; erit jam triangulus A Q C portioni A C B æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli A C D, & H portionis A C B; & ſicut D Q ad Q F, ita ſit H D ad D R.

Quia igitur ſicut portio A C B ſive triangulus A Q C ad triangulum A B C, id eſt, ut Q F ad B F, ita $\frac{2}{3}$ K F ad D H [3], erit rectangulum ſub Q F, D H, æquale duabus tertiis

[1] Theor. 4. h.
[2] Theor. 7. h.
[3] Theor. 7. h.

TAB. XXXV.



tertiis rectanguli K F B [4], id eſt, duabus tertiis quadrati 4 16. lib. 6.
A F; ſed idem rectangulum ſub Q F, D H, æquale eſt re- Elem.
ctangulo Q D R, quia ut Q D ad Q F, ita fecimus eſſe
D H ad D R; ergo rectangulum Q D R æquale duabus ter-
tiis quadrati A F, ideoque ut Q D ad A F ita $\frac{2}{3}$ A F ad D R
[5]: ſed ut Q D ad A F, ſic quoque eſt rectangulum ſub Q D, 5 16. lib. 6. Elem.
A F, cui æquale quadrilaterum D A Q C, id eſt, ſector
D A B C ad A F quadratum; ergo & ſector D A B C ad
quadratum A F, ut $\frac{2}{3}$ A F ad D R. Porro quoniam E cen-
trum gravitatis eſt totius ſectoris, & H centrum grav. por-
tionis A C B, G verò trianguli A C D, conſtat eſſe, ſicut
triangulus A C D ad A C B portionem ſive ad triangulum
A Q C, id eſt, ut D F ad F Q, ita H E ad E G [6]; quare 6 8. lib. 1. Arch. de
convertendo & per compoſitionem rationis erit ut D Q ad Æquipond.
D F, ita G H, ad H E. Sed quia fecimus ut D Q ad Q F,
ita H D ad D R, erit quoque per converſionem rationis,
ut D Q ad D F, ita H D ad H R; ergo H D ad H R ut
G H ad H E; quare & reliqua G D ad reliquam E R, ut
H D ad H R [7], hoc eſt, ut D Q ad D F. Sicut autem D Q 7 19. lib. 5. Elem.
ad D F, ita eſt quadrilaterum D A Q C, cui æqualis ſector
D A B C ad A C D triangulum; igitur ſector D A B C
ad A C D triangulum ut G D ad E R: Eſt autem A C D
triangulus ad D F quadratum, ut A F ad D F, ſive ut $\frac{2}{3}$ A F
ad $\frac{2}{3}$ D F id eſt D G. Igitur ex æquali in proportione perturbata,
ſicut ſector D A B C ad quadratum D F, ita $\frac{2}{3}$ A F ad E R
[8]; & convertendo, quadratum D F ad ſectorem D A B C, 8 23. lib. 5. Elem.
ut E R ad $\frac{2}{3}$ A F. Fuit autem ante oſtenſum, quadratum
A F eſſe ad ſectorem D A B C, ut D R ad $\frac{2}{3}$ A F; igitur
duo ſimul quadrata, D F & A F, ſive unum quadratum
D A ad ſectorem D A B C ut duæ ſimul E R & R D, id
eſt ut tota E D ad $\frac{2}{3}$ A F [9]. Eſt verò etiam quadratum D A 9 24. lib. 5.
ad D A B C ſectorem, ſicut linea D A ad arcum A B, quia Elem.
nimirum ſector D A B C æqualis eſt rectangulo, baſin ha-
benti æqualem arcui A B & altitudinem D A; ergo ſicut
D A ad arcum A B, ita E D ad $\frac{2}{3}$ A F; & permutando,
arcus A B ad $\frac{2}{3}$ A F, ſive arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ut D A
vel B D ad D E.

 Eſto

TAB. XXXVI. Fig. 5.

Eſto jam denique ſector D A B C ſemicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus B A F C, & totius diameter ſit B D F, in qua erit quoque centrum grav. ſectoris reliqui D A F C [1], quot ſit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis eſt D, & duorum ſectorum centra grav. E & G, erit ſicut ſector D A B C ad ſectorem D A F C, id eſt, ſicut arcus A B C ad arcum A F C, ita G D ad D E [2]: verùm ut arcus A F C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita eſt D F ad D G, ſicuti modò oſtenſum eſt; ergo ex æquali in proportione perturbata, ſicut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita erit D F vel B D ad D E [3]. Conſtat itaque quod in ſemicirculo & quolibet circuli ſectore &c. quod erat demonſtrandum.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[2] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[3] 23. lib. 5. Elem.

Ἐ Ξ Ἐ Τ Α Σ Ι Σ

CYCLOMETRIÆ

CLARISSIMI VIRI,

GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIↄ Iↄc XLVII.

ANte quinquennium circiter Vir eruditiſſimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio, quatuor modos propoſuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipſo exiſtimari ex multis indiciis colligere licet. Unum eſt hoc ipſum quod duas diverſarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonſtravit; alterum quod evidentior multò ſit hic modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum eſt, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi ſuæ inventionis

Fig. 2.

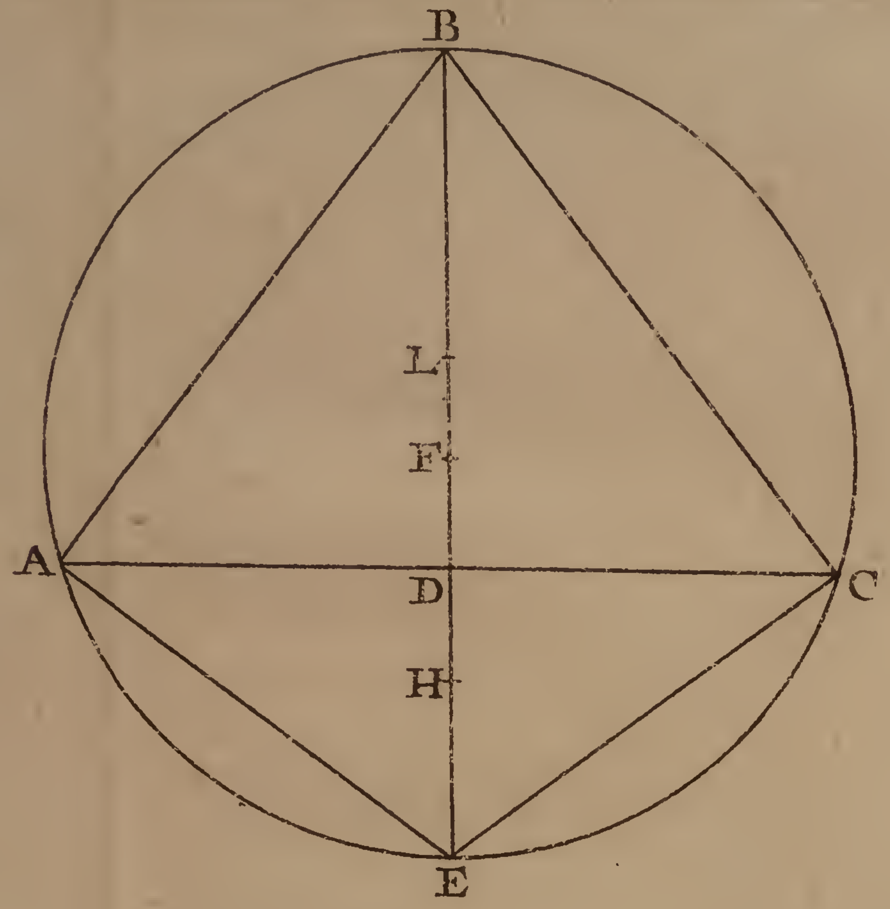


Fig. 1.

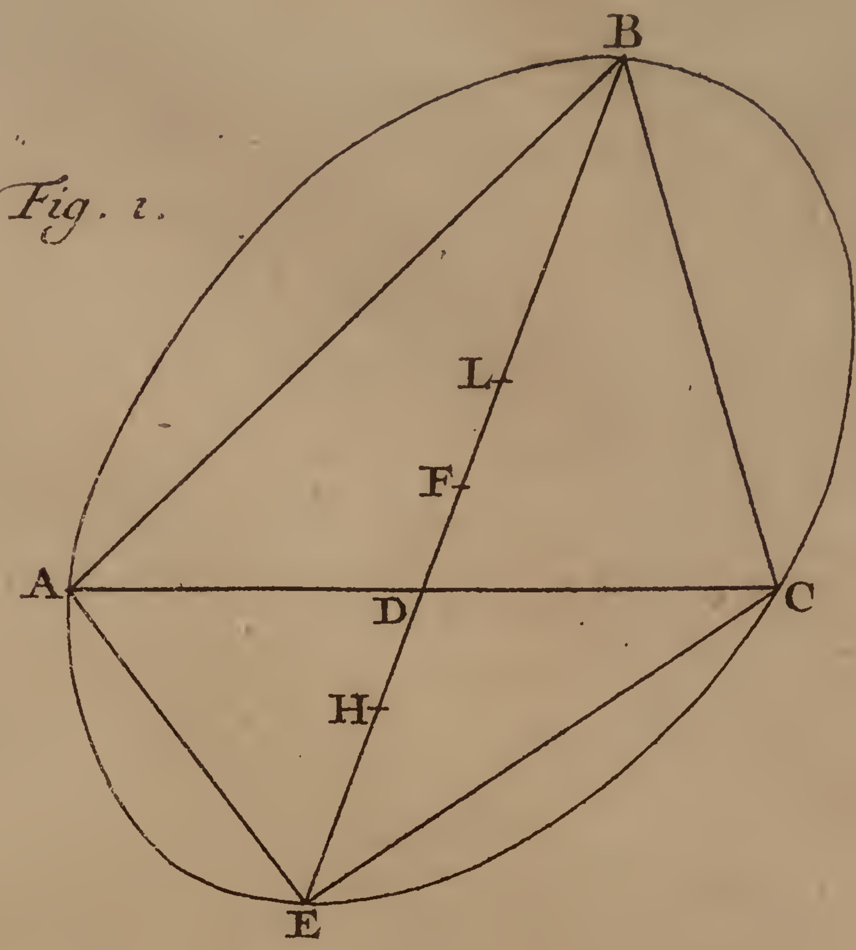
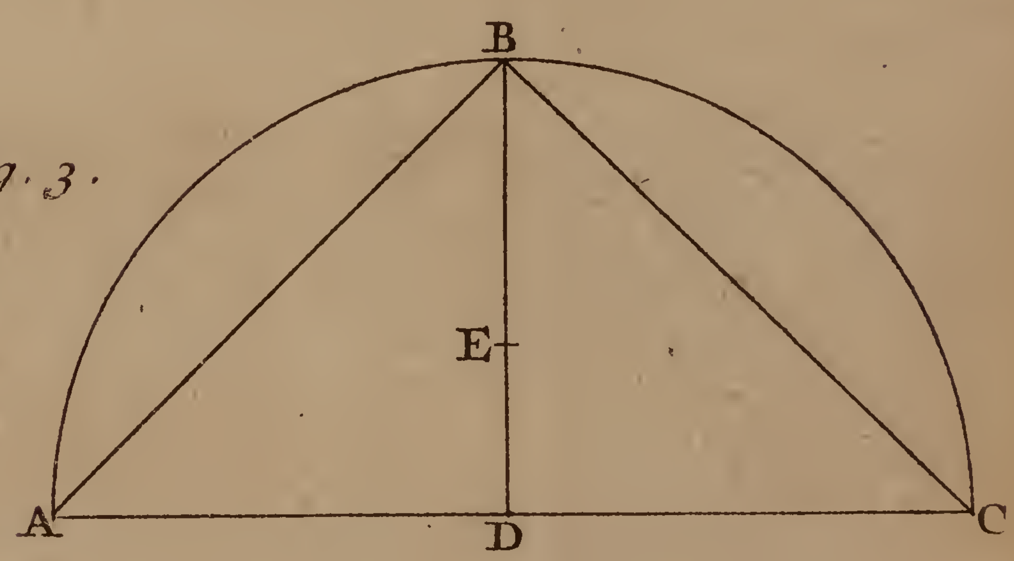


Fig. 3.



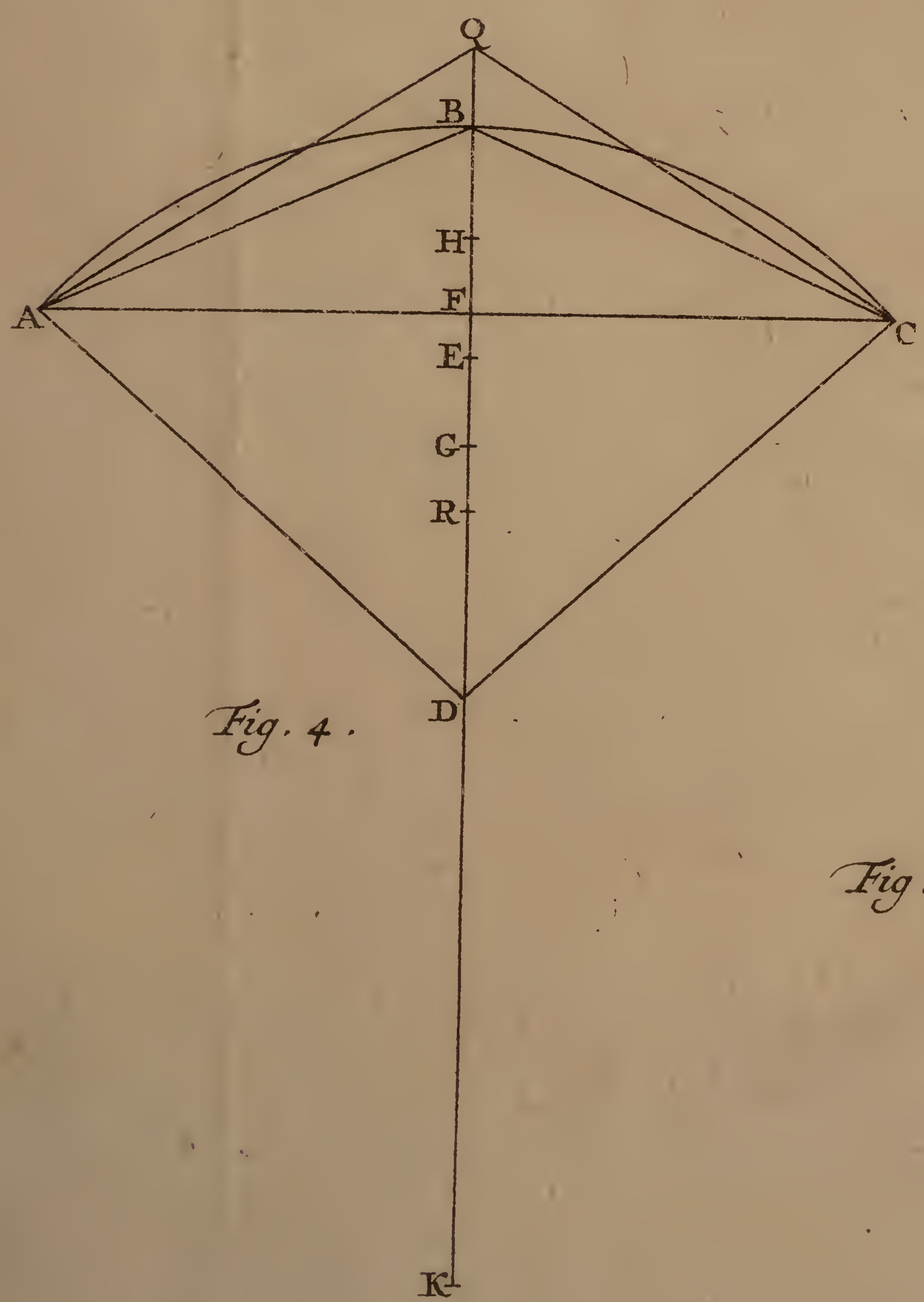
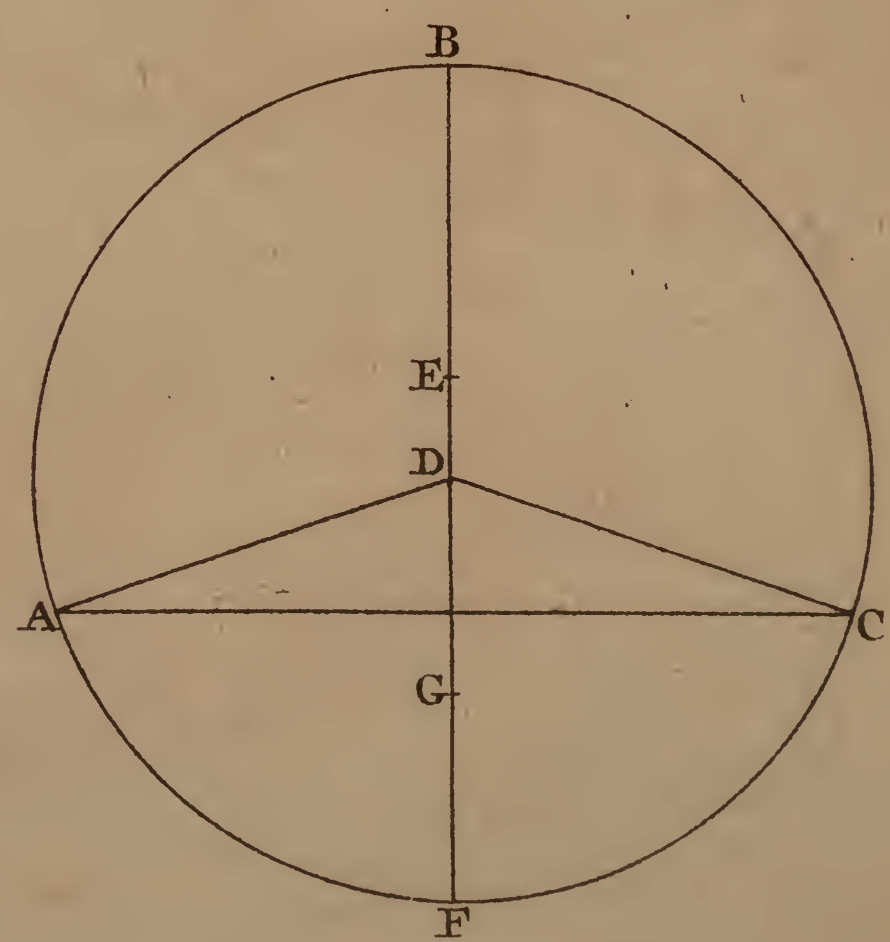


Fig. 4.

Fig. 5.



ventionis hiſtoriam & progreſſum paucis expoſuit, nullius modi præter hunc unum meminerit. Potuit autem & aliam rationem habuiſſe tres poſteriores quadraturas illic ſilentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes ſciret ex iiſdem principiis deductas & demonſtratas eſſe. Sed mihi vel alterutra harum conſiderationum ſufficere viſa eſt, ut perſuaderet unam pro omnibus fore diſcuſſionem quæ quadraturam primariam infirmatura eſſet, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea oſtenderimus quæ minus obſcuritatis habet, non video quâ ratione melior ſucceſſus expectandus ſit in tribus ſequentibus, quæ maximâ caligine involvuntur, quaſque Auctor ipſe vel uni illi poſthabere videtur. Principia quæ communia eſſe omnibus quadraturis dixi, ea ſunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis ſive de Proportionum proportionibus, & de Ductibus plani in planum. Quæ quidem prorſus non impugnabo, nam & ſolida corpora quæcunque in Geometria conſiderare licere exiſtimo, & alia omnia adhiberi poſſe, quæ modò ullo auxilio fore credimus ad inveſtigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non ſatis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicaſſe, atque hinc, meâ opinione, ipſi extitiſſe erroris cauſam. Primùm omnium id in propoſ. 39. lib. 10. Oper. Geom. * obſervaveram. Poſitis enim numeris fortuitò aſſumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hiſce eandem demonſtrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. ſcripta eſt de totidem parallelepipedis. Et quum tamen concluſio nullam idoneam admitteret interpretationem, non dubitabam quin æquè ipſius ac mea argumentatio, quam iiſdem verbis formaveram, aliquid abſurdi contineret. Poſterior autem demonſtrationis pars rectè ſe habebat, ideoque arguebat peccatum in

* In hac Propoſ. 39. etiam Carteſius paralogiſmum oſtendit Epiſt. ad Schotenium.

in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis diſputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea ſeſe obtulerunt, quæ paucis hic perſcribere conſtitui. Nulla per hæc propoſitionum Cl. Viri in controverſiam vocabitur; ſed contrà multis earum probatis, atque in uſum meum converſis, eò rem deducam, ut ſi quidem non impoſſibile dicet quadraturam ſuam ad exitum perducere, & per eam reapſe invenire rectilineum circulo æquale, oſtendam qui id facillimè impoſterum aſſequatur. Deinde veſtigia ipſius inſiſtens demonſtrabo, quibus hactenus nobis præceſſit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri poſſe, ſed eſſe ſubſiſtendum ad concluſiones perquam abſurdas. Atque ut ad rem veniamus.

TAB. XXXVII. Fig. 1. Eſto circulus cujus centrum F, diameter C D. Et diviſo radio F C bifariam in G, ducantur ipſi ad angulos rectos F E, G H. Dico, datâ ratione ſegmenti C H G ad G H E F ſegmentum, dari quoque rationem circuli ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Junganturenim F H, H C, & manifeſtum eſt triangulum F H C fore æquilaterum; item quadrantis arcum C E triplum fore arcus H E. Si ergo data ſit ratio ſegmenti C H G ad G H E F ſegmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis F E C ad ſegmentum G H E F. Sed data quoque eſt ratio ſectoris F H E ad quadrantem F E C, ergo datur quoque ratio ſegmenti G H E F ad ſectorem F H E; ac proinde dabitur quoque ratio ſegmenti G H E F ad triangulum F H G; quare & ratio ſectoris F H E ad triangulum F H G data erit. Sed huic rationi eadem eſt ratio ſectoris F H C ad triangulum F C H, (quoniam hæc utriuſque præcedentium dupla ſunt;) eademque eſt circuli ratio ad hexagonum regulare ſibi inſcriptum. Ergo & hanc datam eſſe apparet: quod erat demonſtrandum.

TAB. XXXVII. Fig. 1. 2. Sunto nunc lineæ A B, C D, E F, ſingulæ æquales diametro circuli C D: & ſuper unaquaque harum conſtruantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B deſcribantur ſemiparabolæ A V G, B T H, quarum baſes ſint quadratorum latera

latera B G, A H. In duobus ſequentibus quadratis ducantur diagonii C I, D K. Sed in poſtremis rurſus ſemiparabolæ deſcribantur E Σ L, F Π M, quarum vertices E & F, axes vero ſint quadratorum latera E Ψ, F Ω, & baſes Ψ L, Ω M. Porro diviſis bifariam ſingulis lineis quæ ab initio poſitæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rurſus bifariam in Q, R, S, ducantur per diviſionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, T V, X Y; Z Γ, Δ Θ, Π Σ, Λ Ξ.

Oſtendit itaque Cl. V. in demonſtr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. & veriſſimum eſt, in circulo ſuperiori ſegmentum C H G ad ſegmentum G H E F, eandem habere rationem quam habet hîc ſolidum quod fit ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ad ſolidum ortum ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N; ſicut enim ille in ſuo ſchemate ſumit æquales lineas *h i*, *k l*, ita nobis æquales ſunt ſumptæ in circulo, C G, G F, & hiſce pares A Q, Q N.

Atque ut ipſa demonſtrandi methodus quoque noſcatur, ea hujuſmodi eſt. In prop. 51. lib. 10. oſtenditur, ſolidum quod fit ex ductu ſemiparabolæ A B G in ſemipar. A B H, æquari ſemicylindro, baſin habenti ſemicirculum C E D & altitudinem C D. Deinde in Corollario ejuſdem prop. idem quoque ſingulis partibus quod totis ſolidis convenire docetur. Nimirum id ſolidum quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, æquatur quoque parti dicti ſemicylindri quæ inſiſtit ſegmento G H E F; Itemque ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, æquatur ejuſdem ſemicylindri parti quæ inſiſtit ſegmento C H G. Quorum hoc vel ex eo conſtat, quod alioqui duo iſta ſolida ſimul ſumpta, hoc eſt, ſolidum ex ductu plani A V N in pl. A H T N, æquale non eſſet dimidio ejus quem diximus, ſemicylindri; & conſequenter falſum quoque eſſet quod in confeſſo eſt, nimirum ſolidum ex ductu ſemiparab. A B G in ſemiparab. A B H æquari toti ſemicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ ſemicylindri partes eandem inter ſe rationem

habent quam baſes quibus inſiſtunt, certum eſſe quod diximus, ſegmentum circuli C H G ad G H E F, eſſe ut ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N.

Hæc ita enucleatè ſcribere volui, ne cui ignaro fortaſſe naturæ demonſtrationum quibus Cl. V. utitur, ſcrupulus reſtare poſſet, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli ſegmenta conſiderat, quale ferè eſt G H E F, ego pro altero eorum ſumpſerim ſegmentum C H G: Quodque in linea A B ab ipſo termino A æquales partes capiam A Q, Q N. Ipſum autem Cl. Virum hæc remorari non poſſunt; neque hîc, neque in ſequentibus; quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. præcipit in linea *a b* æquales inter ſe ſumi *h i*, *k l*, ſcit hoc nullam limitationem admittere; ſicut & in ſchemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *a b* ſumitur *i k*, quæ dividitur in duas æquales *i m*; *m k*. Idem contingit in prop. ſequenti 40.

Revertor autem ad propoſitum, & conſtat nunc quidem, ſi detur Ratio ſolidi quod fit ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N, eo ipſo dari quoque rationem ſegmenti C H G ad ſegmentum G H E F, ac proinde continuò tunc inveniri poſſe quam rationem circulus habeat ad inſcriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ſolidum H Y. Item quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, ſolidum X V. Similiter quod oritur ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, vocemus ſolidum K Θ; eâdemque brevitate dicamus ſolida Δ Γ, Μ Ξ, Λ Σ, quibus quæ denotentur jam ſatis intelligitur.

His ſic conſtitutis, ſciendum eſt, omnem ſpem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi H Y ad ſolidum X V (quam unicam tantum deſiderari jam admonui) facile inveniri poſſe, ſi cognitæ ſint duæ rationes hæ, nimirum ratio ſolidi

Μ Ξ

M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ. Sic enim tunc argumentabitur; Nota eſt ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipſa, ſcilicet ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, continet rationem ſolidi H Y ad X V; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda ſint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certo ſcio, nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò conſideret in linea A B, ſumptas eſſe æquales inter ſe partes A Q, Q N, & hiſce pares C R, R O; E S, S P.

Si igitur indicavero ipſi quæ ſit ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item quæ ſit ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, & ne tum quidem dicere poſſit quam rationem habeat ſolidum H Y ad ſol. X V, fateatur ſane ſe fruſtra utramque Quadraturam tentaſſe, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propoſitionem 44. lib. 10. Oper. Geom. quæ vana & inanis erit, niſi ex notis rationibus ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, innoteſcat ratio ſolidi H Y ad ſol. X V. Hyperboles vero; quoniam prop. 146. ejuſd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem eſt cum dicta prop. 44. & iiſdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin vero datis iſtis duabus rationibus invenire poſthac poterit rationem ſolidi H Y ad ſol. X V, tum ſe credat Circulum reverâ quadraviſſe. Nota enim ſic erit ratio ſegmenti C H G in circulo ad ſegmentum G H E F, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipſas Rationes. Et primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, ajo eſſe eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram vero, rationem ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà ſum demonſtraturus.

Priùs autem quod ab initio promiſi etiam oſtendam, hiſce Rationibus cognitis, tamen rationem ſol. H Y ad ſol. X V,

 per

per ea quidem quæ nos adhuc docuit V. Cl. inveniri non poſſe. Etenim inventurus ex datis rationibus, ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ſolidi Κ Θ ad ſol. Δ Γ, rationem tertiam ſolidi H Y ad ſol. X V, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre eſt ex demonſtratione prop. 44. ſuprà citatæ, cui hunc caſum convenire liquidò conſtat. Dicet enim, Notæ ſunt prima & ſecunda ratio, (iſtæ enim ſunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima ſecundam contineat. Sed quoties prima continet ſecundam, toties ſecunda continet tertiam, (hoc aſſerit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) Ergo notum quoque quoties ſecunda tertiam contineat. Quare cum nota ſit ſecunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet ſolidum H Y ad ſol. X V.

Conſequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima ſecundam contineat; hoc eſt, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo ſenſu verbum *continere* hîc explicaturus eſt? Num eo, ut idem ſignificet quod alibi *continere per multiplicationem?* utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc eſt ut illa hujus ſit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propoſitione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, vel ſæpiùs etiam. Et hoc quidem eſſe non poteſt; nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata eſt neque triplicata vel ulterius multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{13}{25}$ ſit duplicata rationis 5 ad 11.

An igitur verbum *Continere* in eum ſenſum trahet, quem habet in propoſitione 125. lib. 8. Oper. Geom.? Vix quidem illud ſuſpicari poſſum; ſed etiamſi vellet rurſus inde abſurdum conſequetur. Nam ſecundum interpretationem iſtam, quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipſa continebit rationem 5075 ad 6413; hoc autem patebit horum numerorum inter ſe rationis examinanti ſecundùm regulam dictæ propoſitionis 125. Eſſet igitur ratio ſolidi H Y ad ſol. X V, hoc eſt, ratio ſegmenti circuli ab initio propoſiti C H G, ad ſegmentum G H E F, eadem quæ

5075

5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum C H G eſſet 5075, talium ſegmentum G H E F eſſet 6413; & proinde quadrans F C E 11488; & ſector F H E (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum G H F $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector F H E ad triang. G H F, ita eſt ſector F H C ad triangul. F C H, & ita circulus C D ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ contineat rationem ſol. K Θ ad ſolid. Δ Γ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi H Y ad ſolid. X V. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum M Ξ eſſet ad ſolid. Λ Σ, ut 53 ad 203: item quod ſolidum K Θ rationem haberet ad ſolidum Δ Γ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcirco hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9. propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam

 oſten-

oſtenderat facili negotio deducatur, ut jam ſtatim apparebit.

TAB. XXXVII. Fig. 3. Repetitâ enim quatenus hîc neceſſe erit figurâ ipſius, quæ eſt in propoſitione 99. lib. 9. Eſto Cylindrus Parabolicus, baſes oppoſitas habens parabolas A B D, V C E; à quo ſit abſciſſa Ungula A B C D, eâdem baſi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam ſeſquialteram, ſive quam 5 ad 2.

Tranſcriptis enim reliquis ex figura eadem, eſt F B diameter parabolæ A B D: & lineæ rectæ A B, B D. Ductâ porrò B C rectâ in ſuperficie cylindri, ſumptâque ejus quartâ parte C Q, abſcinditur plano P Q N ungula P Q C N & junguntur C A, C D. Denique toti cylindro adjuncta eſt pyramis A D γ C æqualis parti B X D E C, quæ à cylindro abſciſſa eſt plano B D E C. Et hactenus quidem ſufficiet nobis conſtructionem Cl. V. repetiiſſe. Demonſtravit autem hæc duo quæ ſequuntur, ſicut videre eſt in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula A B C D eſt ad ungulam P Q C N, ſicut 32 ad 1. Item quod hæc ungula P Q C N eſt ad pyramidem totam A γ D B C, (quæ compoſita eſt ex duabus pyramidibus A D B C & A D γ C) ut 1 ad 30.

Erit igitur ex æquo ungula A B C D ad pyramidem A γ D B C ut 32 ad 30, hoc eſt, ut 16 ad 15. Porrò cùm parabolæ A B D octava pars ſit ſegmentum B D X, erit quoque ſegmentum ſolidum B X D E C vel huic æqualis pyramis A D γ C, octava pars cylindri totius parabolici A V C E D B: ſed pyramis altera A D B C æquatur duabus octavis ſive uni quartæ ejuſdem parabolici cylindri; (eſt enim ipſa tertia pars ſui priſmatis, quod æquale eſt tribus quartis cylindri iſtius, ut ex quadratura parabolæ conſtat) ergo tota pyramis A γ D B C tribus octavis æquatur cylindri parab. A V C E D B. Cylindrus igitur parabolicus A V C E D B erit ad pyramidem A γ D B C, ut 8 ad 3, hoc eſt, ut 40 ad 15; ſed oſtenſum eſt eandem pyramidem A γ D B C eſſe ad ungulam A B C D ut 15 ad 16. Igitur ex

ex æquo erit cylindrus parabolicus A V C E D B ad ungulam A B C D ut 40 ad 16, hoc eſt, ut 5 ad 2; quod fuit demonſtrandum.

Quæ hîc dixi à Cl. Viro oſtenſa fuiſſe, veriſſima ſunt, ac proinde non eſt quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonſtr. adferre poſſem, longe ab iſta diverſam, niſi ad ſequentia properarem.

Repetitâ igitur parte ultimâ ſchematis, quod ſuprà deſcripſimus, ſit oſtendendum, quod ſolidum M Ξ, id eſt, quod oritur ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S ad ſolidum Λ Σ, id eſt, quod oritur ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, eam habet rationem quam 53 ad 203. Deſcribatur ſuper E F parabola E Π F, axem habens P Π, quam conſtat eſſe quartam partem ipſius E F ſive M E. Erit igitur parabola E Π F eadem quam V. Cl. in prop. 41. & 42. lib. 10. notat literis A R B. Ait autem in dicta prop. 42. & veriſſimum eſt, ſolidum quod producitur ex ductu plani E Σ L F in planum F Π M E æquari ſolido quod fit ex parabola E Π F ducta in ſe ipſam: ſicut illud quoque quod ſubjungit in Coroll. 1. nimirum quod ſolidum ex plano S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, æquatur ſolido ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; unde ſimiliter ſolidum ex plano E Ξ S in planum E M Λ S æquabitur ſolido ex plano E Φ S in ſe ipſum ducto. TAB. XXXVII. Fig. 2.

Oportet itaque oſtendere ſolidum ortum ex plano E Φ S ad ſolidum ex plano S Φ Π P, utroque in ſe ipſum ducto, eſſe ut 53 ad 203.

Eſto ungula parabolica A E F Π, cujus baſis parabola E Π F repetita ſit ex figura præcedenti, eodemque modo ut iſtic diviſa lineis Π P, Φ S. Sit autem altitudo ungulæ A Π dupla diametri baſis Π P. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejuſdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ E Π F in ſe ipſam. Eâdem nimirum conſideratione uſus quæ eſt in Scholio propoſ. 19. lib. 9. Nam alioqui ex ejuſmodi ductu potius dicendum eſſet geminas ungulas produci, ſingulas altitudine æquales diametro TAB. XXXVII. Fig. 4.

tro Π P. Ducto deinde plano per A Π P, & alio huic parallelo D Φ S ſecundum lineam Φ S, erit jam pars ungulæ hiſce duobus planis terminata, æqualis ſolido quod fit ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; & pars ungulæ E D S Φ, æqualis ei ſolido quod fit ex ductu plani E Φ S in ſe ipſum. Quare nunc demonſtrandum erit duntaxat, partem E D S Φ eſſe ad partem Φ A P ut 53 ad 203, Sit Φ N parallela E P, & N C parallela Π A. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, P N eſt $\frac{3}{4}$ Π P, erit quoque P C $\frac{3}{4}$ A P. Verùm & S D æquatur $\frac{3}{4}$ A P, quum ſit huic parallela *, ſitque parabola E A F: Itaque junctâ C D, ea parallela & æqualis erit lineis P S, N Φ. Ducatur ſecundùm D C planum D B C parallelum baſi E Π F, fietque ſemiparabola B D C æqualis & ſimilis ſemiparabolæ Π Φ N; & erit Φ B N dimidius cylindrus parabolicus: D A C B verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur ſicut antea oſtendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, baſin habentis D B C & altitudinem B A. Ergo quum ſemicylindrus Φ B N habeat altitudinem B Π triplam ipſius B A, erit ungula dimid. D A C B ad ſemicyl. Φ B N, ut 2 ad 15, hoc eſt, ut 8 ad 60.

* 11. 16. *Elem.*

Junctâ porro Φ Π, conſtat ſemiparabolam Π Φ N ad triangulum Π Φ N eſſe ut 4 ad 3; ſed triangulus Π Φ N eſt ad rectangulum Φ P ut 1 ad 6, (eſt enim baſis Π N tertia pars ipſius N P) hoc eſt, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit ſemiparab. Π Φ N ad rectang. Φ P ut 4 ad 18. Itaque & ſemicylindrus Φ B N eſt ad parallelepipedum ejuſdem altitudinis ſuper baſi Φ P, ut 4 ad 18. Dicti autem parallelepipedi dimidium eſt priſma D N S; ergo ſemicylindrus Φ B N eſt ad priſma D N S, ut 4 ad 9, hoc eſt, ut 60 ut 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula D A C B erat 8, talium ſemicylindrus parab. Φ B N erat 60, (ut ſuprà oſtenſum eſt) taliumque priſma D N S erit 135. Ac proinde ſolidum A Π S D, quod ex iſtis tribus componitur, erit 203. Eſt autem ungula dimidiata A D C B ad dimidiatam ungulam E A P Π, ut 1 ad 32, ſicut Cl. Vir. demonſtravit in prop. 95. lib. 9. Ergo qualium partium ungula dimid.

A D C B

A D C B eſt 8, talium erit dimid. ungula E A P Π 256, quoniam ut 1 ad 32, ita eſt 8 ad 256. Diximus autem partem ſol. A Π S D eſſe talium 203. Igitur dim. ungula E A P Π eſt ad partem A Π S D ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua E D S Φ ad partem A Π S D, ut 53 ad 203; quod erat demonſtr. Oſtendimus igitur illud quoque ſolidum, quod ſuprà diximus fieri ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S, eam habere rationem ad ſolidum ortum ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, quam 53 ad 203.

Tandem ad alterum eorum quæ demonſtrare promiſimus accedamus, repetitâque parte mediâ ſchematis triplicis quod ſuprà deſcriptum fuit, oſtendendum ſit; ſolidum ortum ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, ad ſolidum ex ductu plani R Θ Γ O in planum R Δ Z O eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus C D trianguli C D I, erigatur ad perpendiculum triangulum C K D, & jungatur K I. Erit jam pyramis C D I K illud ſolidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli C D I in triangulum C D K. Etenim ſectâ pyramide plano A Z O Γ ſecundum O Γ, quod rectum ſit ad baſin C D I, erit ſectio quadratum, id eſt, rectangul. quod fit ex lineis Γ O, O Z; eademque ſectio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano E Δ R Θ priori parallelo, ſecundùm lineam R Θ, exiſtet inde rectangulum E R, quale continetur lineis Θ R, R Δ. Oportet itaque oſtendere, quòd ſolidum K C R E Δ eſt ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11. TAB. XXXVII. Fig. 2. Fig. 5.

Ducatur ſecundùm E Δ planum Δ E B parallelum baſi C D I; abſcindet illud pyramidem B E Δ K ſimilem toti pyramidi C I D K, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum B Δ ad C D. Sed B Δ, cum ſit æqualis ipſi C R, quarta pars eſt lateris C D. Itaque qualium partium pyramis B E Δ K eſt unius, talium pyramis C I D K erit 64: & dimidium hujus, hoc eſt, ſolidum K A O C erit 32. Qualium autem pyramis B E Δ K eſt unius talium quoque priſma B E R eſt 9; quoniam baſin habent communem B E Δ, & priſmatis altitudo B C tri-

pla eſt ad altitudinem pyramidis B K. Ergo ſolidum K C R E Δ quod ex hiſce duobus componitur, erit partium 10, qualium ſolidum K A O C eſt 32. Apparet igitur hoc eſſe ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo ſolidum K C R E Δ eſſe ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11: quod erat oſtendendum.

FINIS.

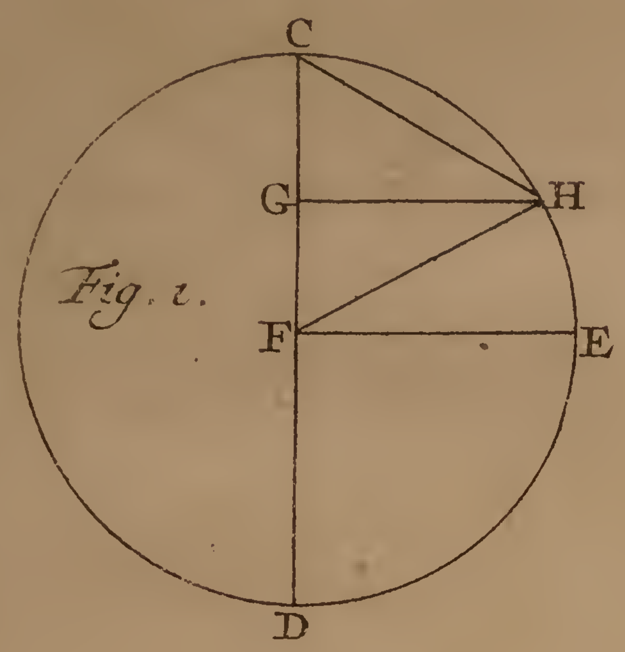


Fig. 1.

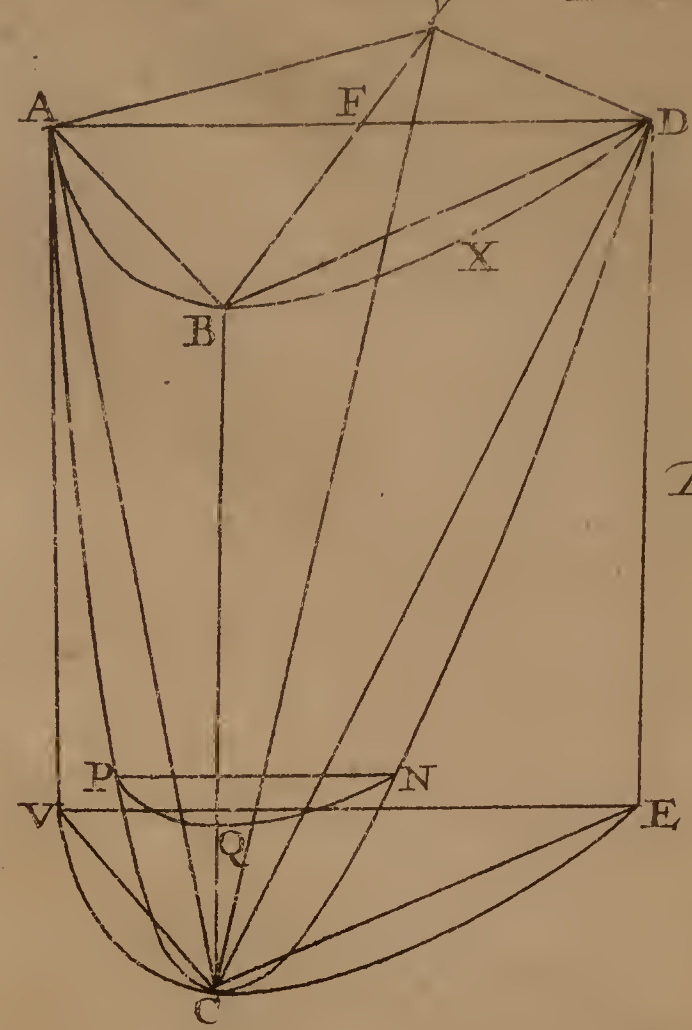
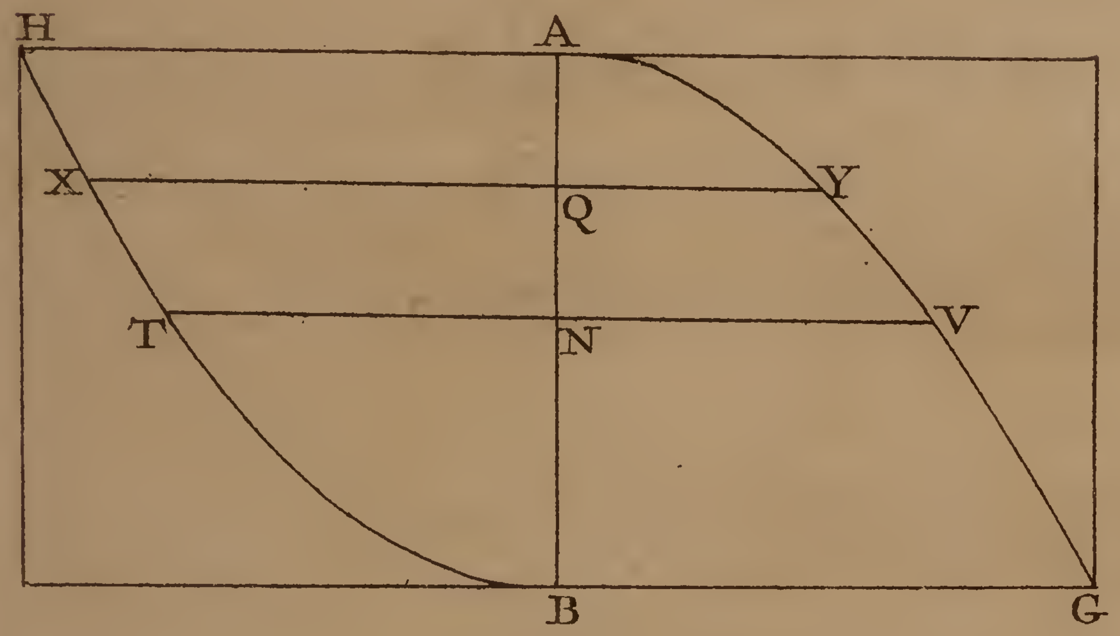


Fig. 3.



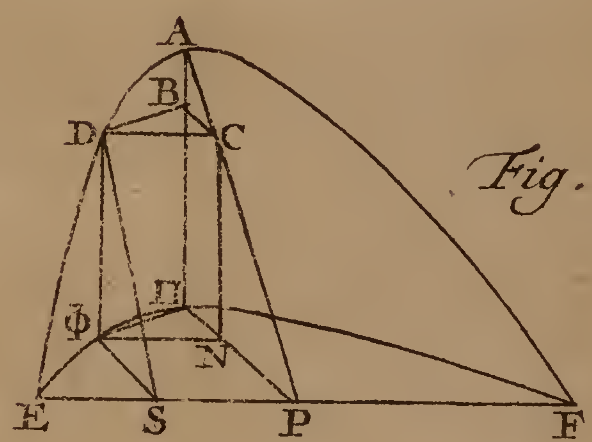
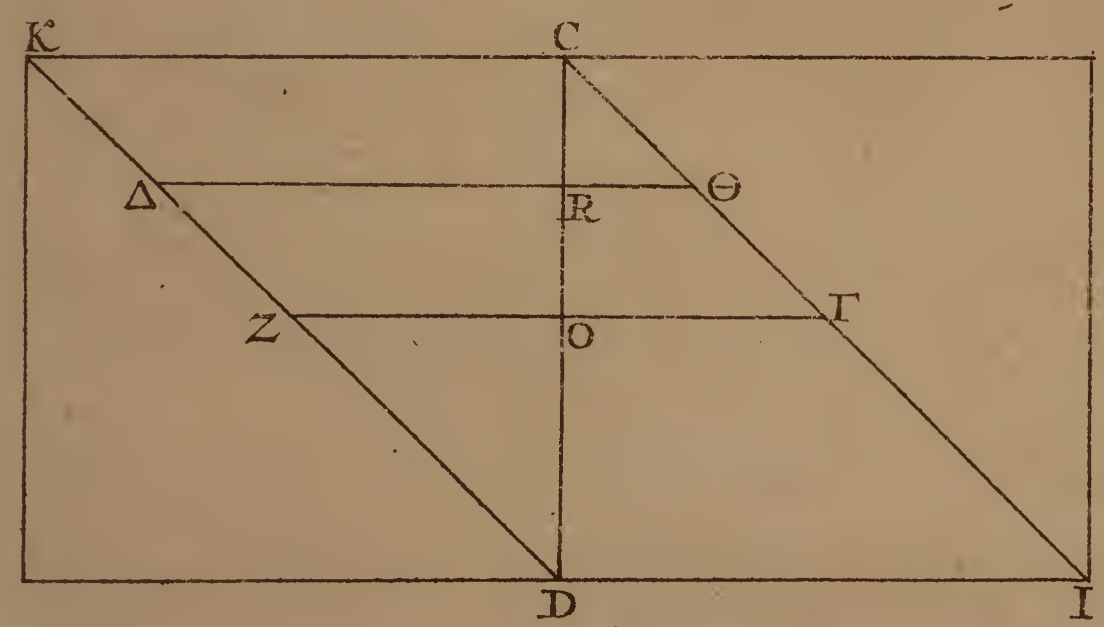


Fig. 4.

Fig. 2.



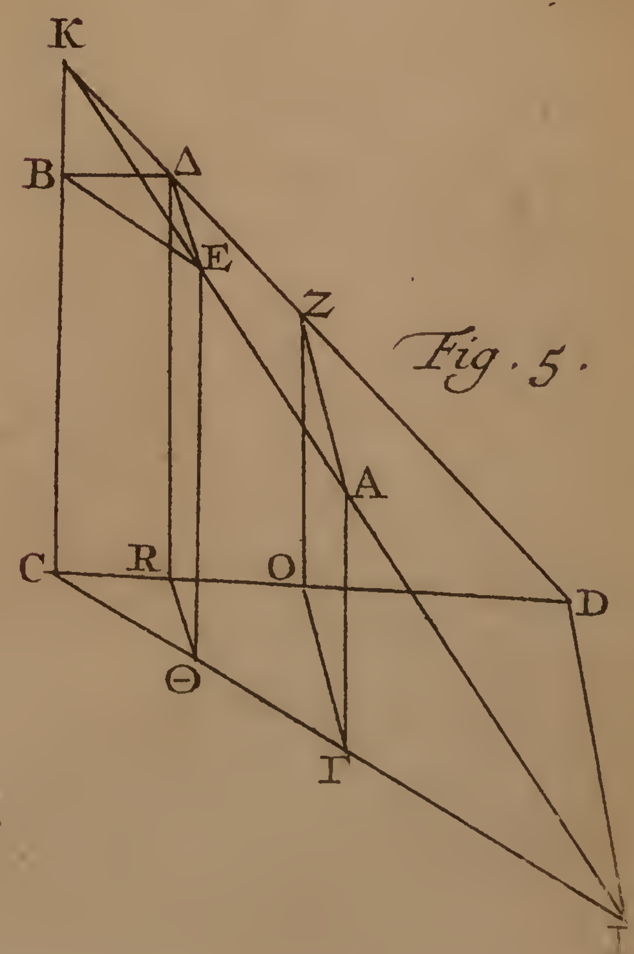
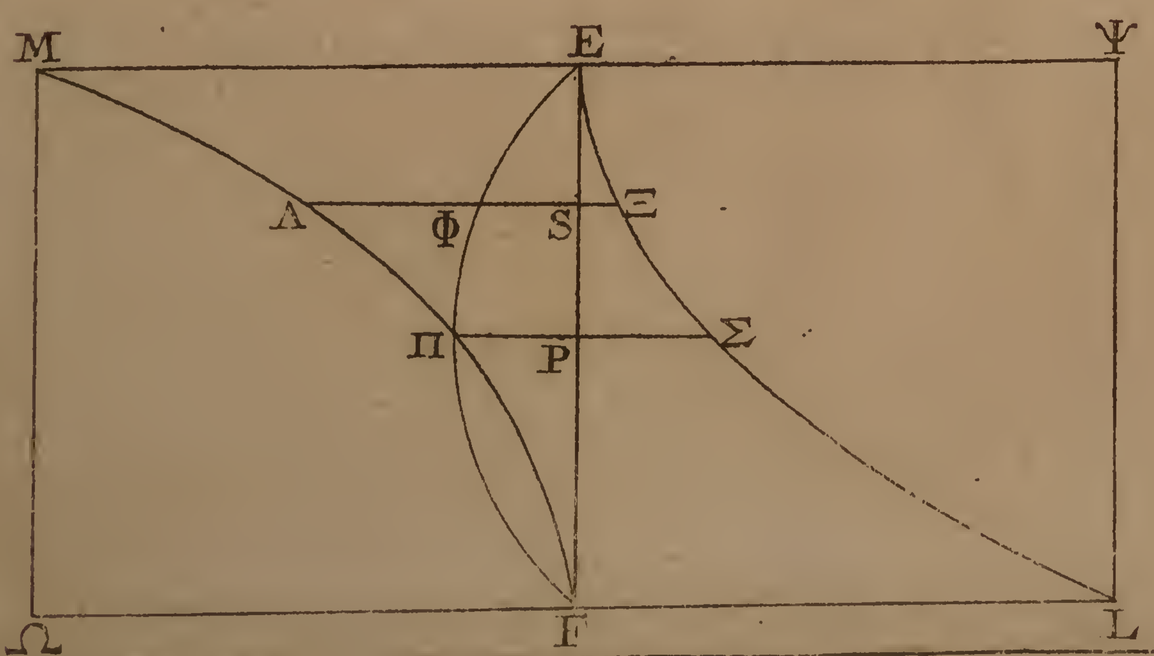


Fig. 5.

Fig. 2.



CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

AD

C. V. FRAN. XAVERIUM

AINSCOM. S.I.

EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii à* S^{to}. *Vincentio* impugnata fuit.

CHRISTIANI HUGENII,
Const. F.
AD
C. V. FRAN. XAVERIUM AINSCOM. S. I.
EPISTOLA.

Cl. Viro D°. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS HUGENIUS S. D.

LIber ille quem non ita pridem tuo nomine huc miſit Apelles veſter Segerus, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariſſ. quam ſolent eſſe ea quorum diutina expectatio deſiderium auget. Jam diu enim intellexeram te Quadraturæ Vincentianæ patrocinium ſuſcepiſſe, noviſſiméque & Lovanio & Româ ſignificatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quædam noſtræ Exetaſi dicata eſſet. Itaque cum avide totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quæ propius ad me pertinebant. De quibus quid viſum fuerit breviter tibi perſcribere conſtitui. Equidem miratus ſum, cum me non ultimum inter eos recenſeas qui cæteris ſolidius in examinanda Quadratura veſtra verſati ſint, poſtea tamen adeo nihili animadverſiones omnes meas, omniáque argumenta prædicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, cœlo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minime ſum aſſecutus. Veruntamen Viri Doctiſſimi funditus evertiſſe me commenta veſtra pronunciavere, quorum judiciis, etſi vos fortaſſe non ſtatis, apud intelligentes tamen multo pluris futura reor quam eo-

rum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E ſocietate veſtra Vir eximius A. Tacquetus, *accurate ſibi lectam eſſe multumque probari Exetaſin noſtram reſcripſit, & recte me urgere autorem Quadraturæ, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat ſecundam & ſecunda tertiam, idque niſi præſtet, tertiam incognitam explicaturum nunquam; ac proinde non daturum quadraturam, quæ à notitia tertiæ illius rationis dependet.* Alter item apud vos eſt Clariſſimus Gutſchovius, quem paſſim profiteri ſcio magnos P. Gregorii conatus noſtrâ operâ penitus concidiſſe. Neque aliter ſentit Vir undiquaque Doctiſſimus & in Academia Oxonienſi Mathematum Profeſſor J. Wallisius, idque publice teſtatum fecit in edito nuper ſubtiliſſimo opere de Infinitorum Arithmetica. Poſſemque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni perſuaſum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus ſis, eodem mecum errore ductos qui mihi applaudunt, ipſos quoque nihilo rectius penetraſſe ſenſa autoris tui. Quare id agam potius, ut procul à me ſimul atque illis hanc, ſive inſcitiæ, ſive oſcitantiæ culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quæ mihi objicis reſpondendum opinor. Variis allatis conjecturis veriſimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis præferri quæ prima ponitur. Hoc ita refutas, ut, quod ego præcipuum argumentum dixeram, diſſimules prætereáſque. Verum per me licet ut quo loco vobis viſum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abunde præſtitiſſe arbitrabor ſi hanc abſurdam eſſe evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expetiturum, imo, ſi offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iiſdem omnes principiis innitantur, Proportionalitatum nimirum doctrinæ atque ei quæ eſt de ductibus plani in planum, tam certum eſt, ut negari nulla ratione poſſit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas, in prima hac quadratura, proportionalitatum conſideratione, non uti autorem tuum. Sed miror quâ fronte; cum non ignores utique propoſitionem 12. 39. & 40. libri 10. ex 8va ejuſdem libri demonſtrari, hanc vero per 114. lib.

lib. 8. qui totus eſt de Proportionalitatibus.

Porro ſuperfluam me ais operam ſumpſiſſe, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, ſi credimus, multo antè quàm ego edidiſſem, imo quàm ipſe editus eſſem, perſpectas habuit aliiſque demonſtravit. Quæſo cur non explicuit igitur, noſque ea levavit moleſtia? Nam certum erat plurimum ad abſolvendam quadraturam, ſi modo abſolvi poſſet, eorum notitiam conferre debere, planéque eſſe neceſſariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quæ cognoſci poſſe aliquâ ſaltem ratione imaginamini, atque ea quæ liquido comperta fuerint. Itaque ad propoſ. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri aſſeris. Illa vero non magis ipſas expedit quam propoſitio poſtrema ejuſdem libri, rationem quæ ſit inter circulum & quadratum diametri. Prorſus huic ſimile eſt quod de Parabolica ungula reſpondes. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuiſſe autorem tuum, quænam ſit illius ad cylindrum ſuum proportio. Equidem ex iis quæ jam tradiderat, erui illam poſſe faſſus ſum; ipſum vero adhuc cujuſmodi foret neſciviſſe, ſatis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprομeret. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti propoſitiones elucubraſſet, id tanquam ſuperfluum non eſſe adſcripturum, ſi tam nullo negotio inveniri poſſe ſperaret. Parum intererat utrum propoſitione illud dignatus fuiſſet, (quod noluiſſe eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uſpiam expreſſa eſt. Nam in eo quod adducis, hoc ſolum legitur, methodum traditam eſſe qua ratio ungulæ ad cylindrum quo continetur, inveſtigari queat, eamque notam fore, ſi quorundam inter ſe corporum rationes inventæ fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quæ ſit inter ungulam cylindrumque ſuum analogia, lectoribus diſquirenda relinquuntur: idque ipſe non neſcis. Quare non ſatis ingenue hic me diſſimulationis arguis, ubi ipſe contra quam ſentias, ſcribere videaris.

Jam vero de *palmari* errore quem mihi impingis videamus.

mus. Is circa verbum *continere* commiſſus eſt, ex quo non recte percepto factum eſt ſcilicet, ut, cum Quadraturam veſtram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefeciſſe eam judicarunt, cæcutierint. Ego ſignificationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quæ & P. Sarraſæ eſt, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, præterii. Igitur hic *palmaris* eſt error meus, quod nec P. Sarraſæ librum, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortaſſe ſi ſciviſſem explicationem veſtram, propterea memorandam duxiſſem, cum parum adeo ad rem faciat, ſitque monſtroſa plane atque abſona, uti ex adjecto ſpecimine liquebit: quantum vero ea promoveritis deinde exponam. Propoſitio 40. lib. 10. eſt hujuſmodi. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *toties continere rationem ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H. Quam propoſitionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantùm phraſi ſcilicet) ſic nobis enarras. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *conſtitui ex iis rationibus quæ toties multiplicatæ ſunt illarum rationum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H.

Pulchra vero explanatio! quam quia ego pervidere non valui, ſenſum convenientem ratiociniis veſtris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longe aliud ſcribere quam intelligi poſtulet? quiſve magis adhuc intricatum ſenſum theorematibus jam nunc nimium obſcuris affingere vellet? Omnes profecto qui vobis controverſiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepiſſe noſti, neque ulli hoc incidiſſe, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* conſtituerentur. Ecce vero ut præter eos quorum animadverſiones ad manus veſtras pervenere, eadem plane quæ nobis,

nobis, circa has propoſitiones & ſignificationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Carteſio, quem ſi minus inſignem Geometram quam *Algebriſtam* fuiſſe arbitraris, parum ex vero judicas. Ejus ad amicum epiſtolæ copia mihi facta eſt, cum jam diu exetaſis noſtra prodiiſſet, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, ſed & tota inſuper ad opus Geometricum P. à S^to^ Vincentio pertinet, integram hic adſcribere viſum eſt. Gallicè ſic habet.

MONSIEUR.

J'Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je deſirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me reſoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque choſe & aſſez ce me ſemble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne ſoit facile, & qu'on ne puſt eſcrire tout en une ou deux pages. Le reſte n'eſt qu'un paralogiſme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propoſitions qui ne ſervent qu'à embroüiller la matiere, & ſont tresſimples & facilles pour la pluspart, bien que la façon dont il les traite, les face paroiſtre un peu obſcures. Pour trouver ſon paralogiſme, j'ai commencé par la 1134e *page, ou il dit: Nota autem eſt proportio ſegmenti* LMNK *ad ſegmentum* EGHF, *ce qui eſt faux, & la preuve qu'il en donne eſt fondée ſur la* 39e *propoſition en la page* 1121. *du meſme livre, ou il y a une erreur tresmanifeſte, qui conſiſte en ce qu'il veut appliquer à pluſieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des meſmes quantitez diviſées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles*

2, 4, 8,   2, 8, 32.
&
2, 6, 18,   2, 10, 50.

bien qu'il ſoit vray que 8. *eſt à* 32. *en raiſon duoblée de ce que* 4. *eſt à* 8. *Et que* 18. *eſt auſſi à* 50. *en raiſon doublée de ce que* 6. *eſt à* 10. *il n'eſt pas vray pour cela que* 8 † 18. *c'eſt à dire* 26. *ſoit à* 32 † 50. *c'eſt à dire* 82. *en raiſon double de celle qui eſt entre* 4 † 6. *c'eſt à dire* 10, *&* 8 † 10, *c'eſt à dire* 18. *Tous ſes raiſonnements ne ſont fondez que ſur cette faute, & ce qu'il eſcrit de*

Proportionalitatibus & de Ductibus, ne ſert qu' à l'embaraſſer, & ne me ſemble d' aucun uſage, pour ce que fruſtra fit per plura quod poteſt fieri per pauciora.

Quorum latinè hæc eſt ſententia.

Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin ſimul opinionem meam tibi exponerem de nova iſta quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipſo impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus ſatis tutò mihi pronunciare poſſe videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile ſit; unâque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Cætera merum paralogiſmum de quadratura circuli continent, multis propoſitionibus implicitum, quæque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleræque vero ſimpliciſſimæ ſunt & facili ratione conſtant, licet tractandi methodus obſcuriores reddiderit. Paralogiſmum quærere inſtitui, initio facto ad paginam 1134. *ubi hoc ait: Nota autem eſt proportio ſegmenti* L M N K *ad ſegmentum* E G H F; *quod falſum eſt, pendet enim hujus demonſtratio à propoſitione* 39, *pag.* 1121. *ejuſdem libri, ubi manifeſtus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de ſingulis ſeorſim fuerat oſtenſum. Etenim ex. gr. poſitis quatuor proportionalium ordinibus*

2,	4,	8,	&	2,	8,	32,
2,	6,	18,		2,	10,	50,

licet verum ſit rationem 8. *ad* 32. *duplicatam eſſe ejus quæ* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam eſſe ejus quæ* 6. *ad* 10. *non tamen idcirco verum eſt* 8 † 18. *hoc eſt,* 26. *eſſe ad* 32 † 50. *hoc eſt ad* 82. *in ratione duplicata ejus quæ* 4 † 6. *hoc eſt,* 10. *ad* 8 † 10. *hoc eſt,* 18. *Unicum ei fundamentum hæc vitioſa argumentatio; quæque de Proportionalitatibus ſcribit & de Ductibus, tantum majoribus ipſum difficultatibus involvunt, neque alicujus uſûs videntur, ſiquidem fruſtra fit per plura quod poteſt fieri per pauciora.*

Vides, Vir Egregie, neque Carteſium, veſtrum illud *Hoc eſt juxta mentem autoris*, agniturum fuiſſe, ſed potius, quod res eſt, dicturum, deſperatâ cauſâ hoc vobis effugium quæſitum, ut quadratura veſtra ad inſtar Protei cujuſdem aliâ atque aliâ

aliâ aſſumptâ formâ quantumlibet arctè ſeſe conſtringentibus elaberetur. Verum age, inſpiciamus jam quo rem deducas, poſteaquam verbi *continere* novam ſignificationem elicuiſti, eâque vetera theoremata tam ſcitè interpolaſti. In Corollario propoſitionis 40. lib. 10. quò tam ſæpe provocas, id unum egiſſe videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut ſi quis argumentationis tuæ tenorem conſectari cupiat, is defeſſus abſiſtat priuſquam ad finem pervenerit. Ego ad eum uſque locum te ſecutus ſum, ubi ſpatia Y & Z aſſumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeo enim manifeſto vitio atque ἀγεωμετρησίᾳ ibi laborat conſtructio tua, ut tibimet ipſi exploratum id eſſe dubitare nequeam: ſed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, ſperaſti, credo, in tanta obſcuritate nemini illud facile animadverſum iri. *Dein*, inquis, *aſſumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri aſymptotorum parallelis incluſa*. Nullâ aliâ præcautione aſſumuntur quam quod rectis alteri aſymptotorum parallelis includi ea neceſſe ſit. De magnitudine utriuſque aut ratione quam inter ſe ſervare debeant nihil præcipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unum quodque eorum abſcindi poterit. Mox tamen rationem ſpatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare inſtituis, quas prius ſecundum certam determinationem aſſumpſiſti, tibique hoc demonſtrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis ſolidorum* G H *ad* I K *multiplicata eſt rationis totalis ſolidi* L M *ad* N O. Quidnam, quæſo, abſurdius, quam de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quæ prorſus in certa ſit ac vaga? Equidem ex hoc ſolo ſatis liquere puto, quam fruſtra primæ Quadraturæ ſuppetias ferre tentaveris, cum in eo quod præcipuè tibi explicandum erat, tam inſigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ uſus ſis, ſi me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen ſcito perpetuum adverſus vos argumentum fore, quod rationem peripheriæ ad diametrum quam ſingulis quadraturis datam eſſe profitemini, ipſi tamen exhibere non poteſtis; non autor ipſe Quadraturæ, non tot ejus diſcipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum ſit. Datam eſſe rationem, Euclides definivit, cui poſſu-

poſſumus æqualem invenire. Quis autem ad veſtram illam hoc pertinere credet, quæ irrito labore toto decennio quæſita eſt? Nam quod ſufficere exiſtimatis ſi modo viam commonſtraveritis quâ emensâ ad quæſitum perveniatur, obſtacula vero, atque innumeras difficultates quibus præſepta eſt, non removetis, videte cui perſuadere poſſitis, eâ ratione tetragoniſmi negotium à vobis confectum eſſe. Illud ſanè vos conſequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minus expoſiti ſitis ad promiſcuos omnium inſultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facile enim acrius inſtantes proportionum & proportionalitatum veſtrarum tenebris involvere poteſtis, atque efficere ut tandem veluti nox prælium dirimat. Hoc ipſum ne mihi eveniret, cum exetaſin Quadraturæ conſcriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri poſſet, autorem ad abſurdum compellerem, nimirum ut vel nolle ſe vel non poſſe Quadraturam ſuam abſolvere fateretur. Eo fine ignota prius atque informia corpora dimenſus ſum, exhibitiſque prioribus duabus ſolidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixiſſet. Ad quas anguſtias redactum non aliâ ratione defendis, quam expoſtulando mecum quod autori tuo modum præſcribere præſumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* ſcribam. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec præſcribo; ſed hoc urgeo; ut quem ille modum ſe inveniſſe contendit, eum reapſe utilem & efficacem eſſe demonſtret. Atque ita, quid ſcripſerim & in quem finem, me non neſciviſſe, ſatis jam tibi conſtare arbitror. Cui vero ſcripſerim, ne hoc quidem puto me oblitum fuiſſe. Vides autem quam hac in parte longe diverſum ſonent Carteſii literæ atque Elogia veſtra: quorum utris potius ſubſcribendum ſit aliorum judicio decerni malim quam meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturæ ſcire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quanto maturius ab errore ſuo reſipiſcet. Vale.

Dat. Hagæ-Com. 2. Oct.
1656.

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EJUSDEM

Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones.

PRÆFATIO.

Circa antiquum Tetragoniſmi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil eſt celebrius, recens operæ pretium nos feciſſe rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus conſecuti, Geometris ea demonſtrata impertiri volumus. Namque & ſtudiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipſâ ad rerum abditarum inveſtigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem ſummâ contentione verſati ſint, aliqua ſuperfuiſſe haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam ſibi aſſerere conati ſunt, variaque ſubinde commenta protulere, falſis vera miſcentes. Verum à peritioribus omnia vel everſa fuiſſe vel contempta ſcimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimenſio niteretur, præter unum illud, majorem eſſe eum inſcripto ſibi polygono, circumſcripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus oſtendimuſque, quod duobus ſumptis polygonis proportione mediis inter inſcriptum circumſcriptumque ipſis ſimile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major exiſtit, reliquum vero

ro

ro polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonſtraturi ſumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen ſunt non accuratiora modò, ſed quæ & uſu magis probentur; quæ ſane hic in anteceſſum non recenſebimus, quippe in ſequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid ſtudiis Geometriæ conferant expoſuiſſe proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propoſiti tractationem inſtituerimus, primum ea tradendo quorum demonſtratio conſuetis Geometriæ elementis contenta eſt, deinde centrorum gravitatis quoque conſiderationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, ſed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda ſit; expeditâ ratione ad Mechanicas conſtructiones, quæque vel ſubtiliſſimas earum minime fruſtretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum 96 eruit, per dodecagona ſola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum 10800, cum iis qui veterem inſiſtunt viam vix hi peripheriæ termini exiſtant 62831852 & 62831855, ad diametrum partium 20000000, noſtrâ Methodo iſti prodiiſſe cernentur, 62831853071795 84, 62831853071795 89; ſemperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona*

gona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certe ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus 3141592653**8** *&* 3141592653**3**, *poſitâ diametro partium* 10000000000, *cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hîc notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis*

oſtendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum inveſtigare queant, ut nunquam duorum ſecundorum ſcrupulorum ſit à vero diſſenſus, ſæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda viſum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Carteſium, cujus viri inventis cum Philoſophia univerſa tum Matheſis plurimùm illuſtrata eſt, nonnulla quæ huc ſpectent ſcriptis mandaſſe. Ea vero defuncto ipſo in commentariis reperta feruntur, neque adhuc reſcire potuimus quâ induſtriâ aut eventu hiſce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conſcriptus, quique omnis in his eſt. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, ſi præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis ſuperſtructum eſt, demonſtrare potuiſſet. Sed quas ibi pro demonſtrationibus haberi poſtulat, propoſitum minime comprobant: ipſa vero theoremata, ſicut in utroque evidenti ratione nos oſtendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem ſequentibus meritò inſerenda putavimus, quod cauſæ eorum à noſtris pendeant inventis.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
DE
CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI Circuli portioni, ſemicirculo minori, triangulum maximum inſcribatur, & portionibus reliquis triangula ſimiliter inſcribantur, erit triangulum primo deſcriptum duorum ſimul quæ in portionibus reliquis deſcripta ſunt minus quam quadruplum.

Eſto circuli portio A B C, ſemicirculo minor, cujus diameter B D; maximum autem inſcriptum ſit triangulum A B C, hoc eſt, quod baſin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inſcribantur triangula item maxima A E B, B F C. Dico triangulum A B C minus eſſe quam quadruplum triangulorum A E B, B F C ſimul ſumptorum. Jungatur enim E F, quæ ſecet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B. Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita eſt D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale eſt rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum vero E B æquale rectangulo ſub eadem diametro & recta B G. Minor igitur eſt B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor eſt quam dupla E F, quoniam hæc ipſi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus eſſe quam octuplum tri- TAB.XXXVIII. Fig. 1.

 anguli

anguli E B F. Huic autem triangulo æquantur ſingula A E B, B F C. Ergo utriuſque ſimul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio, ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.

TAB. XXXVIII. Fig. 2. Eſto circuli portio ſemicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos baſis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio ſemicirculo minor eſt. Porro ducatur F G, quæ contingat ipſam in vertice B; & jungantur A B, B C. Oſtendendum eſt itaque, triangulum F E G majus eſſe dimidio trianguli A B C. Conſtat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria eſſe, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem ſimul F E, E G, major eſt quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita eſt altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & baſis utrique eadem A C. Ergo, quum F A ſit minor quam ſubdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus vero quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod oſtendendum fuit.

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio, ſemicirculo minor, ad maximum triangulum inſcriptum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam.

Eſto

Eſto Circuli portio, ſemicirculo minor, cui maximum ſit inſcriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inſcribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus eſt triangulum A B C quam illorum ſimul quadruplum *: ac proinde ſpatium aliquod adjungi poteſt triangulo A B C, quod una cum ipſo minus etiam ſit quam quadruplum dictorum ſimul triangulorum A D B, B E C. Eſto itaque eâ ratione adjectum triangulum A F C, ut totum ſpatium A B C F minus ſit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in reſiduis portionibus maxima triangula inſcribi intelligantur; itemque in reſiduis ſemper, donec portiones quibus poſtremùm inſcribentur ſimul minores ſint triangulo A C F, hoc enim fieri poteſt. Itaque & triangula poſtremùm inſcripta ſimul triangulo A C F minora erunt. Quia autem ſpatii A B C F quarta parte majora ſunt duo ſimul triangula A D B, B E C. Rurſuſque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inſcribuntur. Et horum quartâ majora ſimiliter, quæ deinceps: atque ita continue, ſi plura fuerint deſcripta. Erit propterea ſpatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inſcriptis triangulis, & triente eorum, quæ poſtremò inſcripta erunt, compoſitum, majus quam ſeſquitertium ipſius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonſtratum eſt, quod ſi fuerint ſpatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia ſimul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt ſeſquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta cum triente poſtremo diſcriptorum majora erunt tertia parte ſpatii A B C F. Sed triens dictus minor eſt triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente poſtremò inſcriptorum; à ſpatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C deſcripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inſcripta major quam ſeſquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipſa. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXXVIII, Fig. 3.

* *per. 1. huj.*

* *33. 5. Elem.*

 THEOR.

Theor. IV. Prop. IV.

Omnis circuli portio, ſemicirculo minor, minor eſt duabus tertiis trianguli eandem cum ipſa baſin habentis, & latera portionem contingentia.

TAB. XXXVIII. Fig. 4.

Eſto circuli portio, ſemicirculo minor, A B C, & contingant ipſam ad terminos baſis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem eſſe duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quæ portionem contingat in vertice B, & inſcribatur ipſi triangulum maximum A B C. Quum igitur triangulum E D F majus ſit dimidio trianguli A B C *, manifeſtum eſt ab illo partem abſcindi poſſe, ita ut reliquum tamen majus ſit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abſciſſum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus ſuis contingant, ipſiſque portionibus triangula maxima inſcribantur. Idemque prorſus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones reſiduæ ſimul minores ſint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inſcripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumſcripta. Et quoniam triangulum E G F majus eſt dimidio trianguli A B C; & rurſus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem ſemper ratione in reliquis locum habet, ut triangula ſuper portionum verticibus conſtituta, eorum quæ intra portiones ipſas deſcripta ſunt, majora ſint quam ſubdupla: apparet triangula omnia extra portionem poſita etiam abſque triangulo E G D majora ſimul eſſe quam dimidia triangulorum omnium intra portionem deſcriptorum. Atqui ſegmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus eſt quam ſubduplum. Ergo triangulum E D F ſimul cum reliquis triangulis, quæ ſunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis ſpatium à rectis

* per. 2. huj.

rectis A D, D C & arcu A B C comprehenſum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde triangulum A D C majus quam portionis A B C ſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.

Theor. V. Prop. V.

Omnis circulus major eſt pylogono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero.

Eſto circulus centro C; ſitque ipſi inſcriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum ſit A B. Atque alterum item polygonum ſit inſcriptum, cujus bina latera A D, D B, ſubtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus eſt. Sit autem exceſſus trienti æquale H ſpatium. Dico circulum majorem eſſe polygono A D B una cum ſpatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major eſt quam ſeſquitertia trianguli A D B ſibi inſcripti *; erunt portiones A D, D B, ſimul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & ſector C A B major erit utriſque ſimul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem ſector C A B ad circulum totum, ita eſt quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem exceſſus polygoni A D B ſupra polygonum A B. Ergo manifeſtum eſt circulum quoque totum majorem fore polygono A D B una cum triente exceſſus quo polygonum A D B ſuperat polygonum A B, hoc eſt, unà cum ſpatio H. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 5.

* per. 3. huj.

Theor. VI. Prop. VI.

Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti.

Eſto

TAB. XXXVIII. Fig. 6. Eſto circulus cujus centrum A, & inſcribatur ipſi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum ſit B C; & aliud ſimile circumſcribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occurſum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem eſſe duabus tertiis polygoni F E G ſimul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam ſuper baſi portionis B D C conſiſtit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipſa minor duabus tertiis trianguli B E C *. Itaque ſi triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc eſt, duæ tertiæ exceſſus quadrilateri A B E C ſupra triangulum A B C, ex utriſque compoſitum ſpatium majus erit ſectore circuli A B C. Idem eſt autem, ſive triangulo A B C addantur duæ tertiæ exceſſus dicti, ſive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet ſectorem A B C minorem eſſe duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare ſumptis omnibus quoties ſector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumſcripti F E G & triente inſcripti B C. Quod erat oſtendendum.

* per. 4. huj.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero.

TAB. XXXVIII. Fig. 7. Eſto circulus A B, centro O, cui inſcribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo laterum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis perimetro polygoni A E C B D F, G H vero æqualis perimetro polygoni

goni A C D. Exceſſus igitur perimetrorum eſt H I; cujus triens I K adjiciatur ipſi G I. Dico totâ G K majorem eſſe circuli A B circumferentiam. Inſcribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum A L E M C, quod ſit duplo numero laterum polygoni A E C B D F. Et ſuper lineis G H, H I, I K, triangula conſtituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis ſemidiametro circuli A B. Igitur quoniam G H baſis æqualis eſt perimetro polygoni A C D, erit triangulum G N H æquale polygono, cui bis totidem ſunt latera, hoc eſt, polygono A E C B D F. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis O A & O E, quarum hæc ſecet A C in P. Nam triangulum quidem A E O æquale eſt triangulo baſin habenti A P & altitudinem radii O E. Quanta autem pars eſt triangulum A E O polygoni A E C B D F, eadem eſt recta A P perimetri A C D. Itaque polygonum A E C B D F æquabitur triangulo cujus baſis æqualis perimetro A C D, altitudo autem radio E O: hoc eſt, triangulo G N H. Eâdem ratione, quoniam baſis G I eſt æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale exceſſui polygoni A L E M C ſupra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I ſubtriplum eſt ex conſtr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti exceſſus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem trianguli æqualis eſt circuli ſemidiametro. Ergo evidens eſt rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem eſſe. Quod erat oſtendendum. * *per* 5. *huj.*

Hinc manifeſtum eſt, ſi à ſeſquitertio laterum polygoni circulo inſcripti auferatur triens laterum polygoni alterius inſcripti ſubduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus eſſe. Idem enim eſt, ſive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ exceſſus quo ipſa ſuperat perimetrum minorem, ſive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit ſeſquitertium majoris perimetri mi-

nus triente minoris. Quare ſi à ſexdecim inſcripti dodecagoni lateribus duo latera inſcripti hexagoni, hoc eſt, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut ſi ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ ſemiſſe. Hoc autem ad conſtructionem mechanicam utile eſt, quoniam exigua eſt differentia, ſicut poſtea oſtendetur.

Manifeſtum etiam, in omni arcu qui ſemicircumferentiâ minor ſit, ſi ad ſubtenſam addatur triens exceſſus quo ſubtenſa ſinum ſuperat, compoſitam arcu minorem eſſe.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores.

Tab. XXXVIII. Fig. 8. Eſto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam ſecet in E: ſitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias ſimul cum triente ipſius E F, arcu E C majores eſſe. Jungantur enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipſi G C æqualis, itemque D G; nam ſi centro G circumferentia deſcribatur quæ tranſeat per puncta C, E, eadem tranſibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus eſt. Oſtenſum autem fuit ſuprà, duas tertias quadrilateri A E G C una cum triente trianguli A E C ſimul majores eſſe ſectore A E C *. Eſtque quadrilaterum A E G C æquale triangulo baſin habenti

* per 6. huj.

benti duplam C G, hoc eſt, C D, & altitudinem C A: triangulum vero A E C æquale triangulo baſin ipſi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C ſimul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem vero radii A C. Quare ejuſmodi quoque triangulum majus erit ſectore A E C. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius C D & triente ipſius E F, majorem eſſe arcu C E. Quod erat demonſtrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti.

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ ſimul inſcripti polygoni latus C D medium dividat in H, & circumſcripti latus E F in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipſi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurrátque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipſius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem eſt ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc eſt, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita eſt E G ad C H; & ſicut G B TAB. XXXIX. Fig. 1.

ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quam duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ ſimul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque E G & C H ſimul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipſius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hiſce vero minor etiam eſt arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H ſimul cum triente ipſius E G majores omnino ſunt eodem arcu C G. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum.

* per præced.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

Problema I. Prop. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

MInorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem vero quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majus eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium

62116'

TAB. XXXVIII.

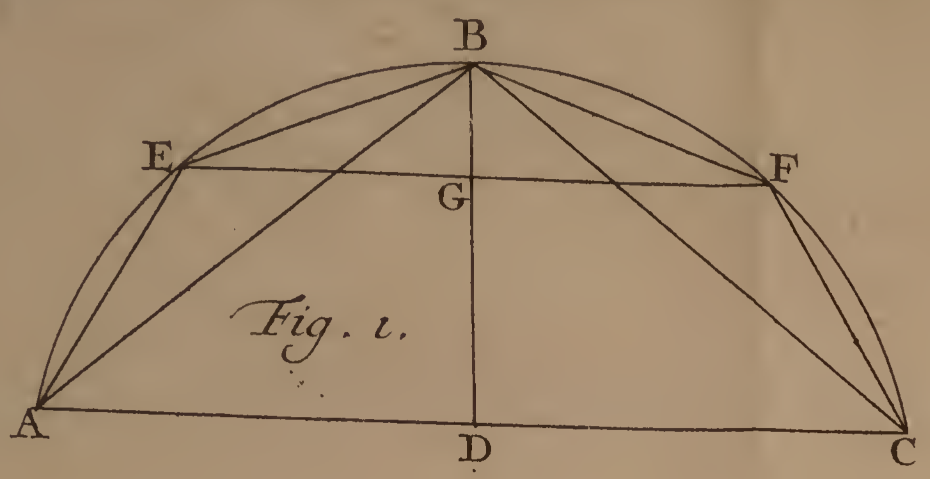


Fig. 1.

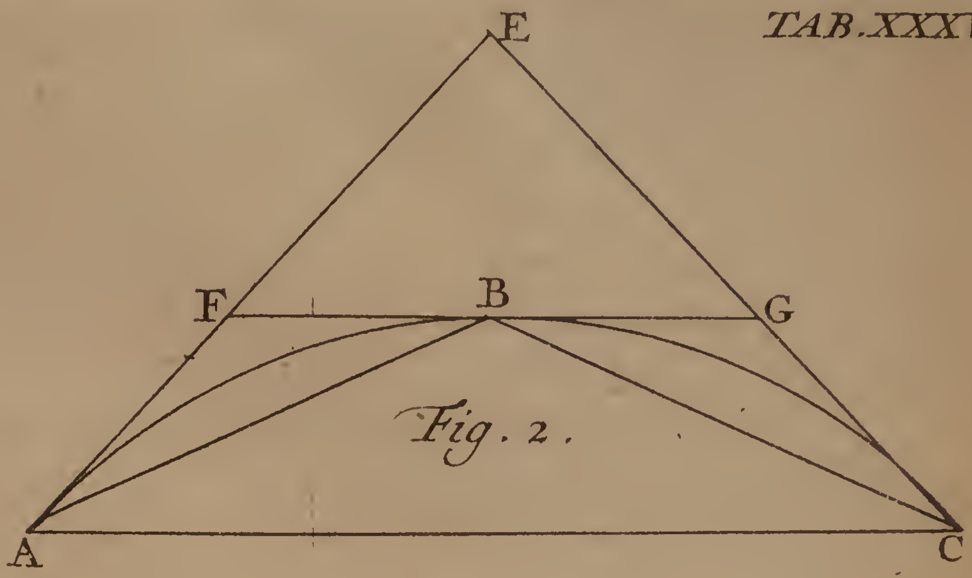


Fig. 2.

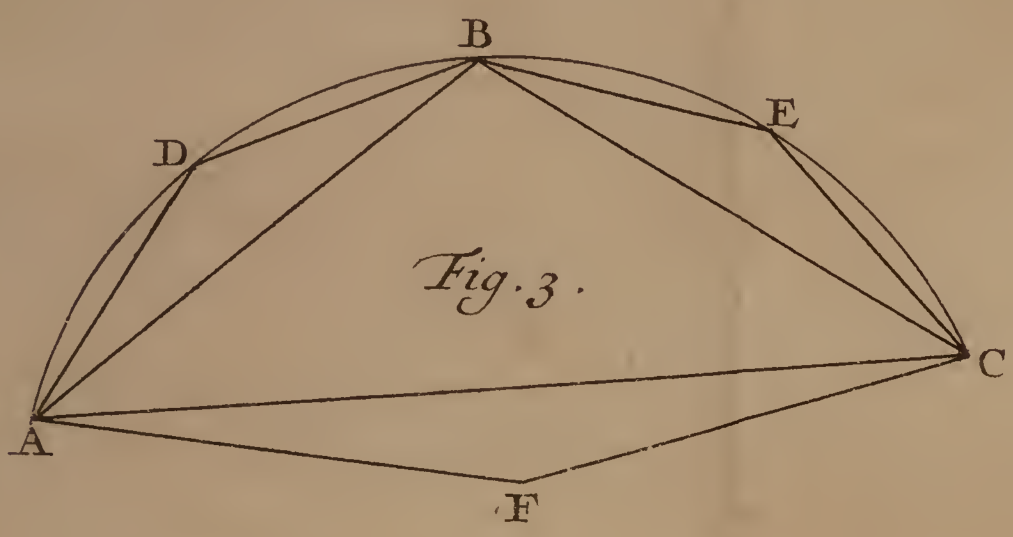


Fig. 3.

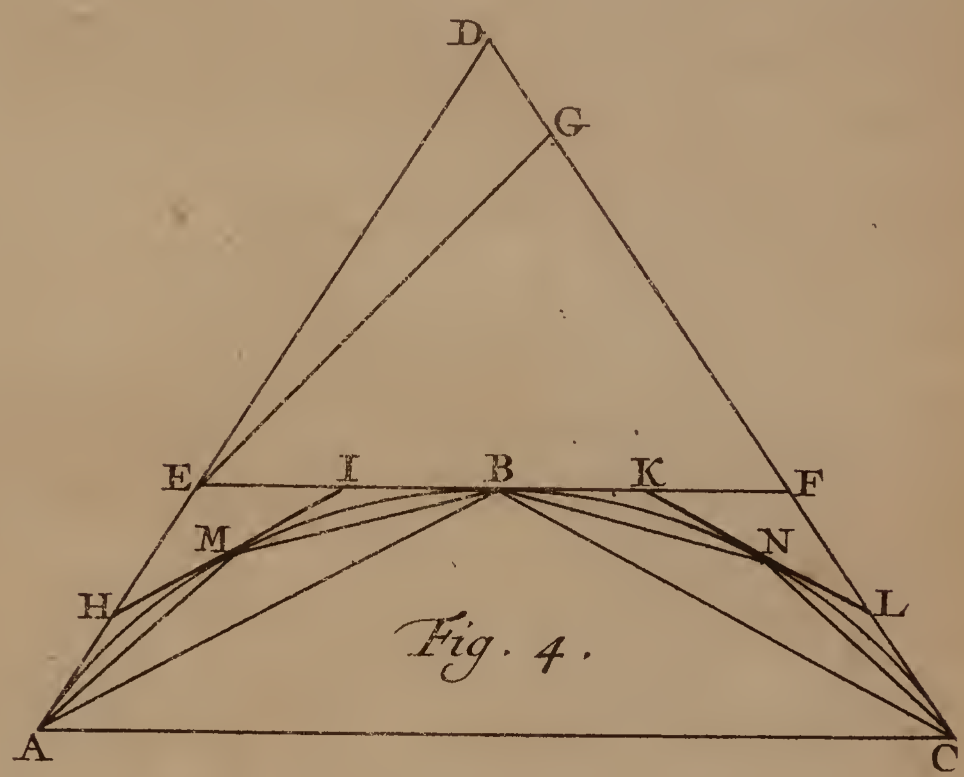


Fig. 4.

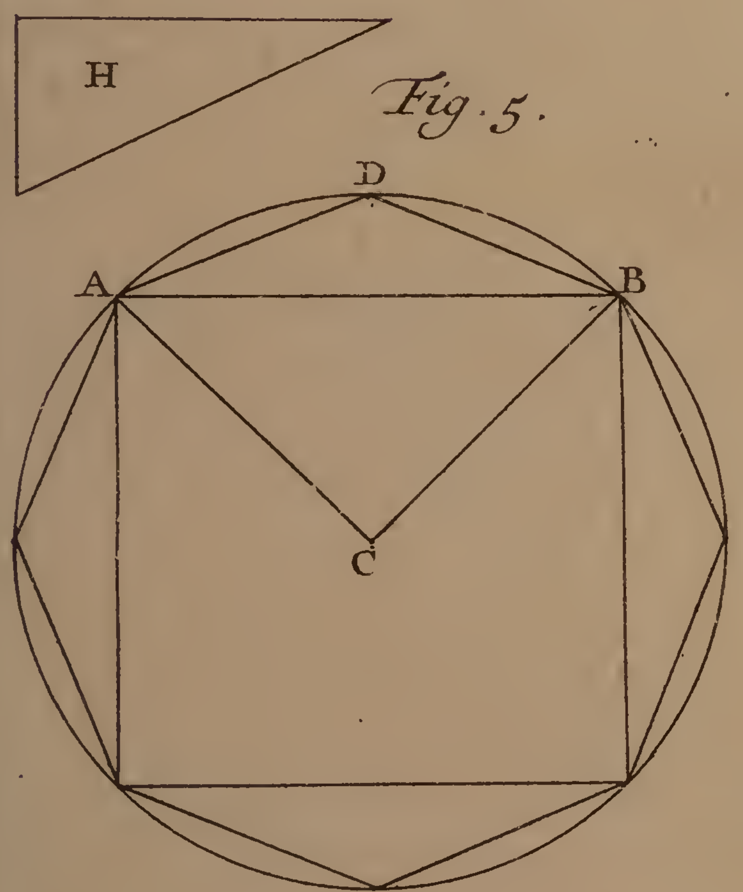


Fig. 5.

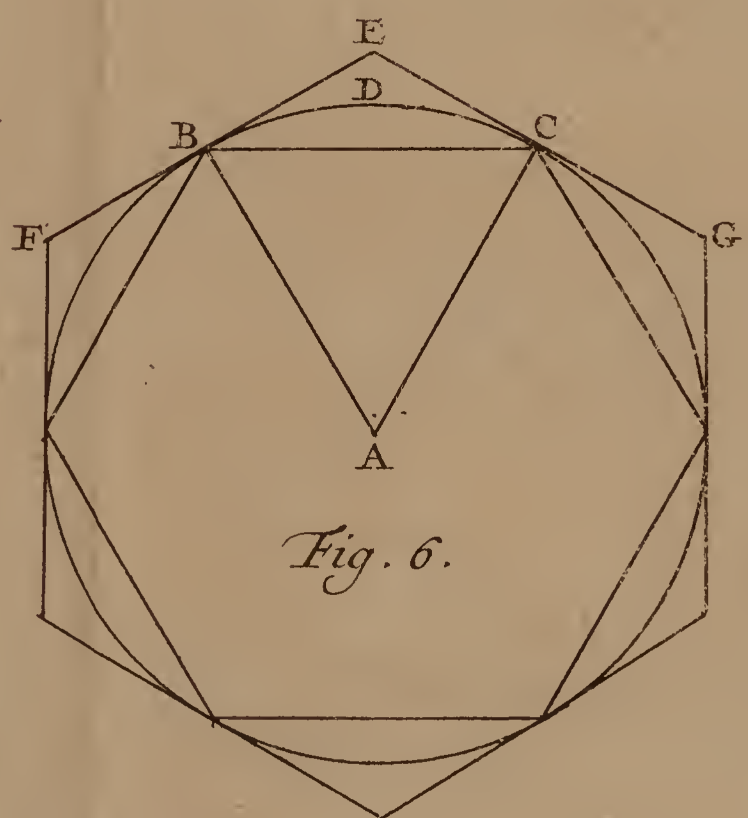


Fig. 6.

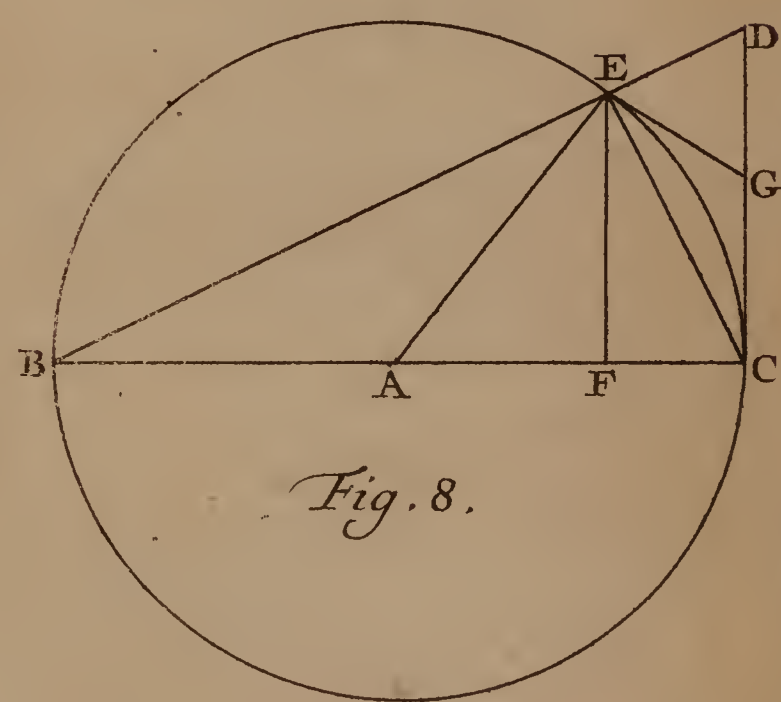


Fig. 8.

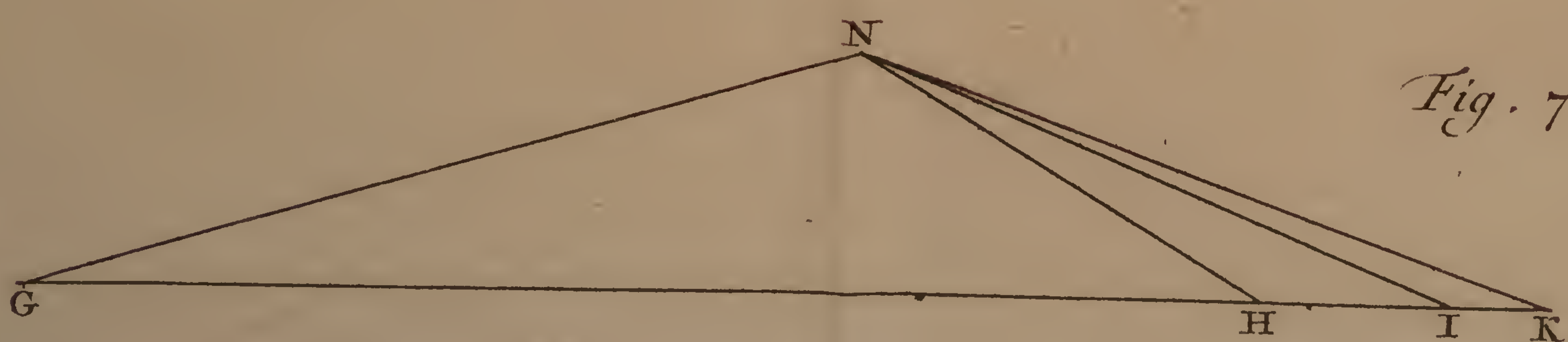
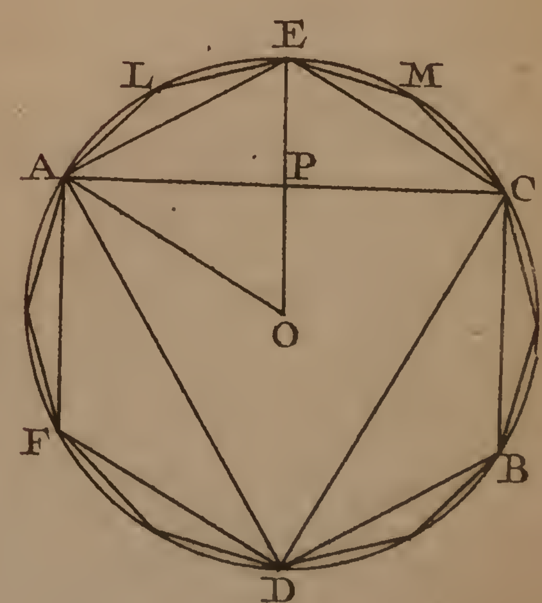


Fig. 7.



$62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{7}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omnino major erit circuli peripheria *. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit. * *per 7. huj.*

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{7}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{7}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{7}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{7}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum. * *per 9. huj.*

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693 : cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ : & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318250. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus

additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & ſexagecuplum ipſarum, hoc eſt 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod ſi verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inſcripti quidem latus, calculo Ludolphi Colonienſis, Arithmetici nobilis, inventum eſt partium 5817764091268491 9 non unâ amplius, ſubtenditurque duobus ſcrup. primis; circumſcripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni ſubduplo laterum numero inſcripti, quod eſt 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 628318530717958 4; minor autem quam 628318530717958 9, qualium radius 100000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inſcripti circumſcriptique polygoni iſtius lateribus, invenietur tantum majorem eſſe peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum eſſe à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita ſe habet, ſemperque evenire neceſſe eſt quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ poſtea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

Problema II. Prop. XI.

Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Oſtenſum eſt ſuperius, quod octo inſcripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora ſunt peripheriâ dimidiâ. In conſtructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam ſi quatermilleſima diametri pars accedat longitudini ſic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod ſic fiet manifeſtum. Quarum partium radius eſt 10000, earum latus dodecagoni inſcripti circulo eſt amplius quam 5176$\frac{1}{3}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui ſi addantur partes 5, hoc eſt, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem eſſe circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem

tem dodecagoni inſcripti facile invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{100}$ diametri.

A L I T E R.

Eſto datus circulus cujus B C diameter. Dividatur ſemicircumferentia B C bifariam in D. reliqua vero trifariam in E & F. Et jungantur D E, D F, quæ ſecent diametrum in G & H. Erit trianguli G D H latus alterum una cum baſi G H quadrante B D exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri B C. Sciendum eſt enim fieri D G vel D H duobus inſcripti dodecagoni lateribus æquales. G H autem lateri dodecagoni circumſcripti. Unde quidem junctas D G & G H majores eſſe conſtat quadrante B D. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inſcripti cum quatuor lateribus circumſcripti majora ſunt peripheriâ totâ, ideo ſumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inſcripti cum latere uno circumſcripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inſcripti dodecagoni minus eſt quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc eſt, G D, minor quam 103528. Circumſcripti autem dodecagoni latus minus eſt partibus 53590, ipſa nimirum G H. Itaque junctæ una D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D conſtat ex præcedentibus majorem eſſe quam 157079. Ergo differentia minor eſt quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C. TAB. XXXIX. Fig. 2.

A L I T E R.

Tribus ſemidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inſcripti quadrati; compoſita ſemicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{18000}$ diametri brevior ſit. Latus quadrati eſt majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum eſt facile demonſtratur.

Vel

Vel potius ſex ſemidiameſtris addatur ⅐ dicti lateris quadrati inſcripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

Problema III. Prop. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem ſumere.

Tab. XXXIX. Fig. 3. Eſto datus circumferentiæ arcus C D, primum quadrante minor, cui rectam æqualem ſumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, ſitque ſubtenſæ C D æqualis recta F G. Duabus vero C E, E D, quæ ſubtendunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipſi F H jungatur H I triens exceſſus G H. Erit tota F I arcui C D æqualis ferè: adeo ut unâ ſui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura ſit, etiamſi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam ſi fuerit datus non major peripheriæ ſextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ ſui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem eſſe arcubus rectas eo modo inventas conſtat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ eſt oſtendendum.

Primum itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc eſt, F G, latus quadrati circulo inſcripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inſcripti octogoni, ideoque major quam 76536. Eſt autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare exceſſus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur, minor eſt quam 157080. Itaque minus ab hoc diſcrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipſa eſt 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipſius F I.

Si vero ſextans peripheriæ ſit arcus C D, erit recta C D, hoc eſt, F G, latus hexagoni inſcripti, ideoque partium 10000, & C E vel E D latus dodecagoni, ac proinde major

jor quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{3}{4}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, ſextans peripheriæ, minor eſt quam 10472. Ergo deficiunt lineæ F I partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{6000}$ F I. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus eſt in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimenſione uti voluerimus; ſed numero pares: Earumque partium ſubtenſis ſimul ſumptis adjungendus eſt triens exceſſus quo ipſæ ſuperant aggregatum earum quæ arcubus duplis ſubtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſub duplo laterum numero.

In circulo cujus centrum A, radius A B, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri B C; & latus circumſcripti ſimilis polygoni D E ipſi B C parallelum. Ergo producta A B tranſibit per D, & A C per E. Et ſi ducatur C F ipſi A B ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſub duplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, B C mediam eſſe proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis A B. Et quoniam eſt ut E D ad C B, ſic D A ad A B, hoc eſt, D A ad A G; ſicut autem D A TAB. XXXIX. Fig. 4.

ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos ſimiles D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonſtrandum.

L E M M A.

TAB. XXXIX. Fig. 5.

Eſto linea B C diviſa æqualiter in R; & inæqualiter in F, ſitque ſegmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique ſimul B C, C F; B M vero utrique B C, C R. Dico majorem eſſe rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipſi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur M O ipſi R F æqualis eſt, (nam hoc ex conſtructione intelligitur) erit P O tripla ipſius F R. Sed & B M tripla eſt B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, ſic B M ad P O. Major autem eſt B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F: & per converſionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales ſunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per converſionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc oſtendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam compoſita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc eſt, quam ratio O B ad B P. Major autem erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propoſitum.

T H E O R. XI. P R O P. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor eſt minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum ſimilium, quorum alterum ordinate circulo inſcriptum ſit, alterum circumſcriptum.

ptum. Et circulus minor eſt polygono iſtis ſimili cujus ambitus majori mediarum æquetur.

Eſto circulus B D, cujus centrum A. Et inſcribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, ſimileque circumſcribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ ſint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem eſſe rectâ X. Et ſi fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, ſimile autem ſit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli P E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inſcripti circumſcriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C ſecabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriuſque polygoni angulos C & K bifariam ſecet, nam hoc ab eadem recta fieri conſtat; & jungatur C E. Ipſi autem C E ponatur æqualis C F; ſitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inſcripti latus eſt C E ſive C F, talis circumſcripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum triente C G ſimul majores erunt arcu E C *. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C. TAB. XXXIX. Fig. 6. * per 13. huj. * per 9. huj.

Et quoniam ſe habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc eſt, utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel ſumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F una cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc eſt, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem eſt ratio R B ad B F quam triplicata ejus, quam habet utraque ſimul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad * per lemma præc.

 C F,

C F, hoc eſt, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita eſt cubus R B ad id quod fit ex quadrato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus eſt rectangulum ſub R B, B G, in F C; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt F G, major quam quo media minimam, hoc eſt, quam F R. Major autem eſt F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per converſionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B, quam C R ſeu R B ad B G: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad ſolidum ſub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc eſt, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Eſt autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc eſt rectangulum ſub G C, R B, quia proportionales ſunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum ſub G C, R B, hoc eſt, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim eſt C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F ſeu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita eſt P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc eſt, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc eſt, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, ſeu A E, hoc eſt, ut R C ad E K, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi R B ad cubum S, hoc eſt, ratio triplicata

R B

R B ad S, quam R C ad E K. Eſt autem S major oſtenſa arcu E C. Ergo omnino major erit ratio triplicata R B ſeu R C ad æqualem arcui E C, quam R C ad E K. Sicut autem R C ad arcum E C, ita eſt perimeter polygoni B C D L, hoc eſt, linea Z ad circumferentiam circuli B D; Et ſicut R C ad E K, ita perimeter polygoni B C D L ad perimetrum polygoni H K M N, hoc eſt, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam B D, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eſt rationi Z ad T. Itaque major eſt ratio ipſius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonſtrandum.

Sciendum eſt autem ipſam X minorem eſſe duabus tertiis Z & triente T: hoc eſt, duabus tertiis perimetri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundum Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam.

Jam vero & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo B D majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D ſicut X ad circumferentiam B D. Eſt autem X major oſtenſa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonſtrandum.

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

Theor. XII. Prop. XV.

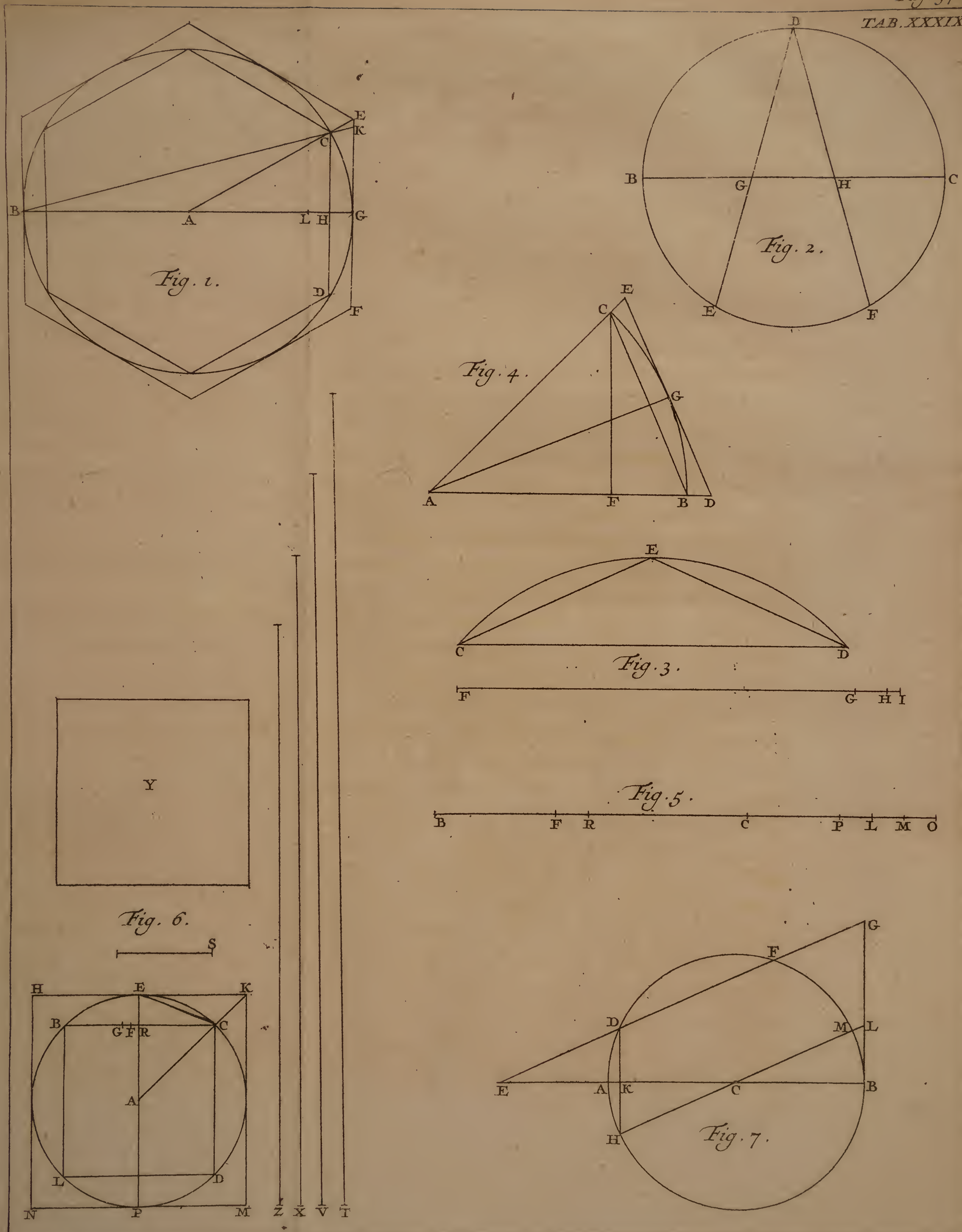
SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem.

Tab. XXXIX. Fig. 7. Eſto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem eſſe arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti vero B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus E D æquale eſt lateri H C, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus D K lateri K H. Itaque C A ſecat bifariam ipſam D H, itemque arcum D A H. Arcus igitur D H ſive huic æqualis F M duplus eſt ad arcum A H. Ipſi autem A H æqualis eſt arcus M B. Igitur arcus F B triplus erit ad arcum A H. Porro quoniam H K ſinus eſt arcus H A, ejuſdemque tangenti æquatur L B, erunt duæ tertiæ H K & triens L B ſimul majores arcu A H *. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla H K, hoc eſt, H D ſive G L una cum L B major arcu A H triplo, hoc eſt, arcu F B. Apparet igitur totam G B arcu F B majorem eſſe.

* per 9. huj.

Hoc

TAB. XXXIX.



Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet. Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimis & contemplatione digniſſimum.

Theor. XIII. Prop. XVI.

Si diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem.

Eſto circulus, cujus diameter A B; quæ producatur, & ſit A C ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta C L, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam B L arcu B E minorem eſſe. Junganturenim A E, E B, poſitâque A H ipſi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit E G diametro A B ad angulos rectos, E D vero tangenti B L. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus H A E, erunt anguli inter ſe æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul H E A, K E B. Verùm duo quoque iſti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter ſe æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur iſoſceles eſt K B E, ejuſque latera æqualia E B, B K. Eſt autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia eſt quâ B E excedit E G. Porro quoniam eſt A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ ſimul A G, A B majores duplâ A E*. Ideoque A E, hoc eſt, A H minor quam dimidia utriuſque ſimul

TAB. XL. Fig. 1.

*25.5. Elem.

ſimul A G, A B; hoc eſt, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A vero dimidiâ A G major eſt. Ergo ſi addatur A C ad A G, erit tota C G major quam tripla ipſius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita eſt E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per converſionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K exceſſus ipſius E B ſupra E G. Ergo K L minor eſt triente dicti exceſſus. K B autem æqualis eſt ipſi E B ſubtenſæ. Ergo K B unà cum K L, hoc eſt, tota
* per 7. huj. L B omnino minor erit arcu B E*. Quod erat demonſtrandum.

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L ſemper minor arcu abſciſſo B E.

Porro uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt.

Theorema XIV. Propos. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.

TAB. XL. Fig. 2. Eſto circuli portio A B C, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit B D, quæ bifariam ſecetur in E. Itaque oſten-

oſtendendum eſt primò centrum gravitatis portionis A B diſtare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro ſitum ſit, alibi oſtendimus. Ducatur per E recta baſi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L baſi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, conſtituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio ſemicirculo minor eſt, conſtat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra ſegmentum A F G C, atque inſuper ſpatia quædam A F I, L G C. Alterum vero rectanguli K L ſemiſſem K G complecti ſegmentum F B G unà cum ſpatiis F B K, B G H. Quæ ſpatia quum ſint tota ſupra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum ſupra eandem ſitum erit. Eſt autem E punctum in ipſa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur ſpatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & ſpatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum eſt infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex ſpatiis hiſce & dicto ſpatio B F I L G B compoſitæ, quæ eſt portio ipſa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri neceſſe eſt, ideoque infra E punctum.

Eadem verò diameter B D ſecetur nunc in S, ita ut B S ſit ſeſquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus diſtare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta baſi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum vero latus æquale S P. Et occurat baſi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale eſt rectangulo B S P, hoc eſt, ei quod ſub B S & latere recto parabolæ continetur, tranſibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, ſed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim oſtenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale eſt rectangulo B L P, quadratum vero TAB. XL. Fig. 3.

M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod ſub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri neceſſe eſt, eâdemque ratione partem B G. Rurſus quia rectangulum B D P æquale eſt quadrato D A; rectangulum verò ſub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur ſpatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota ſint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav. eſt in ipſa F G, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit ſupra rectam F G. Sed ſupra hanc ſitum quoque apparet centrum grav. ſpatiorum F M B N, B Q G, quum tota ſint ſupra ipſam F G. Ergo & ſpatii ex hiſce duobus & A F M B Q G C compoſiti, hoc eſt, portionis circuli A B C centrum grav. ſupra lineam F G reperietur: quumque ſit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat oſtendendum.

* 8. *lib.* 2. *Archim. de Æquipond*

Theor. XV. Propos. XVIII.

Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin.

Sit

SIt portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum A B C. Diameter autem portionis ſit B D; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, B F, centrum E. Oſtendendum eſt primo, portionis A B C ad triangulum inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis A B C centrum grav. punctum G, & ſecetur D F in H, ut ſit H D dupla reliquæ H F. TAB. XL. Fig. 4.

Quoniam igitur F B eſt dupla E B; D B autem minor quam dupla G B; Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per converſionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla eſt) quam F D ad E G. Igitur F D major eſt quam dupla E G. Ipſius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major eſt quam ſeſquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita eſt portio A B C ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipſis & Circuli quadratura *. Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum A B C quam ſeſquitertia. * *Vide ſupra p. 324.*

Quod autem ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R ſit ſeſquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ H D ad E G, ut modo dictum fuit; minor autem ſit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum ratio quam H D ad E R, ſive quam H D quinquies ſumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum ſit æqualis duabus tertiis D F) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipſius D B, ſi quinquies ſumatur, æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc eſt, duplæ totius E B atque inſuper triplæ E D. Igitur appa- * *per præced.*

ret portionem A B C ad inſcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam ſeſquitertiam D F ad duplam E B, hoc eſt, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XVI. Propos. XIX.

Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo.

Tab. XL. Fig. 5.

Eſto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et ſit arcus B A ſemicircumferentiâ minor, cui ſubtenſa ducatur B A, ſinus autem A M: quæ nimirum diametro F B ſit ad angulos rectos. Porro ipſi A M ſit æqualis recta G H, & G I æqualis ſubtenſæ A B. Exceſſus igitur eſt H I; cujus triens I K ipſi G I adjiciatur. Oſtendendum eſt primo, arcum A B totâ G K majorem eſſe. Hoc autem ex Theoremate 7. eſt manifeſtum. At cum ipſi G I additur IO quæ ad I K trientem ipſius H I rationem habeat, quam quadrupla G I una cum G H ad duplam G I cum tripla G H. Dico totam G O arcu A B majorem eſſe. Conſtituantur enim ſuper lineis G H, H I, IO, triangula quorum communis vertex ſit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum vero A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I eſt ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; ſumptis conſequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla eſt I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad ſexcuplam G I cum noncupla G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla

utriuſ-

utriuſque I G, G H ad ſexcuplam I G cum noncupla G H: vel ſumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum ſimul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Eſt autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc eſt, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter ſimiles triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc eſt, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor eſt ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. * *per praecd.* Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc eſt, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale eſt triangulo A E B. Quod ſic oſtenditur. Triangulum enim G H L æquale eſt triangulo D A B, quoniam baſes & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis eſt rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus ſimul triangulis D A E, D B E, hoc eſt, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari neceſſe eſt, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum ſibi inſcriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus ſectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis eſt radio D B. Ergo baſis G O major erit arcu A B. Quod erat oſtendendum.

Ex his autem manifeſtum eſt de tota quoque circumferentia pronunciari poſſe, quod, *Si circulo inſcribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius ſit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, compoſita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem vero majori perimetro ſi linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem ſeſe habeat, ſicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, compoſita circumferentiam circuli excedet.*

PROBLEMA IV. PROPOS. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ ſubtenduntur.

TAB. XL. Fig. 6. Eſto circulus centro D, cujus diameter C B, & ſit arcus B A ſextans circumferentiæ, cui ſubtenſa ducatur A B, itemque ſinus A M. Poſitâ igitur D B ſemidiametro partium 100000, totidem quoque erit ſubtenſa B A. A M verò partium 86603 non unâ minus, hoc eſt, ſi una pars ſive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito. quippe ſemiſſis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti.

Hinc exceſſus A B ſupra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipſi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus eſt minor terminus, quo poſtea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem major quoque terminus ſecundum Theorema præcedens inquirendus eſt.

Tres nimirum ſunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque obſervandum ut minor ſit, idemque in cæteris prout dicetur) ſecundus quadruplæ A B & ſimplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens exceſſus A B ſupra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ ſextans. * Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B ſecundum minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero eſt, cum vero proximus ſit 104719.

* *per præced.*

Sed ex utroque iſtorum alius minor terminus habebitur priore accuratior ſi utamur præcepto ſequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inſpectione dependet.

In-

Inventorum terminorum differentia ſeſquitertia jungatur duplæ ſubtenſæ & ſinui triplo, & quam rationem habet ex his compoſita ad triplam ſeſquitertiam ſeu $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul, ſinus, ſubtenſæque, eandem habeat ſubtenſæ ſupra ſinum exceſſus ad aliam quandam; Hæc ad ſinum addita rectam conſtituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum eſt $261\frac{1}{3}$. Eſtque rurſus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M & ſeſquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique exceſſus A B ſupra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis eſt 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare ſexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ ſunt arcu A B, earum ſexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor eſt quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde conſtat minorem utique eſſe quam triplam ſeſquiſeptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui ſcripſit peripheriam majorem eſſe partibus 314185 qualium rad. 100000.

Eſto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, ſemiſſis lateris quadrati circulo inſcripti, partium 7071068, non unâ minus, qualium radius D B 10000000. A B vero latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad ſimilitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rurſus terminus minor accuratior 7853885. Unde conſtat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitu-

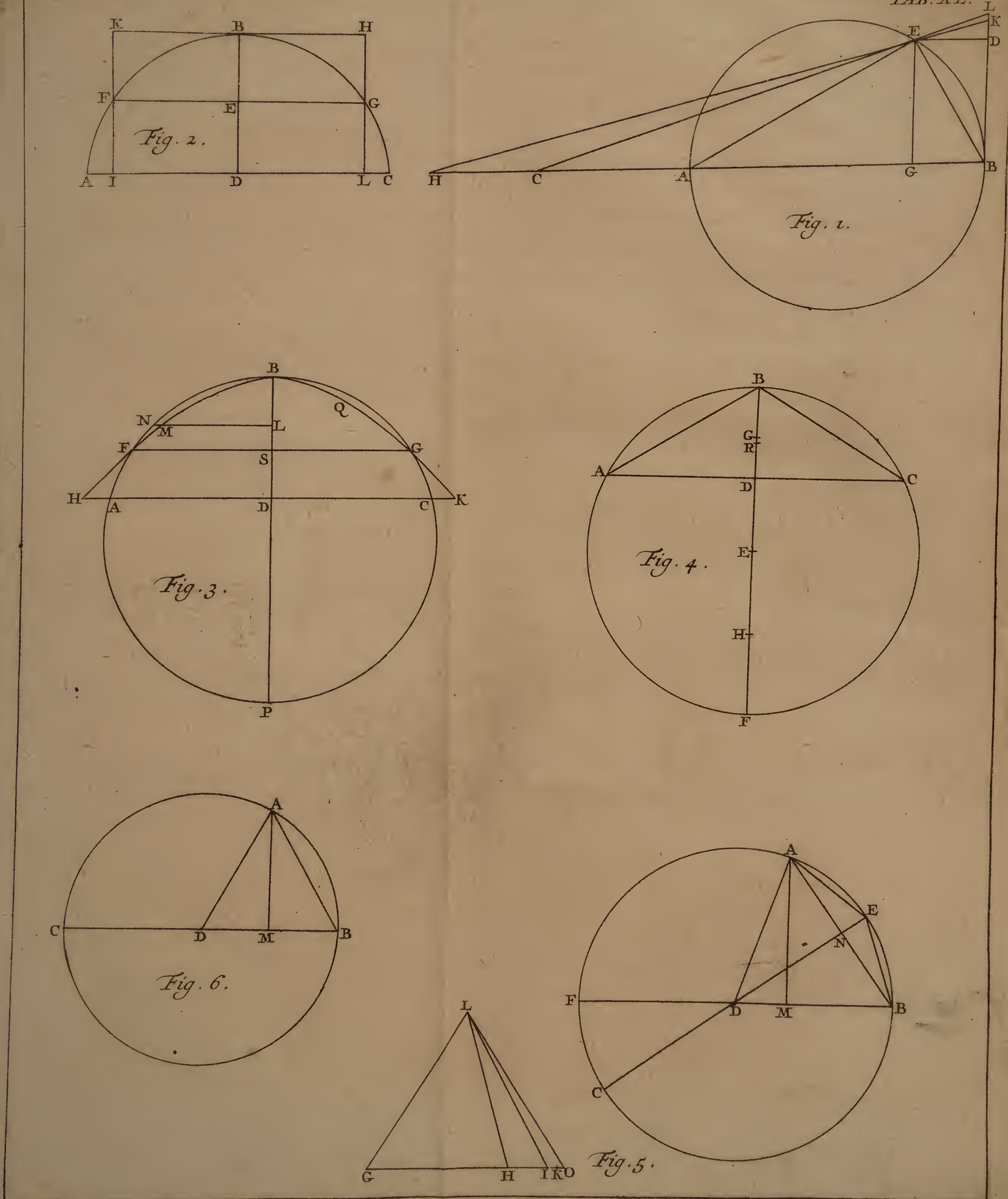
gitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus A B, per ea quæ ſupra oſtendimus, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus ſcrupulis ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

Si vero ea ſit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 382683433, non unâ minus. A B vero latus ſexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius D B 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurſus 392699010. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{77760000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porro ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quàm $3141593\frac{1}{7}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit A M ſemiſſis lateris trigintanguli inſcripti partium 10452846326766, non unâ minus, qualium radius 100000000000000. Et A B latus ſexagintanguli inſcripti 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B ſecundum primum minorem terminum 10471972889195. Secundum majorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538,

TAB. XL.



31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos ſi ex additis inſcriptorum & circumſcriptorum polygonorum lateribus inquirendum eſſet ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex ſexagintangulo inſcripto circumſcriptoque hoc tantum probatur, minorem eſſe rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum noſtro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis ſi quis experiatur ſemper evenire cernet: non ignota nobis ratione, ſed quæ longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo, datis quibuſcunque aliis inſcriptis, arcuum quibus ſubtenduntur longitudo per hæc inveniri queat ſatis puto manifeſtum. Si enim quadrati inſcripti latere majores ſunt, longitudo arcus ad ſemicircumferentiam reliqui inquirenda eſt, cujus tum quoque ſubtenſa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum ſubtenſas inveniri cum totius arcus ſubtenſa data eſt. Atque hâc ratione ſi biſectionibus uti placebit, poterimus ad omnem ſubtenſam, arcus ipſius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoſcere. Utile hoc ad ſinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus ſubtenſâ, etiam ejus qui paulò major minorve ſit ſatis accuratè definiri poteſt.

Christiani Hugenii C. F.

ILLVSTRIVM QVORVNDAM
PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

Probl. I.

Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam.

HOc Archimedes problema reſolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. Compoſitionem autem promiſſam non videtur explicuiſſe, niſi ipſius eſt illa quam Eutocius in vetuſto quodam libro repertam commentariis ſuis inſeruit. Ea vero paraboles & hyperboles interſectione perficitur, uti & illa cujus Dionyſidorus autor eſt, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipſis deſcriptionem requirit. Noſtra autem quam hic conſcribemus anguli triſectionem poſtulat; Et hæc conſtruendi ratio in ſolidis problematibus quodammodo ſimpliciſſima videtur, atque ad uſum maxime accommodata.

TAB. XLI. Fig. 1. Eſto igitur data ſphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data ſit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur ſecari ſphæra plano ſecundum A C diametrum, ſitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur ſemidiametro æqualis utraque harum C H, A E. Et dividatur tota H E in Q, ut ſit E Q ad Q H ſicut S ad T. Ipſi autem M Q æqualis ponatur ad circumferentiam recta A R. Et ei quæ tertiam partem ſubtendit arcus A R, æqualis ſumatur M N. Et

Et per N punctum ducatur planum K L quod diametro C A ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphæram ſic ſecare, ut portio cujus A vertex eſt ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.

Secetur enim ſphæra per centrum M plano B D ipſi K L parallelo, & jungantur K M, M L; & intelligatur conus baſin habens circulum factum ſectione K L, verticem vero M. Et ſicut quadratum C M ad quadratum M N, ita ſit M N ad N O longitudine. Erit igitur per converſionem rationis ut quadratum C M ſive quadr. K M ad quadratum K N (eſt enim quadr. K N exceſſus quadrati K M ſupra quadr. M N) ita linea N M ad M O. Sicut autem quadr. K M, hoc eſt, quadr. B M ad quadr. K N, ita eſt circulus circa diametrum B D ad eum qui circa diametrum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc ſeſe habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus baſis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemiſphæram B C D, hoc eſt, ad conum qui baſin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemiſphæram B C D ſicut M O ad M H. Et invertendo.

* 15. 12. Elem.

* 32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemiſphæra B C D eſt ad ſectorem ſolidum M K C L ſicut ſuperficies illius ſphærica ad ſphæricam hujus ſuperficiem *, hoc eſt, ut M C ad C N †. Erit per converſionem rationis hemiſphæra B C D ad partem ſui quæ remanet dempto ſectore M K C L, ſicut C M ad M N: vel ſumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla ſit ipſius M N poſtea oſtendemus. Fuit autem oſtenſum, quod hemiſphæra B C D ad conum K M L ſicut H M ad M O. Ergo jam hemiſphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque ſimul Q O, O M *, hoc eſt, ad M Q. Quare & per converſionem rationis, erit hemiſphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et ſumptis antecedentium duplis, ſphæra tota ad portionem K C L ut E H

* 42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.

† 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.

* 24. 5 Elem.

ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam eſſe ipſius M N, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N, ita eſt M N ad N O longitudine: Eſt autem Q M æqualis ſubtenſæ arcus A R cujus trienti ſubtenditur M N. Erunt propterea duæ ſimul Q M & N O æquales triplæ M N, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi O N, erit ſola Q M æqualis duplæ N M & ipſi M O. Sed eadem Q M æqualis eſt duabus ſimul his Q O, O M, ergo apparet duplam M N æquari ipſi O Q.

LEMMA.

TAB. XLI. Fig. 2.

SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris A B C in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque interſecent ſubtenſam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.

Quoniam igitur circumferentia B D E dupla eſt circumferentiæ E C, angulus autem huic inſiſtens E A C ad centrum conſtitutus, qui vero illi inſiſtit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc eſt, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc eſt D E ad E F, duplicata eſt rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C ſeu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D ſicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul B D, D E, E C æquari ſubtenſæ B C

atque

atque ipſi E F. quod ſane manifeſtum eſt; nam C E eſt æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utriſque ſimul G H, & F E. Ergo conſtat propoſitum.

Sumpſimus autem arcum B C ſemicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejuſmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quoſvis arcus pertinet, eſtque in ſemicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa.

PROBL. II.

Cubum invenire dati cubi duplum.

AD hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel hoc exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli. TAB. XLI. Fig. 3.

Radio B A ſemicirculus deſcribatur A F C. Sitque arcus A F ſemicircumferentiæ triens, C D vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum interſectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quæſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{2000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim A E ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rurſus quia A E major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota vero A E minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismilleſimam ſui ipſius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte ſui biſmilleſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere A B

Porro ad perfectam conſtructionem, C F quidem uti pri-

 us

us ducenda eſt: A D vero ſic, ut ſubtenſa C D æqualis ſit abſciſſæ E F. Etenim his poſitis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum exiſtere.

Producatur enim C A, & ſit ipſi A E æqualis A G. Propter triangulos ſimiles igitur eſt E C ad C D, hoc eſt, E F ut E A ad A F, hoc eſt, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A ſive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. C F & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A ſimul, hoc eſt, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B ſimul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod ſic oſtenditur. Quadratum enim G B æquale eſt rectangulo C G A & quadrato A B ſeu A F *. Quare addito utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C ſimul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B ſimul æqualia ſunt rectangulo G C A cum quadrato A G, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita eſt quadr. E A ad quadr. A F, hoc eſt, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc eſt, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rurſus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc eſt, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipſam G A, hoc eſt, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc eſt, duplo cubo ex A B. Quod erat demonſtrandum.

* 6. 2. Elem.

Probl.

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.

VEterum Geometrarum ad hoc Problema conſtructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, at non omnes inventione diverſas, uti recte quoque ipſe animadvertit. Heronis enim inventionem ſecuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate poſteriorem nonnulli exiſtiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem conſtructio præ cæteris ſubtilis ibidem extat, quam Fr. Viëta paulò aliter concinnatam ſuo Geometriæ ſupplemento inſeruit. R. Carteſii egregia eſt & nova per paraboles & circumferentiæ interſectionem, cujus demonſtratio legitur in libris Harmonicôn M. Merſenni. Noſtræ autem ſequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam ſecetur in E. Minor autem ſit A B, quæ ſic conſtituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque poſitionem habeat G F, abſcindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel ſæpius tentando aſſequemur, vel deſcriptâ hyperbole, uti poſtea oſtendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas eſſe B G, C F. TAB. XLI. Fig. 4.

Sit enim E K ipſi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem eſt linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc eſt unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta

jecta eſt linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale eſt quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E ſeu E A æquale eſt quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare ſicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita eſt D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc eſt, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc eſt, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum eſt, etiam deſcriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda ſit, hinc conſtabit: Factum enim ſit, ut E F, E G ſint æquales, & ſumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N eſt ad hyperbolem quæ deſcribetur per D punctum circa aſymptotos F A, A G *. Sed idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G eſt æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum eſt punctum N ad interſectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum eſt. Datur igitur poſitione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compoſitio manifeſta eſt.

* 8. 2. *Conic.*

A L I T E R.

TAB. XLI. Fig. 5.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus deſcribatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G ſint inter ſe æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus A C, A B duas medias inventas eſſe B G, G L.

Producatur enim G E uſque ad circumferentiam in K, & jungatur A K, eique parrallela ducatur B O. Similes itaque ſunt trianguli A E K, B H O; & quia A E æqualis E K, etiam B H, H O æquales erunt. Sed & H G, H D inter ſe æquales ſunt. Igitur tota O G æqualis B D, hoc eſt,

eſt, diametro A C vel L K; & ablatâ communi L O, relinquentur æquales L G, O K. Eſt autem rectangulum K G L æquale rectangulo A G B. Ergo ut K G ad G A ita B G ad G L. Sed ut K G ad G A ita eſt O G ad G B & ita reliqua O K, hoc eſt, L G ad B A. Ergo ut O G, hoc eſt, A C ad G B ita B G ad G L & G L ad A B. Quod erat demonſtr. Hujus autem conſtructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet.

ALITER.

Sint datæ A B & Q quibus duas medias proportionales invenire opus ſit; A B autem quam Q major. TAB. XLI. Fig. 6.

Dimidiæ Q ſumatur æqualis A F, & productâ A B utrimque, ſit ipſi æqualis B R. Erigatur autem ad A B perpendicularis F C, & ipſi R A æqualis ponatur R C: & jungatur B C, & huic parallela ducatur A E. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quouſque poſitionem habeat C D, faciens C E æqualem A D. Dico inter A B & Q duas medias eſſe C E, E D.

Jungatur enim C A. Igitur quia æquales ſunt R A, R C & angulus C F A rectus, erit R A ad A C ut A C ad duplam A F, hoc eſt, Q: ac proinde quadratum A C æquale rectangulo ſub R A & Q. Quadratum autem A C cum quadrato A D & duplo rectangulo D A F, hoc eſt, ſub D A & Q contento, æquatur quadrato D C*. Igitur quadratum D C æquabitur quadrato D A unà cum rectangulis ſub D A, Q, & ſub R A, Q, hoc eſt, unà cum rectangulo ſub D R & Q. Quadratum autem D B æquale rectangulo R D A & quadrato A B*. Igitur ut quadratum D B ad quadratum D C, hoc eſt, ut quadr. A B ad quadr. A D, (eſt enim ut D B ad D C ſic A B ad E C ſive A D) ita erit rectangulum R D A cum quadrato A B ad rectangulum ſub R D, Q, cum quadrato A D. Quamobrem & rectangulum R D A ad rectangulum ſub R D, Q, ſicut quadr. A B ad quadr. A D*. Eſt autem ut quadratum A B ad quadr. A D, ita A B ad E D longitudine: nam ut B A ad A D ſic

* 12. 2. Elem.

* 6. 2. Elem.

* 19. 5. Elem.

ſic C E, hoc eſt, ipſa A D ad E D. Ergo rectangulum R D A ad rectangulum ſub R D, Q, hoc eſt, A D ad Q ſicut A B ad E D. Et permutando & invertendo, B A ad A D ut E D ad Q. Atqui ut B A ad A D, hoc eſt, C E ita C E ad E D. Ergo ut A B ad C E ita C E ad E D, & E D ad Q. Itaque inter A B & Q mediæ proportionales ſunt C E, E D. Quod erat oſtendendum.

PROBL. IV.

Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat.

TAB. XLI. Fig. 7. Eſto quadratum B A cujus productum ſit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B ſit æquale quadratum E G; & ſuper B G diametro deſcribatur ſemicirculus B C G ſecans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem eſſe ipſi K. Jungantur enim C G, G D; ſitque C H ipſi B G ad angulos rectos.

Quia igitur ſimiles ſunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter ſe æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipſi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc eſt, quadrata D C, C H, & H G æqualia quadrato D G*, hoc eſt, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde vero quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato E G, hoc eſt, quadratis ex K & E B*. Quadratum autem E B æquale eſt quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipſi K. Quod erat oſtendendum.

*47.1.Elem.

* Ex conſtruct.

Demonſtratio hæc ab ea diverſa eſt quæ apud Pappum Alex. legitur lib 7. prop. 72. Conſtructio verò non differt. Cæterum eandem ad caſum quoque ſequentem pertinere invenimus.

PROBL.

PROBL. V.

DAto quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla.

Datum ſit quadratum A B, productaque latera A F, A E. Data verò linea K, non minor duplâ A B diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipſi K æqualem. TAB. XLI. Fig. 8.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, conſtructio manifeſta eſt; tunc enim per B ducenda eſt quæ ſit ipſi A B ad angulos rectos, eaque propoſitum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, conſtructio iiſdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonſtratio quoque eſt eadem.

Quod autem circumferentia B C G ſecabit productam A F hinc manifeſtum eſt. Etenim quia K major eſt duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc eſt, radius deſcripti ſemicirculi major quam E B vel B F; unde neceſſe eſt rectam A C ſecari à circumferentia B C G.

PROBL. VI.

RHombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat.

Sit datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit ipſi K æqualis. TAB. XLII. Fig. 1.

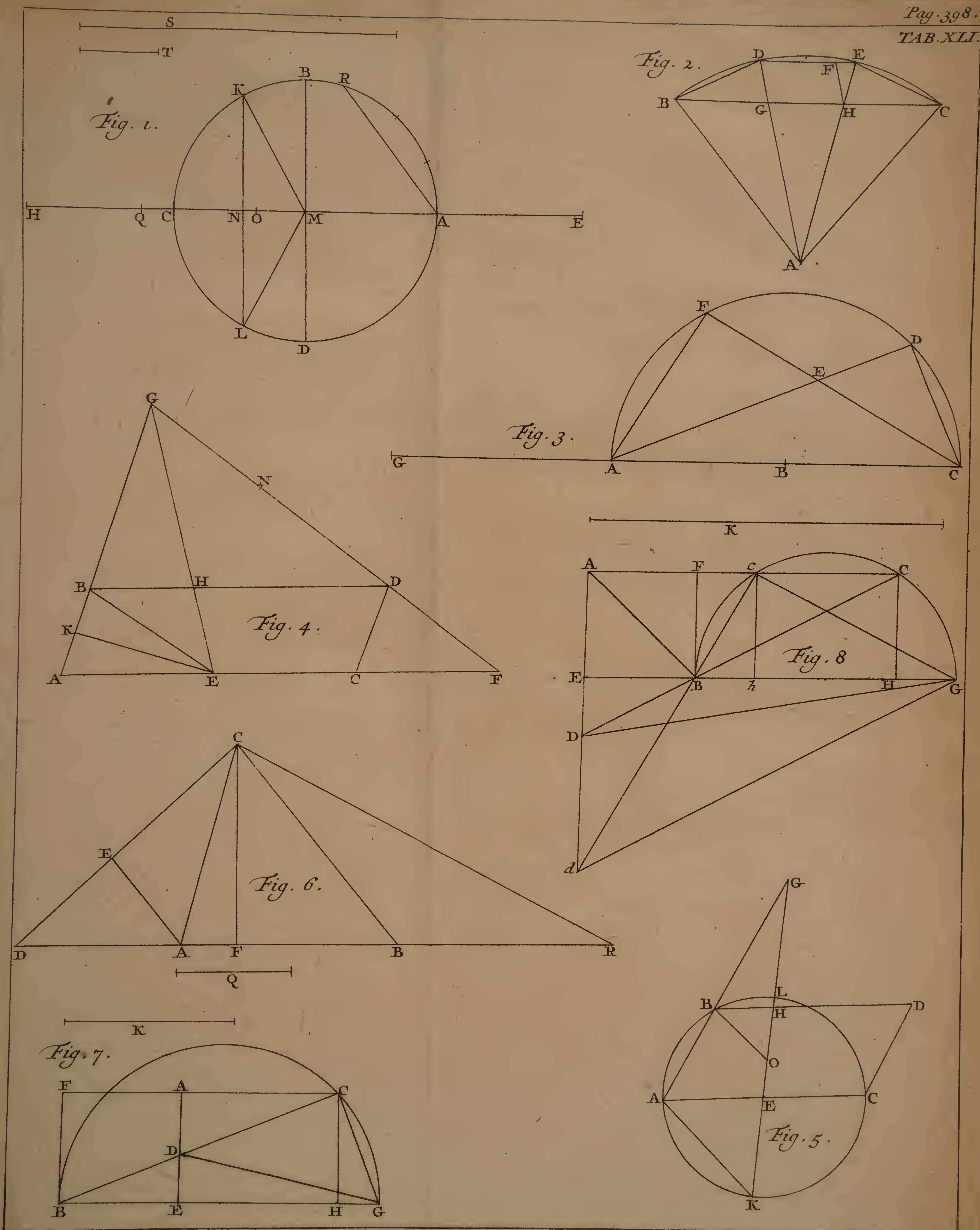
Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B ſit æquale quadratum A G. Et ſuper B G

 cir-

circumferentiæ portio deſcribatur quæ capiat angulum ipſi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo oſtendetur. Itaque ad interſectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem eſſe. Quod autem circumferentia deſcripta latus F A productum ſecabit, ſic primùm oſtenditur. Ducatur A N ita ut ſit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A ſimilis eſt, ac proinde iſoſceles quoque. Quare ſi ſuper B N circumferentia deſcribatur quæ capiat angulum B F A, ea continget latus F A in A puncto. Sed B G major eſt quam B N: nam quadratum A G majus eſt quadrato A N vel A B, cum ſit æquale quadratis ex K & A B. Quare A G cadet extra triangulum iſoſcelem B A N. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper B G deſcriptam capientemque angulum ipſi B F A vel B A N æqualem ſecare lineam F A C. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur B M, G C, & cadat in B E ex A perpendicularis A L.

Quia igitur quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: atque idem quadratum A G æquale quadratis A B & B G minus duplo rectangulo G B L, hoc eſt, minus rectangulo G B N; erit K quadratum æquale quadrato B G minùs rectangulo G B N, hoc eſt, rectangulo B G N. Eſt autem ut rectangulum B G N ad rectang. B E, G N, ita B G ad B E. Ergo ut B G ad B E ita quoque quadratum K ad rectangulum G N, B E, hoc eſt, rectangulum G B E minùs rectangulo N B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectang. C B D, quoniam G B ad B C ut D B ad B E propter triangulos ſimiles G B C, D B E; habent enim angulum ad B communem, & angulus B C G ipſi B E D eſt æqualis. Item rectangulo N B E æquale eſt quadratum A B quia propter triangulos ſimiles eſt N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Eſt autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C; quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M

eſt


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

eſt in circulo, ſunt anguli C G B & B M C ſimul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter ſimilitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter ſe æquales habent. Verum & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli ſimiles ſunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minus quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale eſt rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minus quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Eſt itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita eſt rectang. G B E, hoc eſt, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E compoſita eſt ex ratione D B ad B E, hoc eſt, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E ſive B F, hoc eſt, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc eſt, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale eſt: Et D C ipſi K longitudine. Quod erat demonſtrandum.

Probl. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppoſitum angulum tranſeat. Oportet autem datam non minorem eſſe quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.

TAB. XLII. Fig. 2.

Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E; data autem ſit recta K cui æqualem ponere oporteat C D, per angulum B tranſeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet eſſe quam S R. Si vero æqualis, factum eſt quod proponebatur. Sed ponatur K major data eſſe quam S R. Erit jam in ſchemate hoc prout propoſitum eſt conſtructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonſtratio autem nonnihil diverſa. Etenim hoc primò aliter oſtenditur quod circumferentia ſuper B G deſcripta ſecat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut ſit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Eſt itaque triangulus B S T triangulo B F S ſimilis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipſi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S eſt quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communi altitudine B T, erit rectangulum ſub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc eſt quadrato L T. Quia vero propter triangulos ſimiles eſt T B ad B S ut B S ad B F ſive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater ſumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus eſt quam R S quadr.) unà cum eodem quadrato L B æquale eſt quadrato L G, uti ex conſtructione manifeſtum eſt, quia ſcilicet quadr. A G æquale poſitum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus eſt quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia ſuper B G deſcripta capax anguli E A F ſecabit rectam A S; nam ſimilis circumferentia, ſi ſuper B T deſcribatur, ea continget ipſam in S puncto, quoniam angulus

gulus B S T ipſi E A F æqualis eſt triangulusque B S T æquicruris.

Porrò quod C D ipſi K æqualis eſt, ſic demonſtrabitur. Quia quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita eſt quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectanctulo E B L; ſingula enim ad ſingula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos ſimiles C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale eſt quadratum A B, quia propter triangulos ſimiles ut S A, hoc eſt, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hiſce duobus æquale eſt rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita eſt quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porrò eodem modo ut in caſu præcedenti concludemus lineam D C ipſi K æqualem eſſe, repetendo iſta: Sicut autem G B ad B E, &c.

Utrumque præcedentium Aliter.

SIt datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data ſit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F ſit datæ G æqualis. TAB. XLII. Fig. 3.

Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B ſit æquale quadratum A H, & ducatur H E ipſi B A parallela. Et A E ipſi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipſi G æqualem eſſe.

Quod autem ad H E poni poteſt A E ipſi G æqualis, hinc

hinc manifeſtum eſt. Etenim quadratum A H majus eſt quadratis A X & X H, quum ſit angulus A X H obtuſus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B ſeu H X & G. Itaque quadratum G ſeu A E majus eſt quadrato A X. Unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H & X.

Producatur B D & ponatur ipſi æqualis D R. & ſit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis eſt D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus, quum ſit in ſemicirculo, nam tres hæ æquales ſunt D B, D A, D R. Parallelæ autem ſunt B Q, H E K, ergo & anguli ad P recti, & erit H P æqualis P K. Eſt itaque quadratum A H æquale quadrato A E unà cum rectangulo H E K*. Sed idem quadratum A H æquale eſt etiam quadratis ex G ſeu A E, & ex A B. Itaque quadr. A B æquale erit rectangulo K E H. Ac propterea K E ad A B ut A B ad E H. Verum ut K E ad A B ſeu Q A ita eſt E M ad M A: & ut A B ad E H ita A F ad F E. Igitur E M ad M A ut A F ad F E: Et proinde E A ad A M ut E A ad E F. Æqualis eſt igitur E F ipſi A M; quare & ipſi A N. Ideoque & F N ipſi A E, hoc eſt, datæ G. Quod erat demonſtrandum.

*12.2 *Elem.*

TAB. XLII. Fig. 4.

Sit denuo datus rhomdus A D B C, cujus producta latera B D, B C; & data ſit linea G. Oportet ducere rectam N F tranſeuntem per angulum A, quæque æqualis ſit ipſi G.

Ducatur diameter B A, eique ad angulos rectos R A L. Si igitur G minor detur quam R L, problema conſtrui nequit, uti ſupra quoque dictum fuit. Si vero æqualis, jam factum eſt quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in ſchemate adjecto, ſicut propoſitum eſt, conſtructio & demonſtratio eadem quæ in caſu præcedenti.

Illud

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam H E poni poteſt A E ipſi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam baſin ducta eſt A R, erunt quadrata B R & R A ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum B A cum duplo quadrato A R, ſubdupla quadratorum B A, A S *. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc eſt, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale eſt quadratis A B & G. Eſt igitur A S minor quam A H. Sed major eſt quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtuſus eſt. Major itaque eſt R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos ſimiles ſit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc eſt, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P ſit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio A E ipſi G æquali, ea lineam H E ſecabit.

* per 122. lib. 7. Pappi.

PROBL. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.

TAB. XLII. Fig. 5.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam, & duas medias invenit proportionales: Eſto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta ſit ipſi A Q æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto C Q D verſus polum G cavam eſſe, lineam

verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diverſum curvari; quæſitum eſt qua ratione puncta ea determinari poſſent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc ſequentem invenimus conſtructionem.

Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, ſumenda verſus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro ſit G R ipſi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et deſcribatur parabole R O, cujus vertex ſit R axis R G, latus rectum ipſi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia deſcribatur, quæ parabolen ſecet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæſita in confinio flexionis contrariæ.

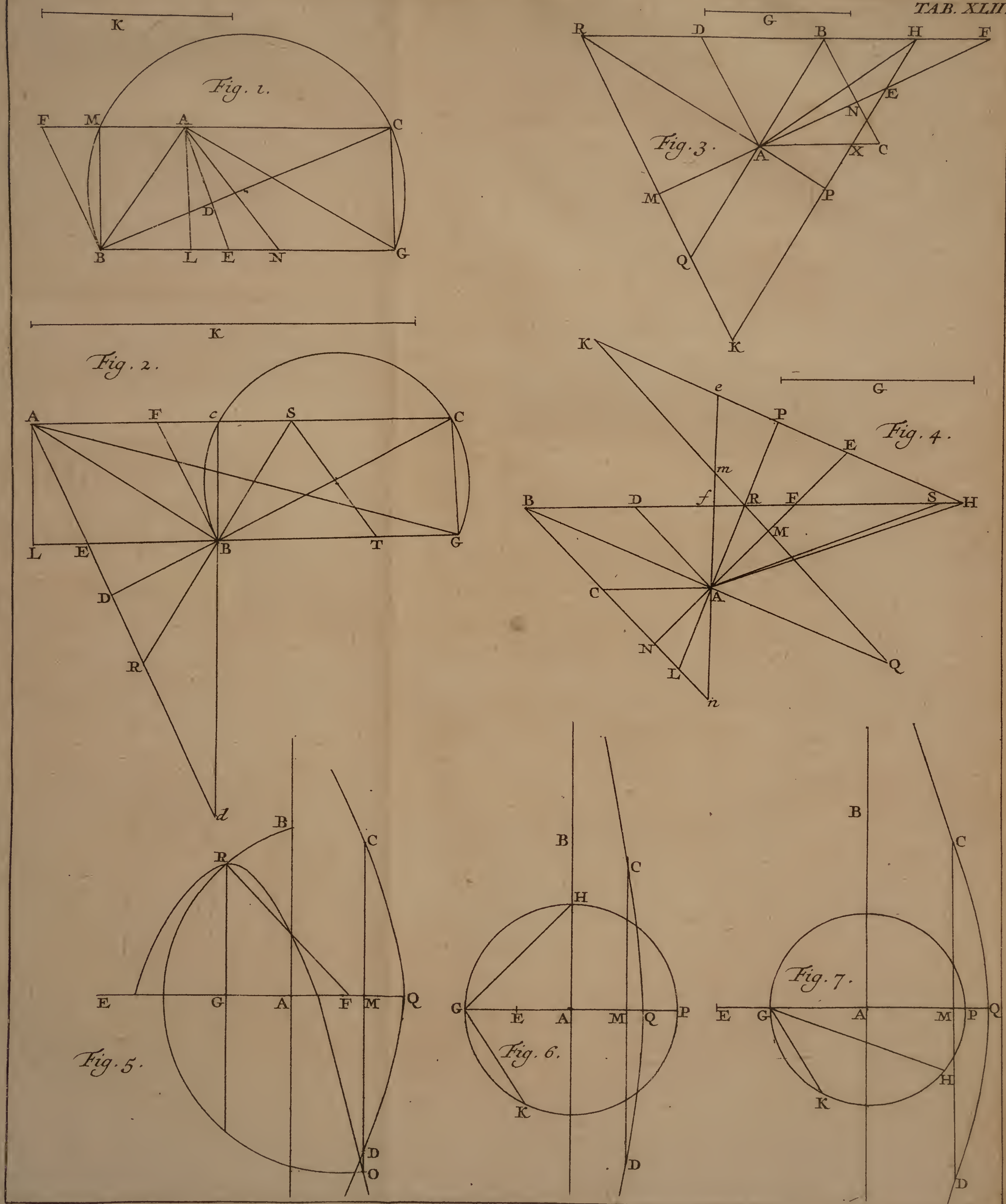
TAB. XLII. Fig. 6. Iſta autem Univerſalis eſt conſtructio. At quando quadratum ex A Q non majus eſt quam duplum quadrati A G, arcus triſectione propoſitum quoque efficiemus. Et diverſè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim ſi minor, deſcribenda eſt circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ ſubtendit trientem circumferentiæ K H G æqualis ſumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipſi
TAB. XLII. Fig. 7. A B parallela. Cum verò A Q major eſt quam A G, cæteris ad eundem modum compoſitis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K ſemicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam conſtituere P H, & ſubtenſæ G H æqualem ſumere G M.

Porro planum eſt Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inſcripti. Item cum quadratum A Q duplum eſt quadrati A G: fit enim G M dupla ipſius G A.

Sed & aliis caſibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè diſcerni poterunt, qui ad anguli triſectionem reducuntur.

F I N I S.

TAB. XLII.


K
Fig. 1.
F M A C
D
B L E N G
K
Fig. 2.
A F c S C
L E B T G
D
R
d
G
R D B H F
E
N
Fig. 3.
A X C
M P
Q
K
K
e P
G
Fig. 4.
E
m
B D f R F S H
M
C A
N Q
L
n
B C R
E G A F M Q
D O
Fig. 5.
B
H C
G E A M Q P
Fig. 6.
K
D
B
C
Fig. 7.
E G A M P Q
H
K
D

DE
CIRCULI
ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA
CONTROVERSIA.

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA
AUTHORE
JACOBO GREGORIO.

LECTORI GEOMETRÆ SALUTEM.

MEcum aliquando cogitabam, amice Lector, num Analytica cum ſuis quinque operationibus eſſet ſufficiens, & generalis methodus inveſtigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio ſuæ Geometriæ affirmare videtur Carteſius; ſi enim ita eſſet, poſſibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque hæc mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam poſſe analyſin inſtitui tali ſtructuræ inſervientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem hujus ſecunda, prima enim in circulo vulgo eſt cognita: ex hiſce percepi ſeriem polygonorum convergentem, cujus terminatio eſt circuli ſector; ubi ſtatim vidi

aliquod analyſios veſtigium. deinde ſerierum convergentium naturis non ſolum in facilioribus quibusdam caſibus, ſed etiam in genere conſideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipſim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium ſectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc converti ut polygonorum ſeriem convergentem terminarem, inſuperabilem difficultatem in ejus terminatione invenienda poſt omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo revolvens analyſios officium eſſe ſicut algebræ communis, non ſolum problemata reſolvere, ſed etiam eorum impoſſibilitatem (ſi opus ſit) demonſtrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus eſſem, ad ſecundum me converti, quod certe ſupra votum ſucceſſit; non enim ſolius circuli (quam mihi ab initio propoſueram) ſed omnium ſectionum conicarum veram & legitimam in ſua proportionum ſpecie quadraturam, & integram proportionis ſpeciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem ſaltem in relatione ad dimenſionem ſectionum conicarum ad commenſurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonſtrabili, & extractione radicis ſurde ſolidæ (ni fallor) multo breviore; in omni enim proportione incommenſurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus hujus proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque

ope-

operationibus analyticis, ſeu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior eſt in numeris ſeu in quantitate diſcreta, quam in continua, neque vereor poſt Carteſium has operationes in geometriam adducere. Primo itaque ſciendum eſt nos ſemper nobis proponere quantitates commenſurabiles, ſeu quæ inter ſe ſunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommenſurabilem niſi relativè ad commenſurabilem nullo modo percipimus, habet enim in ſe neſcio quid infiniti, mentem noſtram obtundens & ſimplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ ſunt tantum ſimplices, additio & ſubſtractio; multiplicatio enim eſt compoſita ex additione, & diviſio ex ſubſtractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud eſt quam inventio proportionis commenſurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam incommenſurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & noſtra ſexta operatio quæ in genere nihil aliud eſt quam inventio proportionis commenſurabilis, quam proximè accedentis ad noſtram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Advertendum quoque eſt ſicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, ſubductione, multiplicatione, ſed tantum ex diviſione; & numeri incommenſurabiles nunquam procedunt ex commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, ſed tantum ex radicum extractione;

ita

ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam provenire ex analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, ſed ex ſexta hac operatione; ita ut hæc noſtra inventio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis ſpeciem, idem enim eſt (ſicut in hoc tractatulo demonſtro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica ſeu illa rationis ſpecie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & ejuſdem diametrum in commenſurabilibus: verum certè eſt me hanc demonſtrationem integram ad phraſem geometricam non reduxiſſe, nam ut hoc perficiatur, opus eſt non parvo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter ſe relatione & incommenſurabilitate in genere, quod miror nullum unquam ſcripſiſſe, cum in his tam latè pateant inventionum campi; nam ex his petenda eſt demonſtratio, quod meſolabium non poſſit perfici ope regulæ & circini, item quod non ſemper & quando æquationes affectæ poſſunt reduci ad puras, item quod neceſſaria ſit ad minimum talis generis curva ad mechanicam talium æquationum reſolutionem; cum talibus innumeris, quæ à præſtantioribus geometris impoſſibilia eſſe deprehenduntur ex analyſi, & à rudioribus quotidie & fruſtra quæruntur. Scripſit Euclides decimum ſuum librum ſolummodo (niſi in paucis quibuſdam propoſitionibus generalibus) de incommenſurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ;

tæ ; neque quantum ſcio ab ullo alio tractata eſt hæc materia, etiamſi geometriæ ſpeculativæ non ſolum utiliſſima ſit, ſed etiam maxime admirabilis; in ipſo enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progreſſio geometrica cujus unus terminus fuerit propoſitæ quantitati commenſurabilis longitudine vel poteſtate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impoſsibile eſt duos totius progreſſionis terminos in infinitum continuatæ eſſe inter ſe commenſurabiles longitudine vel poteſtate quacunque : alia multa poſſem afferre, ſed pro commodiore fortaſſis tempore hæc reſervo, ſatis exiſtimans pro præſenti hæc analyticè demonſtraſſe; etſi enim analyſis aſſenſum adeo violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen reſpuit nec reſpuere poteſt geometria, quod probavit ſemel analyſis geometrica. Ex hac inventione deduco quoque novam ſectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditiſsimam & geometrica demonſtratione munitam ; hactenus enim logorithmorum conſtructio prolixiſſima, conjectura potius quam ſcientia videbatur, & diviſio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia ſumma (qua poſſum) brevitate & perſpicuitate demonſtro; neque ſcrupuloſus ſum in citationibus, utpote peregrinus, & libris ad tale opus deſtitutus, te enim ſuppono in geometricis non mediocriter verſatum, alioquin nul-

lum hinc fructum colliges.

DEFINITIONES.

1 Si in circulo, ellipſe vel hyperbola ducantur è centro in ejus perimetrum duæ rectæ, appellamus planum ab illis rectis & perimetri ſegmento comprehenſum, ſectorem.

2 Si perimetri ſegmentum inter illas rectas comprehenſum à rectis quotcumque ſubtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex eſt ſectionis centrum & baſes rectæ ſubtendentes) ſint æqualia; vocamus rectilineum illud ab iſtis triangulis conflatum, polygonum regulare inſcriptum, ſi ſectio conica fuerit circulus vel ellipſis; quod ſi fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumſcriptum.

3 Si perimetri ſegmentum inter illas rectas comprehenſum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad ſectionis centrum ducantur rectæ; ſi inquam omnia trapezia, a tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehenſa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumſcriptum, ſi ſectio conica ſit ellipſis vel circulus, & polygonum regulare inſcriptum ſi fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad ſectionis centrum) polygoni regularis à ſubtendentibus comprehenſi inſiſtant

omni-

omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehenſi, appello hæc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus eſſe compoſitam; cum à quantitatum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quando quantitates à quantitatibus inter ſe commenſurabilibus analyticè componi poſſunt, dicimus illas eſſe inter ſe analyticas.

8 Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omnino methodo & iisdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, poſitis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, ſi inquam hoc fiat. dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

9 Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia ſit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; &

A	B
C	D
E	F
G	H

eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitaiibus A, B, componatur G à quantitatibus E, F; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ita continuetur ſeries: appello hanc ſeriem, ſeriem convergentem.

10 Ejus termini juxta ſe poſiti nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini convergentes.

PETITIONES.

1 Petimus quantitates, à quantitatibus datis inter ſe analyticis analyticè compoſitas, eſſe inter ſe & cum quantitatibus datis analyticas.

2 Item quantitates, quæ à quantitatibus datis inter ſe analyticis non poſſunt analyticè componi, non eſſe cum quantitatibus datis analyticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortaſſis obſcuræ videbuntur, ſed tamen ex analyſeos elementis ſunt ſatis manifeſtæ.

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA.

Sit circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſegmentum B I P cujus centrum A: compleatur triangulum A B P, & ſegmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ B F, P F, ſe invicem ſecantes in puncto F; producatur (ſi opus ſit) recta A F ſegmentum interſecans in puncto I & rectam B P in puncto Q; deinde jungantur rectæ B I, P I. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

PROP. I. THEOREMA.

Dico trapezium B A P I *eſſe medium proportionale inter trapezium* B A P F, *&* *triangulum* B A P.

Quoniam recta A Q ducitur per F concurſum duarum rectarum F B, F P, ſegmentum in punctis B, P, tangentium; igitur recta A Q rectam B P contactuum puncta jungentem bifariam ſecabit in puncto Q; & proinde triangulum A B Q eſt æquale triangulo A Q P, & triangnlum F B Q triangulo F Q P; & igitur triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; eſt ergo triangulum A B F dimidium trapezii A B F P: eodem modo probatur triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P; & triangulum A B Q eſt dimidium trianguli A B P: cumque triangula A B F, A B I, A B Q, eandem habeant altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes, ſed eorum baſes nempe A F, A I, A Q, ſunt continuè proportionales; & igitur ipſa quoque triangula ſunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia A B F P, A B I P, & triangulum A B P ſunt continuè proportionalia in ratione A F ad A I, quod demonſtrare oportuit.

 Du-

Ducatur recta D L ſegmentum tangens in puncto I, & rectis B F, F P, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur polygonum A B D L P.

PROP. II. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezia* A B F P, A B I P *ſimul, eſſe ad duplum trapezii* A B I P; *ſicut trapezium* A B F P *ad polygonum* A B D L P.

Quoniam recta A F, ducta per contactum rectæ D L cum ſegmento, ducitur etiam per concurſum duarum rectarum F B, F P, rectam D L terminantium & ſegmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta D L bifariam ſecatur in puncto I; & proinde triangulum F D I æquale eſt triangulo F I L, at triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; & igitur trapezium A B D I æquale eſt trapezio A P L I; trapezium ergo A P L I dimidium eſt polygoni A B D L P. ducatur recta A L: manifeſtum eſt ex præcedentis demonſtratione triangulum A I L eſſe æquale triangulo A L P; ſed ut triangulum A L F ad triangulum A L I ita F A ad A I, & ut F A ad A I ita trapezium A B F P ad trapezium A B I P; & igitur ut trapezium A B F P ad trapezium A B I P; ita triangulum A L F ad triangulum A L I; & componendo, ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad trapezium A B I P, ita triangulum A F L & triangulum A I L ſimul, hoc eſt triangulum A F P, ad triangulum A I L: & conſequentes duplicando, ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad duplum trapezii A B I P, ita triangulum A F P, ad trapezium A I L P: at triangulum A F P eſt dimidium trapezii A B F P, & trapezium A I L P eſt dimidium polygoni A B D L P; & igitur ut trapezia A B F P, A B I P ſimul, ad duplum trapezii A B I P, ita trapezium A B F P ad polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

PROP. III. THEOREMA.

Dico triangulum B A P, *& trapezium* A B I P *ſimul,* *eſſe ad trapezium* A B I P, *ut duplum trapezii* A B I P *ad polygonum* A B D L P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

In antecedente demonſtratum eſt trapezia A B F P, A B I P ſimul, eſſe ad duplum trapezii A B I P, ſicut trapezium A B F P ad polygonum A B D L P: & permutando trapezia A B F P, A B I P ſimul, ſunt ad trapezium A B F P, ut duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P. & quoniam trapezium A B F P, trapezium A B I P & triangulum A B P, ſunt continuè proportionalia; erit trapezium A B I P ad trapezium A B F P, ut triangulum A B P ad trapezium A B I P; & componendo, ut trapezia A B I P, A B F P ſimul, ad trapezium A B F P, ita triangulum A B P & trapezium A B I P ſimul, ad trapezium A B I P: erat autem, ut trapezia A B I P, A B F P, ſimul, ad trapezium A B F P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; & igitur ut triangulum A B P & trapezium A B I P ſimul, ad trapezium A B I P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

Producantur (ſi opus ſit) rectæ A D, A L, ſegmentum ſecantes in punctis E & O, & rectas B I, I P, in H & M: deinde jungantur rectæ B E, E I, I O, O P, ut compleatur polygonum A B E I O P.

PROP. IV. THEOREMA.

Dico polygonum A B E I O P *eſſe medium proportionale inter polygonum* A B D L P *& trapezium* A B I P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ex hujus prima manifeſtum eſt trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P eſſe continuè pro-

proportionalia, & ex prædictis ſatis facile colligi poteſt trapezium A I L P eſſe dimidium polygoni A B D L P & trapezium A I O P eſſe dimidium polygoni A B E I O P & triangulum A I P eſſe dimidium trapezii A B I P: & proinde terminos duplicando, polygonum A B D L P, polygonum A B E I O P & trapezium A B I P ſunt continuè proportionalia, quod demonſtrare oportuit.

Ducantur rectæ C G, K N, ſegmentum tangentes in punctis E, O, & rectis D L, D B, L P, occurrentes in punctis C, G, K, N, ut compleatur polygonum A B C G K N P.

PROP. V. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezium* A B I P *& polygonum* A B E I O P *ſimul, eſſe ad polygonum* A B E I O P, *ut duplum polygoni* A B E I O P *ad polygonum* A B C G K N P.

Ex hujus tertia manifeſtum eſt triangulum A B I & trapezium A B E I ſimul, eſſe ad trapezium A B E I, ut duplum trapezii A B E I ad polygonum A B C G I: & ex prædictis facile concludi poteſt triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P, & trapezium A B E I eſſe dimidium polygoni A B E I O P, & polygonum A B C G I eſſe dimidium polygoni A B C G K N P; & proinde terminos duplicando, trapezium A B I P & polygonum A B E I O P ſimul, erunt ad polygonum A B E I O P ut duplum polygoni A B E I O P ad polygonum A B C G K N P, quod demonſtrandum erat.

Hinc facile colligi poteſt polygonum A B C G K N P eſſe medium harmonicum inter polygona A B E I O P, A B D L P, quod hic admonuiſſe ſufficiat, in ſequentibus enim demonſtrabitur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Duæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, AB DLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehenſum æqualia triangula: atque hinc evidens eſt has polygonorum analogias ita ſe habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra ſemper ſcribendo: notandum nos appellare hanc polygonorum inſcriptionem & circumſcriptionem, inſcriptionem & circumſcriptionem ſubduplam, ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum A B P $\sqsubset a$, & trapezium A B F P $\sqsubset b$) trapezium A B I P eſſe $vq\,ab$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a \dagger vq\,ab}$: eodem modo poſito trapezio A B I P $\sqsubset c$, & polygono A B D L P $\sqsubset d$, erit polygonum A B E I O P $\sqsubset vq\,cd$ & polygonum A B C G K N P $\sqsubset \frac{2cd}{c \dagger vq\,cd}$, ita ut evidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quantitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico A B E I O P æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, ut in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inveniretur ultimum illud polygonum inſcriptum (ſi ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omnino fortaſſe inauditum tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inveniri poſſint hujuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi

 fieri

fieri poſſit) generalis methodus inveniendi omnium ſerierum convergentium terminationes.

PROP. VI. THEOREMATA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico differentiam inter triangulum* ABP *& trapezium* ABFP *majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

Sit triangulum A B P, A; trapezium A B F P, B; trapezium ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A eſt ad C ut C ad B, igitur ut differentia inter A & C ad A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C; & componendo, ut differentia inter A & C & differentia inter C & B ſimul, hoc eſt differentia inter A & B, ad differentiam inter C & B, ita A † C ad C; ſed ut A † C ad C ita 2 C ad D, & ideo differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D. quoniam A † C eſt ad C ut 2 C ad D, erit permutando ut A † C ad 2 C ita C ad D; & dividendo, ut differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C eſt ad differentiam inter C & D ut 2 C ad D; ſed demonſtratum eſt differentiam inter A & B eſſe ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D; & proinde differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; ſed differentia inter A & B eſt major differentia inter C & B, & ideo differentia inter A & C eſt major differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B eſt ad differentiam inter A & C, ut differentia inter C & B ad differentiam inter C & D; at differentia inter A & B eſt major differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B eſt major differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis eſt differentiis, inter A & C, inter C & B; cumque earum utravis ſit major differentia inter

ter C & D, manifeſtum eſt differentiam inter A & B majorem eſſe duplo differentiæ inter C & D, hoc eſt differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo demonſtratur differentiam inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P majorem eſſe duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonſtrari poteſt hic differentiarum exceſſus in ſubdupla noſtra polygonorum complicatorum deſcriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inſcripti & circumſcripti major ſemper erit duplo differentiæ immediatè ſequentium nimirum inſcripti quoque & circumſcripti, & proinde aufertur majus quàm dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè ſequentium; & igitur continuando ſubduplam polygonorum deſcriptionem, inveniri poſſunt duo polygona complicata, quorum differentia ſit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio aſſumpſimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ a minor b major; ſintque datæ duæ rationes majoris inæqualitatis c ad d, & c ad e; deinde ſit ut c ad d ita $b-a$ ad $\frac{bd-ad}{c}$ cui addatur quantitas a ut fiat $\frac{ca+bd-ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediate ſub a: fiatque ut c ad e ita $b-a$ ad $\frac{be-ae}{c}$, quæ quantitas ſubſtrahatur ex b & relictum nempe $\frac{bc-be+ae}{c}$ ponatur ſub b. continuetur deinde ſeries convergens cujus primi termini convergentes ſunt a, b, & ſecundi termini convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. manifeſtum eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ majorem

$$\begin{array}{cccc} & d & a & b \\ c & e & \frac{ca+bd-ad}{c} & \frac{bc-be+ae}{c} \end{array}$$

 eſſe

eſſe termino a, quoniam termino a additur $\frac{bd-ad}{c}$ ut fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifeſtum quoque eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem eſſe termino b, quoniam differentia inter a & b eſt ad differentiam inter a & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens quoque eſt terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem eſſe termino b. quoniam ex b ſubſtrahitur $\frac{be-ae}{c}$ ut fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifeſtum etiam eſt terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ majorem eſſe termino a, quoniam differentia inter a & b eſt ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & b in ratione majoris inæqualitatis: evidens igitur eſt differentiam inter terminos convergentes a & b majorem eſſe differentiâ inter terminos convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. ſed quoniam termini convergentes a & b ponuntur indefiniti, poſſunt a & b ſumi loco quorumlibet terminorum convergentium totius hujus ſeriei; & poſitis a & b pro terminis hujus ſeriei convergentibus quibuſcunque, ſequitur neceſſario ex ſeriei compoſitione $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$ eſſe terminos convergentes immediatè ſequentes: cumque differentia terminorum a & b major ſit differentia terminorum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, evidens eſt differentiam terminorum convergentium priorum ſemper eſſe majorem differentia terminorum convergentium immediatè ſequentium; & igitur quò magis continuatur hæc ſeries convergens eò minor fit differentia terminorum convergentium: & quoniam hæc differentiarum diminutio ſemper fit proportionaliter nempe in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur poſſunt inveniri hujus ſeriei termini convergentes quorum differentia ſit omni exhibita quantitate minor; & igitur imaginando hanc ſeriem in infinitum continuari, poſſumus imaginari ultimos terminos convergentes eſſe æquales, quos

quos terminos æquales appellamus ſeriei terminationem.

PROP. VII. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ut huic problemati ſatisfiat, oportet primò invenire quantitatem quæ eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$, hoc autem facile fit hoc modo: inveniatur quantitas quæ multiplicata in a & addita b multiplicata in quantitatem datam m, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca+bd-ad}{e}$ & adderetur $\frac{bc-be+ae}{c}$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m. ſit quantitas illa z, & proinde $za+bm$ æquatur $\frac{zca+zbd-zad+mbc-mbe+mae}{c}$, & æquatione reducta invenitur $z=\frac{mae-mbe}{ad-bd}$; quæ quantitas ſive multiplicata in a & addita m, ſive multiplicata in $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & addita $\frac{mbc-mbe+mae}{c}$ efficit eandem in utroque caſu quantitatem nempe $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$: & proinde prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo componitur ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. atque a & b quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius ſeriei termini convergentes, modò termini convergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, & proinde quantitas $\frac{maac-mbac+mbad-mbbd}{cd-bd}$ eodem modo componitur ex quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis convergentibus a, b; & igitur prædicta

dicta quantitas eodem etiam modo componitur ex ultimis ejus terminis convergentibus, qui æquales ſunt: ſit ultimus ille terminus x qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in m efficit xm & $\frac{xmae - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum ſumma nempe $\frac{xmae - xmbe + xmad - xmbd}{ad - bd}$ æquatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$ & æquatione reducta invenitur x ſeu ſeriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ac - be + ad - bd}$, quam invenire oportuit.

Ne minus exercitatis obſcurum videatur hoc problema, illud in numeris illuſtrabimus: ſit $c\ 7$, $d\ 2$, $e\ 3$, $a\ 28$, $b\ 42$, erunt ſecundi termini convergentes 32, 36, tertii $33\frac{1}{7}$, $34\frac{2}{7}$, & ejus terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moveat, quod (etiamſi a ſit minor quam b) $\frac{ca + bd - ad}{c}$ poſſit eſſe major quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim major à minore poteſt ſubſtrahi, cujus tamen exemplum non gravabimus exhibere, ſit $c\ 7$, $d\ 5$, $e\ 4$, $a\ 28$, $b\ 42$; erunt ſecundi termini convergentes 38, 34, & tertii $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, ejuſque terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animadvertendum eſt hujus problematis ſolutionem eodem modo ſe habere, etiamſi loco a ponatur cyphra ſeu merum nihil, Ex. Gr; ſit $c\ 8$, $d\ 3$, $e\ 4$, $a\ 0$, $b\ 24$; erunt ſecundi termini convergentes 9, 12, & tertii $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{2}$, & ſeriei terminatio $10\frac{2}{7}$,

Harum etiam ſerierum terminationes poſſunt inveniri ex Gregorii à S. Vincentio lib. de progreſſ. geometrica, etiamſi methodo longe ab hac diverſa.

PROP.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Sint duæ quantitates datæ A, B, *& ratio quælibet data* C *ad* D: *oportet invenire aliam quantitatem, ut ratio ejus ad* A *ſit multiplicata rationis* B *ad* A *in ratione* C *ad* D.

EDC AFBG

Sit primò ratio C ad D commenſurabilis, ſitque inter C & D communis menſura E; & quoties E continetur in D toties ſit ratio F ad A ſubmultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties ſit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G eſſe quantitatem illam quæſitam. ratio G ad A eſt multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonſtrare oportuit.

Quod ſi ratio C ad D ſit incommenſurabilis, geometricam hujus problematis praxim eſſe impoſſibilem mihi perſuadeo; approximatione tamen fieri poteſt, aſſumendo rationem commenſurabilem ejus loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

		G H	A B
	N	I K	C D
M		R S	E F
	O	T V	X Y
		L	Z

Sit ſeries convergens, cujus primi termini convergentes ſint A, B, ſecundi C, D, tertii E, F; ſintque ſecundi termini ita facti à primis, ut ratio B majoris ad A minorem ſit multiplicata rationis C ad A in ratione data mojoris inæqualitatis M ad N, & ut ratio B ad A ſit multiplicata rationis D ad A in ratione data majoris inæqualitatis M ad O: ſintque tertii termini eodem modo facti ex ſecundis quo ſecundi facti ſunt ex primis; atque ita continuetur ſeries.

PROP.

PROP. IX. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ponatur G cyphra ſeu nihil hoc eſt exponens rationis æqualitatis, ſeu rationis A ad A; ſitque H ad libitum exponens rationis B ad A: ſit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc eſt ipſa H vel exponens rationis B ad A ad exceſſum quo I ſuperat G hoc eſt ipſam I, ſed ut M ad N ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis C ad A; & igitur Exceſſus quo I ſuperat G hoc eſt ipſa I eſt exponens rationis C ad A. ſit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc eſt H ad exceſſum quo K ſuperat G hoc eſt ipſam K, ſed ut M ad O ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis D ad A, cumque H ſit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: ſi igitur I ſit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit exceſſus quo K ſuperat I exponens rationis D ad C. deinde ſit ut M ad N ita exceſſus quo K ſuperat I ſeu exponens rationis D ad C ad exceſſum quo R ſuperat I, ſed ut M ad N ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis E ad C, atque exceſſus quo K ſuperat I eſt exponens rationis D ad C; & proinde exceſſus quo R ſuperat I eſt exponens rationis E ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde R eſt exponens rationis E ad A. deinde ſit ut M ad O ita exceſſus quo K ſuperat I ad exceſſum quo S ſuperat I, ſed ut M ad O ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis F ad C, cumque exceſſus quo K ſuperat I ſit exponens rationis D ad C; erit exceſſus quo S ſuperat I exponens rationis F ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde S eſt exponens rationis F ad A: cum igitur R ſit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit exceſſus quo S ſuperat R exponens rationis F ad E: & utramque ſeriem continuando, demonſtratur ut antè T eſſe exponentem rationis X ad A, & V eſſe expo-

exponentem rationis Y ad A; denique ſemper demonſtrabitur terminos convergentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum convergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò utriuſque ſeriei termini convergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proinde terminatio ſeriei exponentium per hujus 7 inventa, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inveniatur igitur ratio Z ad A quæ ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam invenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandum ſit M 4, N 2, O 1, A ^{6}, B ^{10}; erunt ſecundi termini convergentes Vq60, Vqq2160, tertii termini convergentes Vqqq7776000, Vqqq100776960000000, & ſeriei terminatio Vc360.

Aliud exemplum, ſit M 6, N 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini convergentes Vc250, Vq50, tertii termini convergentes Vqcc+88281250000000, Vqqc7812500000, & ſeriei terminatio Vſ12500. hactenus terminavimus omnes ſeries convergentes quæ fieri poſſunt vel à ſola proportione arithmetica vel a ſola proportione geometrica, nunc vero methodum aggredimur, cujus ope omnium ſerierum convergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inveniri poſſunt.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint a, b, & termini convergentes immediatè

ſequentes $\sqrt{q}ab$, $\frac{aa}{\sqrt{q}ab}$ ſumma terminorum convergentium $a + b$ multiplicata in terminum convergentem primum a efficit $aa + ab$: & ſumma terminorum convergentium immediate ſequentium nempe $\sqrt{q}ab + \frac{aa}{\sqrt{q}ab}$ multiplicata in primum terminum convergentem $\sqrt{q}ab$ efficit etiam $aa + ab$; ex his invenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus $a, b,$ quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{q}ab$, $\frac{aa}{\sqrt{q}ab}$: & quoniam quantitates $a, b,$ indefinitæ ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt ſummam quorumcunque terminorum convergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum convergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum convergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum convergentem; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum convergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempe $aa + ab$; atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus ſeu ſeriei terminatio z, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione reſoluta dabitur z ſeu ſeriei terminatio $\sqrt{q}\frac{aa + ab}{2}$, quam invenire oportuit.

Et proinde ad inveniendam cujuscunque ſeriei convergentis terminationem; opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in problemate ſive termini convergentes $a, b,$ ſint primi, ſecundi, vel tertii &c; manifeſtum eſt omnes

omnes ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus ſecundis, tertiis, vel quartis, &c.

PROP. XI. THEOREMA.

Dico ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ A B I P *non eſſe compoſitum analyticè à triangulo* A B P *& trapezio* A B F P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ponatur triangulum A B P ^{a} & trapezium A B F P ^{b}: manifeſtum eſt ex prædictis trapezium A B I P eſſe $Vqab$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a + Vqab}$, item ſectorem A B I P eſſe hujus ſeriei convergentis terminationem. ut ex ſeriei terminis auferantur ſigna radicis & fractionis, pro ^{a} & ^{b} primis ſeriei terminis convergentibus, hoc eſt pro triangulo A B P & trapezio A B F P ponantur $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$; eruntque ſecundi ſeriei termini convergentes, hoc eſt trapezium A B I P & polygonum A B D L P, $ba^2 + b^2a$ & $2\,b^2a$, dico ſeriei convergentis (cujus primi termini convergentes ſunt $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b_3$ & ſecundi ſunt $ba^2 + b^2a$, $2\,b^2a$) terminationem non eſſe compoſitam analyticè a terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$: ſi enim componatur prædicta terminatio analyticè a terminis convergentibus $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omnino modo à terminis convergentibus $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; & proinde eadem quantitas, nempe prædicta terminatio, eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$,

ſed nulla quantitas poteſt eodem modo analyticè componi ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur

$a^3 + a^2b$	$ab^2 + b^3$.
$ba^2 + b^2a$	$2b^2a$

ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, quod ſic demonſtro. ſi analyticè componeretur quantitas ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$,

eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, ſubtrahendo, multiplicando & dividendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur & dividerentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b_2a$, & radices eædem ex factis extraherentur, ſed poſterius fieri non poteſt, ergo nec prius; minorem ſic probo, ſi eadem fieret quantitas ex additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis ſive ipſorum factis æquales quantitates ſubducendo, vel illos ſive ipſorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel dividendo, vel denique illos ſive ipſorum factos eodem modo in ſe multiplicando, vel ex iiſdem easdem radices extrahendo, hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo, fieri poſſent duo ultima producta, nempe unum à termino $ab^2 + b_3$ & alterum à termino $2b^2a$; ita ut ultimum productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum ultimo producto ex termino $ab^2 + b_3$ additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto radice aliqua extracta (haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit ultimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum ultimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto eadem etiam radice extracta, haſce analyticas operationes eodem omnino modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo; ſed poſterius eſt abſurdum ergò & prius: ſequela majoris patet ex octava definitione hujus, minorem ſic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur poteſtas ipſius a nempe a^3, quæ eſt altior ulla poteſtate ejusdem a in termino $ba^2 + b^2a$; & proinde terminos $a^3 + a^2b$, $ba_2 + b^2a$, cum æqua-

æqualibus quantitatibus addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, &c: ſicut ſuperius dictum eſt; ſemper manet poteſtas ipſius a in ultimo producto ex termino $a^3 + a^2 b$ altior poteſtate ulla ipſius a in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manent in factis eædem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis elevatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2 b$ quam elevatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2 a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, ubi a fuerat elevatior in poteſtate erit etiam elevatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius a in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2 a$, demonſtratur ut antè altiſſimam poteſtatem ipſius a in ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto ex termino $2b^2 a$: in ultimo igitur producto termini $a^3 + a^2 b$ reperitur altior poteſtas ipſius a quam in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, & in ultimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius a eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto termini $2b^2 a$; & igitur ultima producta ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diviſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius a quam ulla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorem facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cùm reperiatur altior poteſtas ipſius a in una quam in altera: atque hinc evidens eſt quòd ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ A B I P non poſſit componi analyticè à triangulo A B P & trapezio A B F P, quod demonſtrandum erat.

Ut autem evidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breviorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubjun-

jungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam addendo, ſubſtrahendo, multiplicando, dividendo duo binomia $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur, dividerentur, binomium $ba^2 + b^2a$ & ſimplex quantitas $2b^2a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & ſi plura ſint nomina in uno producto quam in altero, impoſſibile eſt ut ſint indefinitè æqualia, quod eſt propoſitum, reliqua enim ex priore demonſtratione haberi poſſunt.

SCHOLIUM.

Obſcurum fortaſſis videbitur hoc theorema ob multas inuſitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa ſuppoſita lemmata, quæ demonſtrare pigebat, quoniam cuivis analyſtæ vel prima lectione ſunt obvia, ex natura enim operationum analyticarum omnino dependent.

Locus hic requirit ut aliquid dicam de proportione inter triangulum ABP & ſectorem ABIP; quod ut fiat, advertendum eſt veriſſimum philoſophorum axioma, nempe omnem noſtram cognitionem à ſenſu ortum habere: inter proportiones enim, ſola commenſurabilis ſenſu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommenſurabilis enim à mathematicis ſolummodo adhuc contemplatur, quatenus commenſurabilis cujusdam rationis eſt ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. vel ex talium additione, ſubductione, &c. genita: hoc eſt, quantitas quæ quantitati propoſitæ eſt incommenſurabilis ex eo ſolummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propoſitæ quantitati commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi poſſit: at ex hactenus demonſtratis manifeſtum eſt ſectorem ABIP non poſſe componi ex additione, ſubductione, multiplicatione,

tione, diviſione, & radicum extractione trianguli A B P & trapezii A B F P: triangulum autem A B P & trapezium A B F P ſupponimus eſſe quantitates inter ſe analyticas; & proinde ſector A B I P illis analytica eſſe non poteſt, hoc eſt ex quantitatum ipſis A B P, A B F P analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi non poteſt; & proinde ex hoc capite nulla poteſt exhiberi ratio inter triangulum A B P & ſectorem A B I P, cum evidens ſit illam non eſſe analyticam. ſed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum A B P & ſectorem A B I P omnifariam variari poſſe; & proinde poſſe eſſe inter ſe in ratione qualibet data ſive analytica ſive etiam commenſurabili: reſpondeo hoc eſſe veriſſimum, ſed in hoc caſu ratio inter triangulum A B P & trapezium A B F P non erit analytica; & proinde ex dato circulo ellipſe vel hyperbola nunquam dabitur in analyticis triangulum A B P, quod ex prædictis clariſſimè patet. etiamſi ex prædicto capite non poſſimus comprehendere rationem inter triangulum A B P & ſectorem ABIP, poſſumus tamen ejus aliquam habere cognitionem, ex eo quod ſector A B I P ſit terminatio ſeriei convergentis datæ; & ex hac conſideratione poſſibile eſt invenire quantitatem datæ commenſurabilem cujus differentia à ſectore A B I P minor fuerit quacunque quantitate propoſita, ad hoc enim ſemper recurrendum eſt, cum de quantitatibus quibuscunque incommenſurabilibus tractant practici, & in hac noſtra approximatione praxis non erit operoſior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarum approximationibus, immo multo brevior, facilior & paratior erit illis Vietæ ſectionibus angularibus, quæ tamen ſummæ matheſeos utilitati in praxem reducuntur. non video ergo quare circuli quadratura diutius æſtimetur ignorari: cum enim demonſtratum ſit rationem circuli ad diametri quadratum non eſſe analyticam, vanum certè erit & ineptum illam ſicut talem impoſterum quærere: at rejectis quantitatibus analyticis, vix credo ullam poſſe eſſe notiorem hisce noſtrarum ſerierum convergentium terminationibus, ſicut ex ſequentibus pleniſſimè apparebit.

PROP.

PROP. XII. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Sit trapezium ABIP, A; polygonum SABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D eſſe medium harmonicum inter C & B. ex hujus 4, A:C::C:B, & componendo A†C:C::C†B:B, ſed ex hujus 5, A†C:C::2C:D; & ideo C†B:B::2C:D, & permutando B†C:2C::B:D, & dividendo, differentia inter B & C eſt ad 2C, ut differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C eſt ad differentiam inter B & D ut 2C ad D, hoc eſt, ut C†B ad B, & dividendo, differentia inter D & C eſt ad differentiam inter B & D ut C ad B; & proinde D eſt medium harmonicum inter C & B, quod demonſtrare oportuit.

A C D B

Hæc propoſitio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, ut patet ex ſcholio 5 hujus.

PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, ſit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, eſſe continuè proportionales. quoniam A, E, B, ſunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B ut A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, ut A†B ad B; deinde permutando & componendo 2A:A†B::E:B, ſed 2A eſt duplum ipſius A & A†B duplum ipſius C; & ideo A:C::E:B; & proinde CE = AB, & AB = DD, ideoque CE = DD; & igitur C:D::D:E, quod demonſtrare oportuit.

A		B
C	D	E

PROP.

PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem & B extra: continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico A + E minorem eſſe quam 2 C: ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda quoniam C, D, B, ſunt harmonice proportionales: & proinde exceſſus C ſupra A, hoc eſt C -- A, eſt ad exceſſum D ſupra C ſeu D - C in ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A + C ad A, hoc eſt in ratione A + C ad C; at A + C eſt major quam C, & ideo exceſſus C ſupra A eſt major quam exceſſus D ſupra C, eſt autem D major quam E, & proinde exceſſus C ſupra A multò major eſt quam exceſſus E ſupra C; eſt igitur A + E minor quam 2 C; quod demonſtrare oportuit.

A	B
C	D
E	F

$$C - A : B - C :: A : C$$

$$B - C : D - C :: A + C : A$$

PROP. XV. THEOREMA.

Iiſdem poſitis: dico exceſſum C ſupra A minorem eſſe quadruplo exceſſus E ſupra C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus C ſupra A (hoc eſt) C - A eſt ad exceſſum E ſupra C ſeu E - C, ut AC + EC + AE + CC ad CC; at B ma-

$$C - A : B - C :: A : C$$

$$B - C : D - C :: A + C : A$$

$$D - C : E - C :: E + C : C$$

jor eſt quam E, & ideo A B ſeu C C major eſt quam A E, & igitur A E † C C minor eſt quam 2 CC: atque A C † E C eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C, ſed A † E minor eſt quam 2 C; & ideo A C † E C minor eſt quam 2 CC; proinde A C † E C † A E † CC minor eſt quam 4 CC; & igitur C – A minor eſt quadruplo ipſius E – C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XVI. THEOREMA.

Sint duo Polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ ſectorem & B intra: Continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem ſint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A † E majorem eſſe quam 2 C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; &

A	B
C	D
E	F

A – C: C – B:: A: C

C – B: C – D:: A † C: A

proinde exceſſus A ſupra C, hoc eſt A – C, eſt ad exceſſum C ſupra D ſeu C – D; In ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A hoc eſt in ratione A † C ad C, at A † C eſt major quam C & ideo exceſſus A ſupra C eſt major exceſſu C ſupra D, eſt autem E major quam D; & proinde exceſſus A ſupra C multo major eſt exceſſu C ſupra E; manifeſtum eſt igitur A † E majorem eſſe quam 2 C, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

PROP. XVII. THEOREMA.

Isdem poſitis: dico exceſſum A ſupra C majorem eſſe quadruplo exceſſus C ſupra E. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus A ſupra C, hoc eſt A − C, eſt ad exceſſum C ſupra E, hoc eſt C − E in ratione compoſita ex proportionibus A ad C, A + C ad A & E + C ad C; & ideo A − C eſt ad C − E, ut A C + E C + A E + C C ad C C; at B minor eſt quam E,

A − C : C − B : : A : C
C − B : C − D : : A + : C A
C − D : C − E : : E + C : C

& ideo A B, ſeu C C minor eſt quam A E; & igitur A E + C C major eſt quam 2 C C. atque A C + E C eſt ad 2 C C ut A + E ad 2 C; ſed A + E major eſt quam duo C, & ideo A C + E C major eſt quam 2 C C; & proinde A C + E C + A E + C C major eſt quam 4 C C; & igitur A − C major eſt quadruplo ipſius C − E, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XVIII. THEOREMA.

Sint duæ quantitates inæquales; A minor, B major, C media geometrica, D media arithmetica. dico D majorem eſſe quam C, quoniam B, C, A, ſunt continuè proportionales; erit dividendo, permutando, & componendo; ut exceſſus B ſupra A ad exceſſum C ſupra A, ita A + C ad A, atque A + C major eſt duplo ipſius A; & proinde exceſſus B ſupra A major eſt duplo exceſſus C ſupra; ſed exceſſus B ſupra A duplus eſt exceſſus D ſupra A, & ideo exceſſus D ſupra A major eſt exceſſu C

	E	
A	C	B
	D	

 ſu-

ſupra A; eſt igitur D major quam C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XIX. THEOREMA.

IIsdem poſitis; ſit inter A & B media harmonica E. dico C majorem eſſe quam E. ex hujus 13, D eſt ad C ut C ad E, ſed D major eſt quam C; & ideo C major eſt quam E, quod demonſtrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Ex duabus præcedentibus manifeſtum eſt D majorem eſſe quam E, hoc eſt mediam arithmeticam inter duas quantitates inæquales majorem eſſe media harmonica inter eaſdem.

PROP. XX. THEOREMA.

SInt duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem, B extra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum;

A B		A
C D		C
E F		G
K L		H
Z		X

ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; ſitque ſeriei convergentis terminatio ſeu circuli vel ellipſeos ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C una cum triente exceſſus C ſupra A. ſit exceſſus G ſupra C quarta pars exceſſus C ſupra A, & exceſſus H ſupra G quarta pars exceſſus G ſupra C; continueturque hæc ſeries in infinitum, ut ejus terminatio ſit X. Exceſſus C ſupra A minor eſt quadruplo exceſſus E ſupra C; & ideo exceſſus E ſupra C major eſt exceſſu G ſupra C, eſt ergo E major quam G. deinde exceſſus E ſupra C minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, & ideo exceſſus G ſupra C multo minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, eſt igitur exceſ-

ceſſus K ſupra E major exceſſu H ſupra G; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E; A, C, G, continuatione, terminum quemcunque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempe X, at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C una cum triente exceſſus C ſupra A, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXI. THEOREMA.

Iisdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B ſit media Arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H; item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſed media Arithmetica N; continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C, atque H media Arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G, B; media autem harmonica inter G & B major eſt quam D media harmonica inter C & B, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc eſt H, major eſt quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H: & quoniam G eſt major quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. deinde N media arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem, & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

eadem F major eſt. eadem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei. A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempe X; atque ex hujus 7, terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X æqualis eſt majori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrandum erat.

PROP. XXII. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

ISdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B ſit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continuetúrque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, &c, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, item H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media Geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter G & D. deinde N media Geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H major quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; & ideo N media Geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempè X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X, æqualis eſt majori duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

SCHO-

SCHOLIUM.

NOn opus eſt ut hic demonſtrem majorem duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates majorem eſſe quam major duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter eaſdem, & igitur hujus propoſitionis approximationem præcedentis eſſe exactiorem, quod etſi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

PROP. XXIII. THEOREMA.

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

Sint duo polygona complicata A, B, nempè A extra hyperbolæ ſectorem, B intra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolam ſint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque ſeriei convergentis terminatio ſeu hyperbolæ ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C dempto triente exceſſus A ſupra C. ſit exceſſus C ſupra G quarta pars exceſſus A ſupra C, & exceſſus G ſupra H quarta pars exceſſus C ſupra G, continueturque hæc ſeries in infinitum ut ejus terminatio ſit X. exceſſus A ſupra C major eſt quadruplo exceſſus C ſupra E, & ideo exceſſus C ſupra E minor eſt exceſſu C ſupra G, eſt ergo E major quam G. Deinde exceſſus C ſupra E major eſt quadruplo exceſſus E ſupra K, & ideo exceſſus C ſupra G multò major eſt quadruplo exceſſu E ſupra K, & igitur exceſſus G ſupra H major eſt exceſſu E ſupra K; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K etiam majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A,

C,

C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z, major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempè X; at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C dempto triente exceſſus A ſupra C, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXIV. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

ISdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H, Item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſit media Arithmetica N: continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C; atque H media arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G & B; media autem harmonica inter G & B; major eſt media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B nempe H major eſt quam D media harmonica inter C & B eodem modo M media Arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H; & quoniam G eſt major quam C & H quam D, media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. Deinde N media Arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F major eſt. eodem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminum ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z, minor erit terminatione ſeriei A B,

GH, nempe X; atque ex hujus 7 terminatio ſeriei AB, GH, nempe X, æqualis eſt minori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXV. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

Iisdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H; Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometriea N; continueturque hæc ſeries convergens AB, GH, MN, OP, &c. in infinitum ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, & H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei AB, CD, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei AB, GH; & igitur terminatio ſeriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio ſeriei AB, GH, nempe X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei AB, GH, ſeu X, æqualis eſt minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

Ex dictis manifeſtum eſt hanc approximationem exactiorem eſſe illa, in antecedenti propoſitione, demonſtrata, etiamſi hæc ſit paulò laborioſior. ſed non diſſimulandum eſt duas poſſe eſſe ſeries æquales terminationes habentes, ita ut

ut ſemper quilibet terminus unius ſeriei ſit major quam idem numero terminus alterius ſeriei; ſed in talibus ſeriebus quò longius producuntur, eò minor eſt eorundem numero terminorum differentia: ſed è contra noſtræ ſeries quò longius producuntur, eò magis differunt iidem numero termini, ſicut facillimè demonſtrari poteſt.

Experientia obſervo differentiam inter ſecundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium ſemper eſſe multò majorem differentia inter ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium & ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ; quod notatu dignum exiſtimo, hinc enim colligitur ſectorem differre vix ultra unitatem à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum ultra unitatem, quod ſummopere notandum, nam ex hoc evidens eſt approximationem audacter eſſe adhibendam, quando ita continuatur ſeries ut medietas prima notarum ſit eadem in utroque termino convergente, quod experientia etiam evincit; nunquam enim in hoc caſu differt ſector unitate à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Eſt etiam alia approximatio omnium breviſſima & maximè admiranda, etiamſi mihi non contingat illam demonſtratione geometrica munire; nempe ſi primus notarum triens in utroque termino convergente ſit eadem, ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſemper differt infra unitatem à maximo quatuor arithmeticè continuè proportionalium inter terminos noſtræ approximationis.

PROP. XXVI. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Sit hyperbola quæcunque C F N cujus centrum A, aſymptota A B, A O; ſitque ejus ſector A F G L cum triangulo circumſcripto A F L: aſymptotorum uni A B parallellæ ducantur rectæ F D, I M; & compleantur parallelogramma F D M K,

FDMK, PLMD. dico triangulum AFL eſſe medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonſtrat triangulum AFL eſſe æquale trapezio DFLM, ſed manifeſtum eſt trapezium DFLM eſſe medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideo patet propoſitum.

PROP. XXVII. THEOREMA.

Iisdem poſitis: ducatur AI rectam FL bifariam dividens in I & hyperbolam interſecans in puncto G, fiatque trapezium ſectori circumſcriptum AFGL, quod dico eſſe medium geometricum inter parallelogramma FDMK, PLMD. ex demonſtratis Gregorii à S. Vincentio evidens eſt trapezium AFGL æquale eſſe rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta ſecat rectam FL bifariam in I, ex ejuſdem Gregorii à S. Vincentio Lib. de hyperbola, manifeſtum eſt rectas LM, GH, FD, eſſe continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. aſymptoto AO per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD, MK, occurrens in punctis R, S. quoniam rectæ FD, GH, LM, ſunt continuè proportionales, erit dividendo & permutando FR ad SL ut GH ad LM: & quoniam rectæ MA, HA, DA, ſunt continuè proportionales, erit etiam dividendo & permutando MH ad HD hoc eſt SG ad GR ut HA ad DA, vel ut GH ad LM; & proinde FR eſt ad SL ut SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, ſint æquales ob parallelas FR, SL, erunt triangula FRG, GLS, æqualia; & proinde parallelogrammum RDMS æquale eſt rectilineo DFGLM ſeu trapezio AFGL; ſed parallelogrammum RDMS eſt medium geometricum inter paralelogramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum baſes nempe LM, SM, KM, ſunt continuè proportionales; & ideo trapezium AFGL eſt medium geo-

TAB. XLVIII. fig. 4.

metricum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXVIII. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4.

Iisdem poſitis ducantur rectæ F E, L E, hyperbolam tangentes in punctis F, L, ut compleatur trapezium A F E L, quod dico eſſe medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K. triangulum A F L, trapezium A F G L, & medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, ſunt continuè proportionalia, quoniam triangulum A F L eſt medium arithmeticum & trapezium A F G L medium geometricum inter eadem parallelogramma, ut patet ex hujus 13; ſed triangulum A F L, trapezium A F G L, & trapezium A F E L ſunt continuè proportionalia ex hujus 1; & proinde trapezium A F E L eſt medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Dato circulo æquale invenire quadratum.

Sit quadratum circulo circumſcriptum 4000000000000000; erit ergo eidem inſcriptum 2000000000000000, inter quæ quadrata ſit medium geometricum 2828427124746190 octagonum nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra ſit medium harmonicum, quod levi labore invenitur dividendoduplum quadrati octagoni intra circulum ſeu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per ſummam quadrati & octagoni intra; eritque inventum medium harmonicum, octagonum circumſcriptum, nempe 3313708498984760. continuetur hæc ſeries convergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum ſit eadem in utroque termino con-

convergente, nimirum uſque ad polygona laterum 16384; inſcriptum enim eſt 314159257658686 & circumſcriptum 314159269209125 8; non conſideratur nota ultima, quoniam in diviſionibus & radicum extractionibus ſemper à vera quantitate paululum aberramus, quod ultimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in hujus 20 & 21 demonſtrata, & invenientur termini intra quos eſt vera circuli menſura, poſito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem major, & proinde non latet circuli menſura, quam invenire oportuit. polygonorum ſeriem hic appono.

	Intra circulum.	extra circulum.
4	2000000000000000	4000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801144299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258

Circulus intra ſequentes terminos conſiſtit

3141592653589789. 3141592653589792.

eodem omnino modo reperitur rectilineum æquale cuicunque ſectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inſcripto & trapezio circumſcripto.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Ex dato ſinu invenire arcum.

TAB. XLIII. fig. 5.

Sit arcus circuli A E deſcriptus ex centro B. hujus arcus datur radius nempe A B & ſinus nempe A D: oportet invenire quam proportionem habet ipſe arcus ad integram circuli circunferentiam. ſit arcus chorda A E & ejus ſemiſſis tangens A C vel C E. ex quadrato radii A B auferatur quadratum ſinus A D & relinquetur quadratum ſinus complementi B D, datur igitur B D; & ideo datur area trianguli rectanguli A B D; datur quoque area trianguli A B E nempe rectangulum ſinus dati A D in ſemiſſem radii B E. deinde fiat ut ſumma triangulorum A B D, A B E, ad triangulum A B E ita duplum trianguli A B E ad trapezium A B E C, ut conſtat ex hujus 5. & ex dato triangulo inſcripto A B E & trapezio circumſcripto A B E C, inveniatur per præcedentem ſector ipſe A B E, qui ad circulum integrum datum quæſitam habet proportionem arcus A E ad totam circumferentiam, quam invenire oportuit.

PROP. XXXI. PROBLEMA.

Ex dato arcu invenire ſinum.

TAB. XLIII. fig. 5.

Ex dato arcu manifeſtum eſt dari ſectoris aream; hoc igitur ſectore dato conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet ſinus totus: deinde ſumatur ſectoris dati talis pars aliquota nempe ſector A B E, ut trianguli inſcripti A B E & trapezii circumſcripti A B E C toties multiplicia, quoties ſector datus multiplex eſt ſectoris A B E, concordent in tot notis arithmeticis quot continet radix quadrata ſinus totius; hoc enim facile fieri poteſt ex ſpeculatione tabellæ hujus 29: non enim requiritur in hoc praxis præciſa, nam nihil refert etiamſi in magnis radiis diſcrepantia ſit notarum aliquot. Sectoris cogni-

cogniti A B E, cujus arcus A E etiam innoteſcit, datur radius B A: ſit ejus ſinus A D, z; & proinde è dato ſinu & radio, dabitur ut in antecedente triangulum ſectori inſcriptum A B E & eidem trapezium circumſcriptum A B E C; atque ipſe ſector datus, eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter triangulum ſibi inſcriptum & trapezium circumſcriptum; & proinde datur æquatio inter duplum trapezii A B E C unà cum triangulo A B E & triplum ſectoris cogniti A B E, cujus reſolutio manifeſtat valorem quantitatis ignotæ z, hoc eſt ſinum A D: at dato arcu A E & ejus ſinu, dantur etiam ex vulgata ſectionum angularium doctrina ſinus omnium multiplicium ejuſdem arcus A E; & proinde non latet ſinus arcus in initio propoſiti, cum ſit ad arcum A E in data ratione multiplici, quem invenire oportuit.

PROP. XXXII. PROBLEMA.

Invenire quadratum æquale ſpatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno aſymptoto & duabus rectis alteri aſymptoto parallelis; quod ſpatium æquale eſt ſectori hyperbolico cujus baſis eſt eadem curva.

Sit hyperpola D I L, cujus aſymptota A O, A K, ſibi occurrunt in angulo recto O A K. proponitur hujus hyperbolæ ſpatium I L M K, contentum à curva hyperbolica I L, aſymptoto K M & duabus rectis I K, L M, alteri aſymptoto A O parallelis. oportet è datis recti I K 10 0000000000, L M 10000000000000, A M 1000000000000, & proinde recta quoque K M 9000000000000, invenire menſuram ſpatii I L M K. Producantur rectæ I K, O L, & ducatur recta I P, ut compleantur rectangula L N K M, Q I K M; manifeſtum eſt rectangulum L N K M eſſe 9000000000000000000-0000000. & Q I K M 90000000000000000000000000 & trapezium TAB. XLIV. fig. 1.

pezium L I K M eſſe medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc eſt 49500000000000000000000000. inveniatur inter rectangula L N K M, Q I K M, medium geometricum 2846049894151541398799042 quod erit pentagonum ſpatio hyperbolico L I K M regulariter circumſcriptum. Sitque ut trapezium LIKM unà cum dicto pentagono circumſcripto ad dictum pentagonum, ita duplum dicti pentagoni ad hexagonum ſpatio hyperbolico L I K M regulariter inſcriptum, nempe 2077975413183662816000983 5; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos ſeriei terminos convergentes: inter quæ ſit medium geometricum cujus quadrati duplum dividatur per idem medium geometricum unà cum majori termino ſeu pentagono circumſcripto; eruntque medium geometricum & quotus, ſecundi termini convergentes: atque ita continuetur ſeries hæc convergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem ſit in utroque termino convergente, nempe ad terminum vigeſimum; polygonum enim circumſcriptum eſt 2302585092995896153417 3864, & inſcriptum 23025850929931203593181124: adhibeatur deinde approximatio in hujus 23 & 24 demonſtrata, & invenientur termini intra quos conſiſtit vera ſpatii hyperbolici L I K M menſura, nempe 2302585092994045624017868 1, minor ſpatio, & 2302585092994045624017870 4 eodem major, & ideo non latet ſpatii menſura, quam invenire oportuit: totam polygonorum ſeriem hic appono unà cum numero rectarum curvam hyperbolicam ſubtendentium in unoquoque polygono circumſcripto.

Extra

TAB. XLIII.

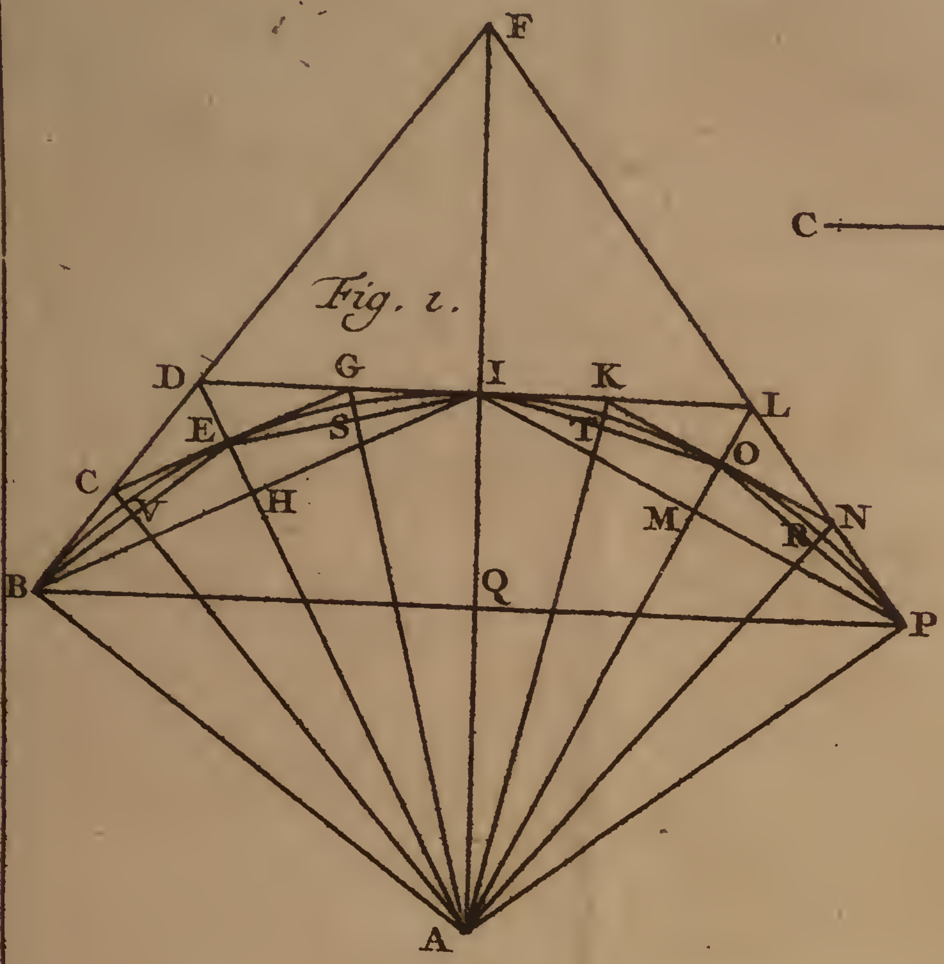


Fig. 1.

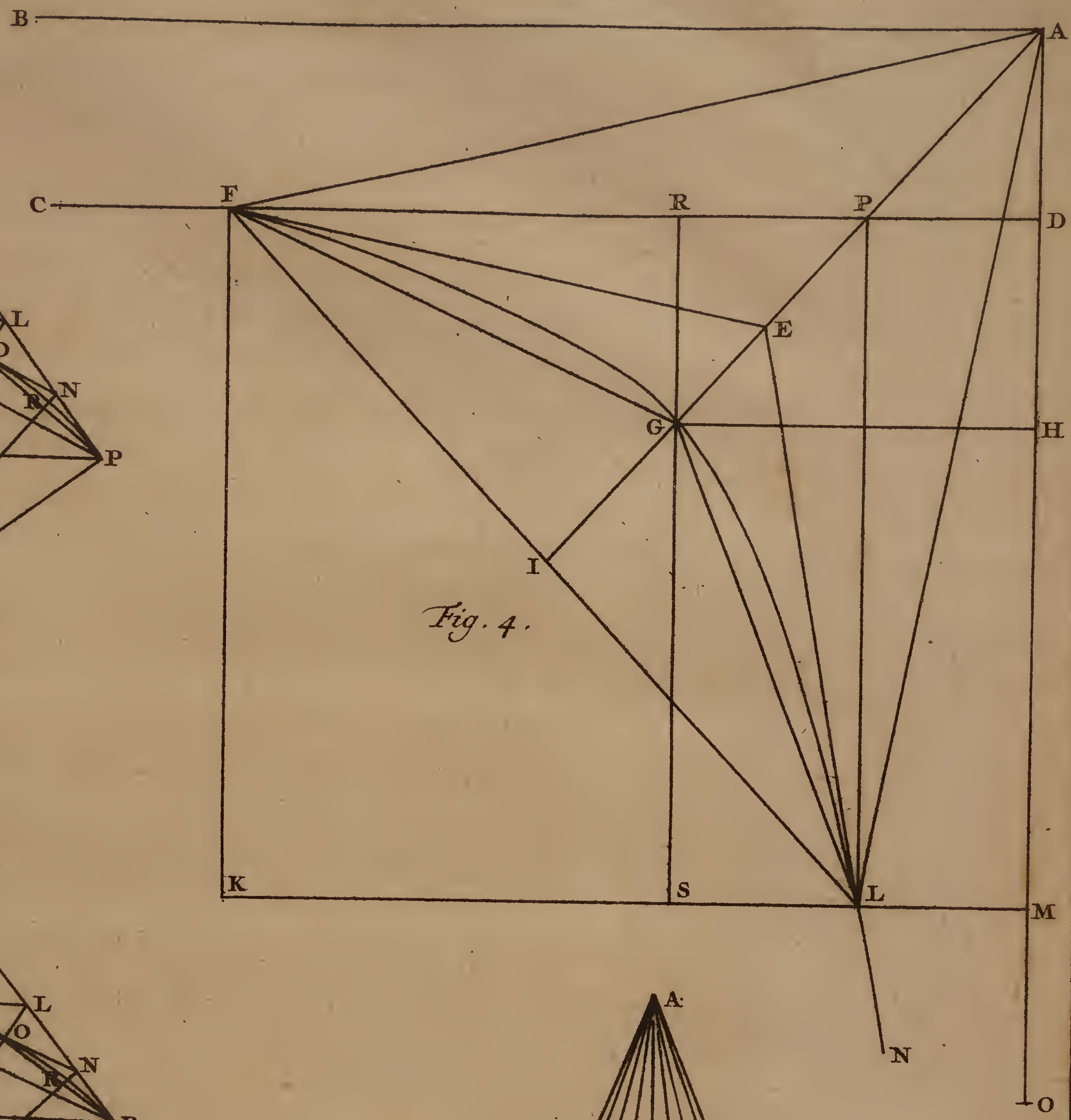


Fig. 4.

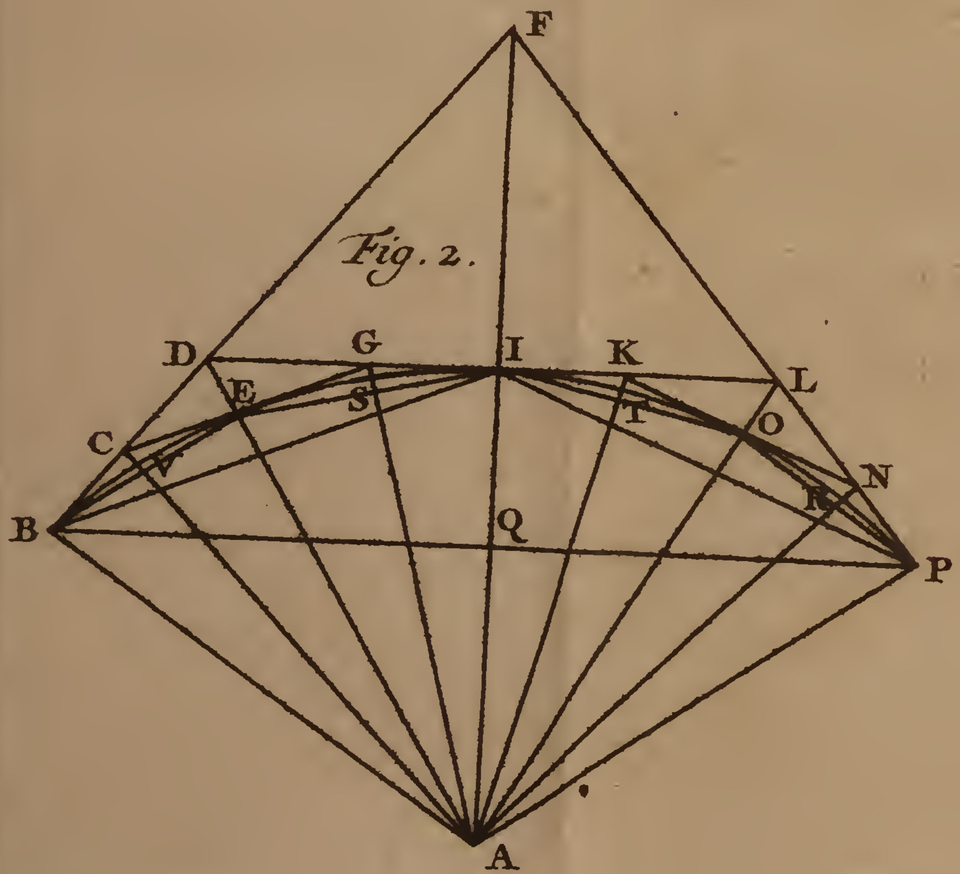


Fig. 2.

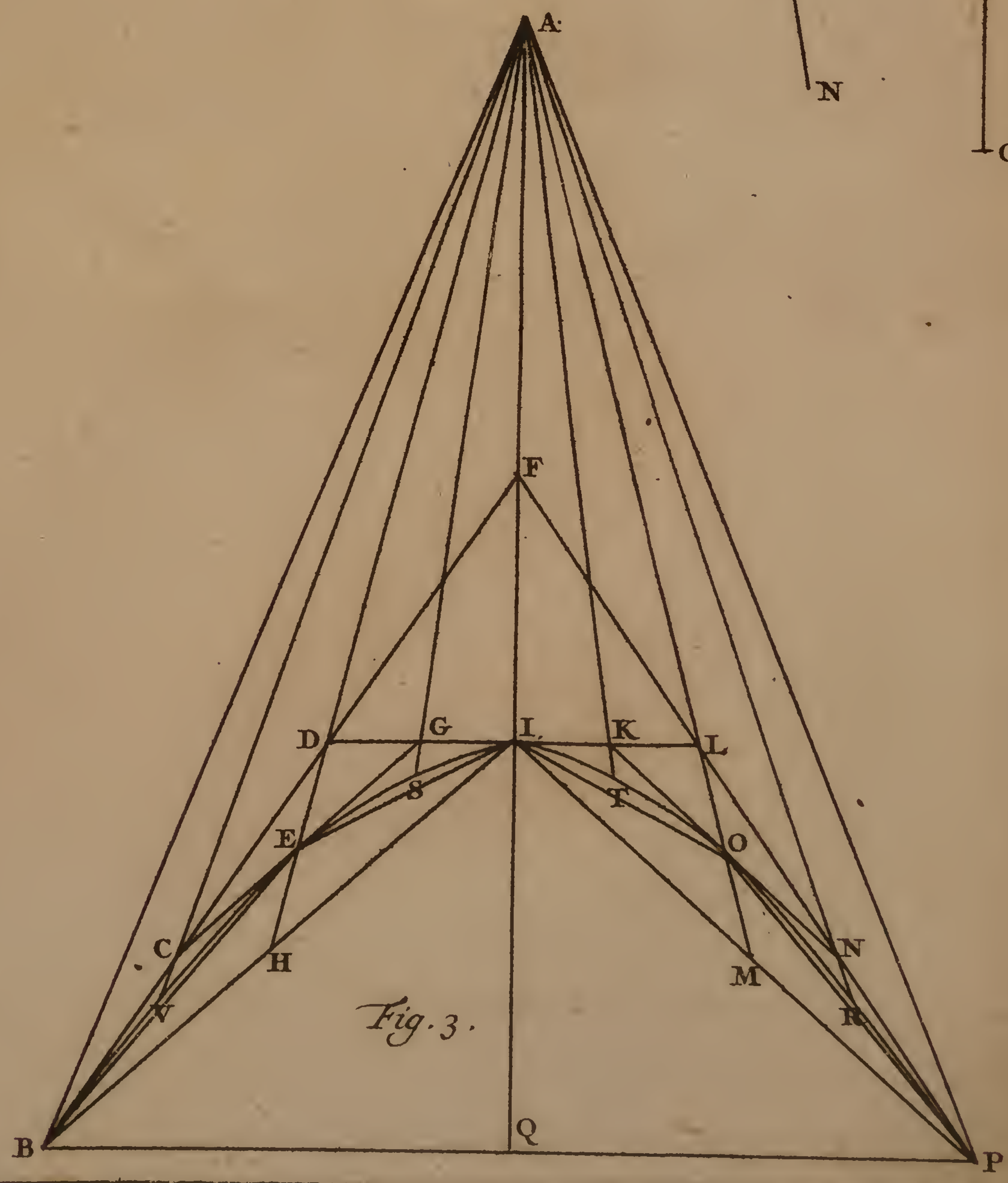


Fig. 3.

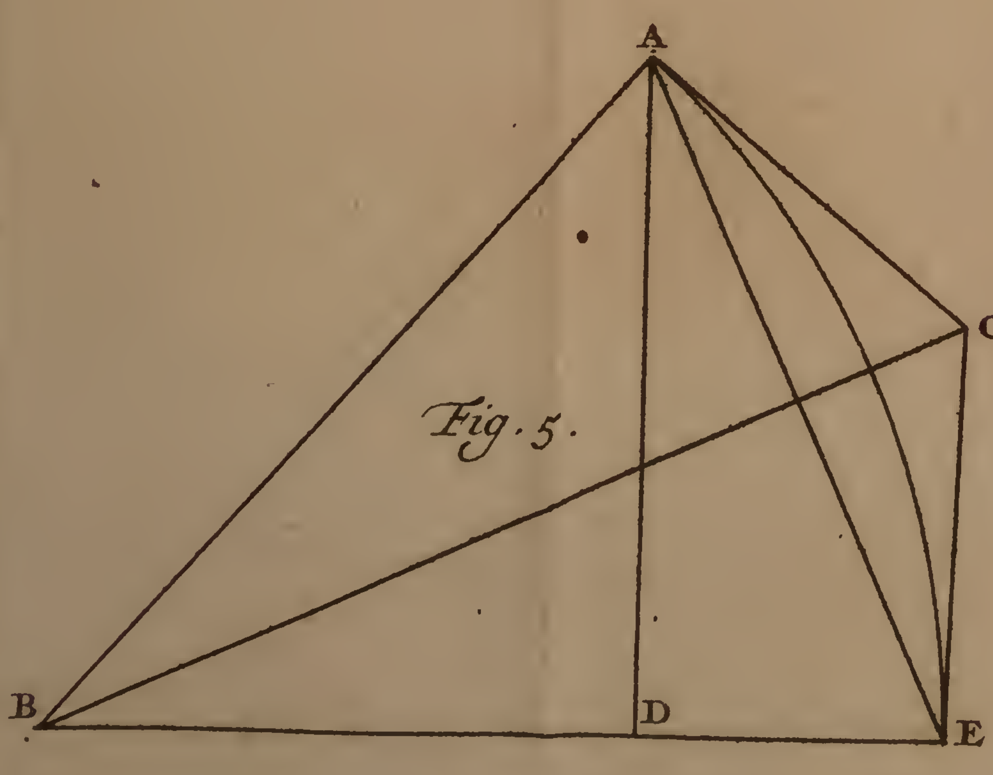
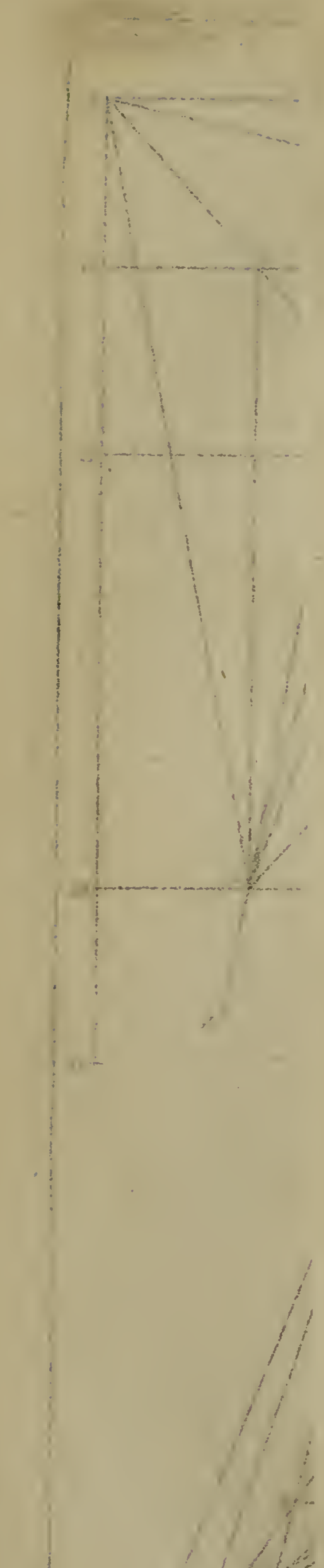


Fig. 5.



	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	28460498941515413987990042	20779754131836628160009835
4	24318761696971474416609403	22410399968461612921314879
8	23345088913234727934949897	22868197570682058351436953
16	23105412906351426185065096	22986193244865462241217428
32	23045725982658962868047234	23015921117139340153267671
64	23030818728479610745741910	23023367512879647736902891
128	23027092819292183214705676	23025230015404383009313933
256	23026161398510805910921810	23025695697539046352276636
512	23025928546847571901068394	23025812121604634087915779
1024	23025870334152518169052273	23025841227841783762272302
2048	23025855780992551911165543	23025848504414868310197241
4096	23025852142703422669729927	23025850323559001769499206
8192	23025851233131194254554390	23025850778345089029496888
16384	23025851005738140519209367	23025850892041614212944994
32768	23025850948889877295901163	23025850920465745719335070
65536	23025850934677811503232115	23025850927571778609090592
131072	23025850931124795055887228	23025850929348286832351848
262144	23025850930236540944102405	23025850929792413888218560
524288	23025850930014477416159412	23025850929903445652188450
1048576	23025850929958961534173864	23025850929931203593181124

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

23025850929940456240178681	23025850929940456240178704

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cujus numeri multiplices uſque ad decem, diviſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubjicimus; in magnis namque diviſionibus præſtat uti repetita diviſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diviſione, ut conſtat expertis arithmeticis.

Manifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolvi, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulum rectum: nos autem ita ſuppoſuimus, ut facilior & paratior eſſet problematis uſus in doctrina logorithmica, quam primò invenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc elevamus.

1	23025850929940456240178700
2	46051701859880912480357400
3	69077552789821368720536100
4	92103403719761824960714800
5	115129254649702281200893500
6	138155105579642737441072200
7	161180956509583193681250900
8	184206807439523649921429600
9	207232658369464106161608300
10	230258509299404562401787000

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Propoſiti cujuscunque numeri logorithmum invenire.

TAB. XLIV. fig. 1. Eiſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK unitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK unitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cujus deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectâ GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatium LMKI, in qua ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata ratio-

rationis LM ad IK in eadem ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in utraque ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadem ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniam ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeu denarii) erit ſpatium GIKH logorithmus numeri propoſiti GH, quoniam hæc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, ut ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt unus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium unitas cum numero quodam cyphrarum: ſi igitur fiat, ut ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inventus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem invenire oportuit.

SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde, ut abbrevietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolummodo laborare in inventione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum additione & ſubductione nullo negotio invenientur. ſed ut numerorum primorum logorithmi facilius inveniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempe à 10 cujus logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerum omnium primum, & à 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item à 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inveniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum unus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideo logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cujus quæritur logorithmus) vel ex illo unà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicentur hi numeri compoſiti

(qui exempli gratia ſint GH, EF) in hyperbola aſymptoto OA paralleli; & inveniatur ſpatium hyperbolicum EGHF per hujus 32, quod breviter, ſit quoniam GH, EF, parum inter ſe differunt. ex ſuppoſitione, unius numeri, exempli gratia GH, datur logorithmus, & proinde datur ejus logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quæ eadem eſt (ex hactenus demonſtratis) cum ratione ſpatii hyperbolici GIKH ad ſpatium hyperbolicum LIKM, datur autem ex hujus 32 ſpatium LIKM; & ideo innoteſcit quoque ſpatium IKHG, cumque detur ſpatium EGHF, innoteſcit quoque EIKF; & proinde datur logorithmus numeri compoſiti EF; cumque ex ſuppoſitione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cujus logorithmus deſideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quem invenire oportuit. Exempli gratia, propoſitum ſit invenire logorithmum numeri binarii, ſuppoſito arbitrario numeri denarii logorithmo, unitate cum 25 cyphris. duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes ſunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum ſpatii 2302585092994045624017870O in antecedente inventi, poſito ſcilicet illo ſpatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, eſt enim compoſitus ex ſolo numero primo 2, nempe ejus decies multiplicatus eſt. applicentur hi numeri compoſiti in hyperbola, ut dictum eſt; ſitque GH 1000, EF 1024: ſed quoniam IK unitas eſt 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024000000000000, & per hujus 32 inveniatur ſpatium EGHF 237165266173160421183067 (ſeriem convergentem hic appono,

ut lecto-

	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	237170824512628449899917	237162487062045867846886
4	237166655750699903737556	237164571388054419219371
8	237165613567087322970403	237165092476425954356426
16	237165353021613523599438	237165222748948181485250
32	237165287885271907848389	237165255317105572320456
64	237165271601188181041012	237165263459146597159038
	hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit	
	237165266173160272103220	237165266173160458453029

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolæ ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in utroque termino convergente.

ut lectori compendium pateſiat) ſeu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ poſito logorithmo denarii arbitrario 23025850929940456-240178700; deinde eodem ſuppoſito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, ſeu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque ſumma logorithmus numeri 1024, cujus pars decima erit logorithmus numeri binarii, pro eodem logorithmo denarii arbitrario, nempe 69314718055994529141171917: fiatque ut logorithmus numerii denarii 2302585092994045624017870 0 ad logorithmum numeri binarii correſpondentem 69314718055-99452914171917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propoſitus nempe 10000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quæſitum 3010299956639811952-405804, quem invenire oportuit: eodem modo invenitur logorithmus ternarii 4771212547196624373502993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compoſiti parum inter ſe differentes pro unoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis uſque ad 100, & unam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis ſupra 1000; quæ omnia ita excogitata ſunt, ut verus cujuscunque numeri primi logorithmus inveniri poſſit correſpondens logorithmo arbitrario denarii 100000-00000000000000000000 ex una ſola multiplicatione, duabus diviſionibus & una radicis quadratæ extractione, ultra inconſiderabiles aliquot operatiunculas.

2.	1000 $(^{3})$ 10 1024 $(^{10})$ 2
3	32805 factus ex 5 & 6561 $(^{8})$ 3 32768 $(^{15})$ 2
7	2400 factus ex 3 & 32 $(^{5})$ 2 & 25 $(^{2})$ 5 2401 $(^{4})$ 7
11	9800 factus ex 2, 49 $(^{2})$ 7 & 100 $(^{2})$ 10 9801 factus ex 121 $(^{2})$ 11 & 81 $(^{4})$ 3

13

13 123200 factus ex 7, 11, 25 $^{(2)}$ 5, 64 $^{(6)}$ 2
123201 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 729 $^{(6)}$ 3

17 2600 factus ex 13, 8 $^{(3)}$ 2 & 25 $^{(2)}$ 5
2601 factus ex 9 $^{(2)}$ 3 & 289 $^{(2)}$ 17

19 28899 factus ex 169 $^{(2)}$ 13, 9 $^{(2)}$ 3 & 19
28900 factus ex 100 $^{(2)}$ 10 & 289 $^{(2)}$ 17

23 25920 factus ex 10, 32 $^{(5)}$ 2 & 81 $^{(4)}$ 3
25921 factus ex 49 $^{(2)}$ 7 & 529 $^{(2)}$ 23

29 613088 factus ex 17, 23, 32 $^{(5)}$ 2, & 49 $^{(2)}$ 7
613089 factus ex 729 $^{(6)}$ 3 & 841 $^{(2)}$ 29

31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4 $^{(2)}$ 2, & 9 $^{(2)}$ 3
116281 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 961 $^{(2)}$ 31

37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 $^{(4)}$ 2
165649 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 1369 $^{(2)}$ 37

41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 $^{(2)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
1413721 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 841 $^{(2)}$ 29

43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3
978121 factus ex 529 $^{(2)}$ 23 & 1849 $^{(2)}$ 43

47 664848 factus ex 7, 13, 32 $^{(5)}$ 2 & 729 $^{(6)}$ 3
664849 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 2209 $^{(2)}$ 47

53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, $^{(3)}$ 2, & 125 $^{(3)}$ 5
3059001 factus ex, 9 $^{(2)}$ 3, 121, $^{(2)}$ 11 & 2809 $^{(2)}$ 53

57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 $^{(2)}$ 11
5851561 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 3481 $^{(2)}$ 59

61 3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 $^{(3)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
3575881 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 3721 $^{(2)}$ 61

67 1620528 factus ex 3, 13, 16 $^{(4)}$ 2 & 49 $^{(2)}$ 7
1620529 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 4489 $^{(2)}$ 67

71 2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & 49 $(^2)$ 7
2016400 factus ex 16 $(^4)$ 2, 25 $(^2)$ 5 & 5041 $(^2)$ 71

73 5116644 factus ex 4 $(^2)$ 2, 9 $(^2)$ 3, 169 $(^2)$ 13, & 841 $(^2)$ 29
5116645 factus ex 7, 17, 19, 31, 73

79 5997600 factus ex 17, 32 $(^5)$ 2, 9 $(^2)$ 3, 25 $(^2)$ 5 & 49 $(^2)$ 7
5997601 factus ex 961 $(^2)$ 31 & 6241 $(^2)$ 79

83 1164240 factus ex 5, 11, 49 $(^2)$ 7, 16 $(^4)$ 2, 27 $(^3)$ 3
1164241 factus ex 169 $(^2)$ 13 & 6889 $(^2)$ 83

89 2859480 factus ex 5, 47, 8 $(^3)$ 2, 169 $(^2)$ 13 & 9 $(^2)$ 3
2859481 factus ex 361 $(^2)$ 19 & 7921 $(^2)$ 89

97 1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & 8 $(^3)$ 2
1138489 factus ex 121 $(^2)$ 11 & 9409 $(^2)$ 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 ſit hæc regula: ante numerum primum cujus logorithmus quæritur, ſumantur immediatè duo numeri proximi, & poſt eum numerus immediatè ſequens, qui tres numeri cum illo primo ſunt quatuor numeri in ſuo naturali ordine ſe invicem ſequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertii & quartus in cubum ſecundi, eritque factorum differentia æqualis ſummæ primi & quarti vel ſecundi & tertii, ut facile demonſtrari poteſt; iſtique numeri facti habent ad minimum ſex notas primas omnino eaſdem, & proinde parum inter ſe differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertii) logorithmi cognoſcuntur ex ipſa progrediendi methodo, & ideo ad noſtram abbreviationem ſunt idonei. in numeris ultra 1000 non opus eſt tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorum, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cujus quæritur logorithmus, unitate ſolummodo deficit à quadrato numeri primi; eorumque ideo primæ ſex notæ ad minimum ſunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad noſtrum inſtitutum ſunt idonei.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Ex dato logorithmo invenire ejus numerum.

Ex demonſtratis manifeſtum eſt hoc problema idem eſſe ac ſi quis proponeret; ex dato ſpatio hyperbolico, & una recta uni aſymptotorum parallela illud comprehendente, alteram invenire idem ſpatium comprehendentem, & eidem aſymptoto parallelam. Conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet logorithmus denarii arbitrarius; & ſumatur logorithmi vel ſpatii dati talis pars aliquota nempe ſpatium LIKM, ut pentagoni ſpatio LIKM regulariter circumſcripti, & hexagoni eidem regulariter inſcripti toties multiplicia, quoties ſpatium datum multiplex eſt ſpatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarii; hoc enim facile fieri poteſt ex inſpectione tabellæ 32 hujus: datur ergo ſpatii LIKM menſura & recta IK unitas ex ſuppoſitione. Sit LM, z; ſicut in hujus 32 datur pentagonum ſpatio LIKM regulariter circumſcriptum & hexagonum eidem regulariter inſcriptum, inter quæ ſpatium datum LIKM eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium; & ideo duplum haxagoni una cum pentagono æquatur triplo ſpatii, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam z ſeu numerum LM, cujus toties multiplicatus, quoties ſpatium LIKM eſt ſubmultiplex ſpatii vel logorithmi dati, eſt numerus quæſitus, quem invenire oportuit. TAB. XLIV. fig. 1.

Hoc problema idem eſt cum hujus 8, ſed aliter generalius & methodo plerumque minus operoſa hic reſolutum.

PROP. XXXV. PROBLEMA.

Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, ſemicirculum in ratione data dividere.

TAB. XLIV. fig. 2. Sit ſemicirculus A D G, cujus diameter A G, centrum E, punctum in diametro datum B. ſupponatur factum quod jubetur; ſitque recta B D ſemicirculum dividens in ratione data: quoniam datur ſemicirculi menſura & ratio in qua dividitur, igitur datur ejus portio nempe D B G. Sit recta B D, *z*: ex datis rectis B D, B E, E D, innoteſcunt triangula D E B, D E F, D E G: deinde ſit ut D E F una cum D E G ad D E G ità duplum D E G ad trapezium circumſcriptum D E G H: & poſitis primis terminis convergentibus D E G, D E G H continuetur ſeries convergens polygonorum complicatorum, ſecundum circuli proprietates ſæpius repetitas, donec conveniens fuerit approximationem adhibere ita ut exhibeatur ſector D E G, qui una cum triangulo D B E æquatur portioni D B G cognitæ, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam quantitatem *z* ſeu rectam B D: reliqua patent.

Idem problema eodem omnino modo reſolvitur in ellipſe, hyperbola vel earum ſectore dato.

SCHOLIUM.

Si quis prædictorum problematum mechanicam deſideret praxim; non difficile erit calculum, approximationem, & æquationis reſolutionem ſecundum vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodammodo imitari, multa talia problemata poſſem hic reſolvere ope analyſios & noſtræ ſerierum convergentium doctrinæ, quæ antea impoſſibilia æſtimabantur: ſed dicet fortè aliquis has reſolutiones non eſſe geometricas; reſpondeo, ſi per geometricum intelligatur praxis

ope

ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt ; ſicut facile demonſtrari poſſet ; & ſi per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata ſunt geometrice impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe: ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima; invenietur fortaſſe poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta, diligenter animadvertendum totam ſerierum convergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. Sit enim ſeries A, B, C, D, E, &c, talis naturæ ut tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A, B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & ſic deinceps in infinitum; ſitque differentia antecedentium A, B, major ſemper differentia immediatè ſequentium B, C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorum terminorum immediate ſe invicem ſequentium nulla ſit differentia, ſitque unus ex illis terminis z, quem ſeriei terminationem appellamus: dico z eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab hujus 10 & ejus conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum a, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum b; erit hexagonum ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $Vq\,\frac{2\,b3}{a+b}$; & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b & $Vq\,\frac{2\,b3}{a+b}$; atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & ejus triangulum datum non ſit analytica, ſecundum

	A
	B
	C
	D
	E
	z

tenorem hujus 11: poſſem quoque adhuc alia methodo particulari demonſtrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad ſuam chordam datam: ſed plura non addo, geometras interim pro ſcientiæ incremento admonens, me reperiſſe in quibusdam figuris (quas Carteſius ſecundi generis appellat) tres focos, ſeu tria puncta, à quibus ductarum in quodlibet curvæ punctum rectarum ſumma vel differentia ſemper eſt eadem: unde mihi veriſimile videtur ſicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes ſecundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & ſic in infinitum: quæ certè ſpeculatio ſcrutatu digniſſima eſt, eſſet enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utiliſſima.

FINIS.

I. I.

HUGENII OBSERVATIONES IN LIBRUM JACOBI GREGORII, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

D^nus^ Hugenius rogatus à Societate quæ Pariſiis ſuos habebat conventus (1668) in Bibliotheca Regia, ut vellet hunc librum examinare, ſocietati retulit ſe multos errores obſervaſſe in demonſtratione, qua Auctor contendit impoſſibilitatem quadraturæ Circuli & Hyperboles probare.

I. in 11ª. Propoſitione, in qua auctor contendit Circuli quadraturam analytice impoſſibilem demonſtrare, hæc habentur *Si terminatio magnitudinum propoſitarum analytice componatur a primis terminis* $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$, *componetur etiam analyticè & eodem omnino modo a ſecundis terminis* $ba^2 + bba$ & $2.b^2a$. ſed licet id verum ſit quando terminatio inventa eſt per Methodum, quam indicat, non poteſt generalis inde deduci concluſio. niſi ponamus, non poſſe inveniri, niſi per ejus Methodum, terminationem ſeriei Magnitudinum, quas appellat *convergentes*, vel ſi aliâ methodo inveniatur illam etiam per ſuam methodum inveniri poſſe quod non demonſtravit.

II. Autor immediate poſt addit; *nullam quantitatem poſſe*

eodem modo analytice componi e terminis $a^3 + aab$, $abb + b^3$ *quo componitur e terminis* $aab + bba$, $2\,bba$. Hæc nihilominus invenitur per eandem methodum quam indicat in 7. Propoſitione. Methodus autem hæc eſt. Primo quærenda eſt quantitas per quam ſi multiplices $a^3 + aab$, & producto addas productum $abb + b^3$ multiplicati per datam quantitatem m, ſumma æqualis ſit ſummæ duorum aliorum productorum, unius $aab + bba$ multiplicati per eandem quantitatem quæſitam, alterius $2\,bba$ multiplicati per datam quantitatem m. Ponamus igitur quantitatem illam æqualem z; erit $a^3 z + aabz + abbm + b^3 m = aabz + bbaz + 2\,bbam$; & $z = \frac{bbm}{aa + ab}$. Et certum eſt, ſive multiplicetur $\frac{bbm}{aa + ab}$ per $a^3 + aab$ & addatur $abb + b^3$ multiplicatum per m, ſive eadem illa quantitas multiplicetur per $aab + bba$ & addatur $2\,bbam$, ſemper prodire eandem quantitatem $2\,abbm + b^3 m$, & conſequenter ultimam hanc quantitatem componi eodem modo e primis & ſecundis terminis progreſſionis convergentis propoſitæ, quod Autor fieri poſſe negavit.

III°. Datâ autem hac quantitate $2\,abbm + bbbm$, ſi hac utamur ad quærendam terminationem progreſſionis propoſitæ, juxta methodum ab auctore indicatam in 7 propoſitione, & in 10, reperietur $= \frac{3\,aab^3 + ab^4 + 2\,a^3 bb}{bb + ab + aa}$; & poſito $a = 1$ & $b = 2$, illa terminatio, quæ deſignat in eo caſu ſectorem circuli continentem $\frac{1}{3}$ totius circuli, erit $= \frac{48}{7}$; & primus terminus progreſſionis $a^3 + aab$, qui deſignat $\frac{1}{3}$ trianguli æquilateri inſcripti in eodem Circulo, erit æqualis 3; ita ut proportio circuli ad triangulum æquilaterum inſcriptum ſit ut $\frac{48}{7}$ ad 3, id eſt 16 ad 7. a vero nihilominus omnes has proportiones aberrare facile patet.

IV°. Si examinemus, cur terminatio aliquando occurrat vera per methodum Autoris, ut in 7 Propoſitione, interdum verò non; reperiemus id ex eo oriri quod problema 10^{mæ} Pro-

Propoſitionis non bene ſit ſolutum; Non enim ſufficit, ut inveniatur terminatio progreſſionis convergentis, inveniſſe quantitatem compoſitam eodem modo e primis & ſecundis terminis; nam talis ſolutio tantum locum habet quando quantitas illa detegitur, non inveſtigatâ quantitate quæ dicitur *z* in 7 Propoſitione; vel quum eadem quantitas non componitur ex ulla quantitate quæ datur in terminis progreſſionis, ut in 7a. Propoſitione, ubi $z = \frac{me}{d}$; nam Autor ſumendo $z = \frac{mae-mbe}{ad-bd}$ non videtur obſervaſſe, diviſionem poſſe fieri per *a-b*.

In exemplo propoſitionis 10, non quæritur quantitas *z*, ſed *z* appellatur ipſa terminatio; & in tranſitu notandum eſt exemplum illud allatum eſſe citra propoſitum nam progreſſio, cujus primi termini ſunt *a*, *b*, & ſecundi & *Vab*, $\frac{aa}{Vab}$ non eſt progreſſio convergens, neque habet terminationem, quamvis autor illam inveniat.

Quod attinet ad methodum, quam Autor propoſuit ad appropinquandum per numeros ad dimenſionem Circuli; D^us Hugenius dixit ſibi videri ſe quid magis accuratum dediſſe in libro cui titulus eſt *de Circuli magnitudine*, edito 1654. Addidit illa, quæ Gregorius habet de dimenſione Hyperbolæ & ratione quam habet cum Logarithmis, bona quidem eſſe ſed minime nova membris ſocietatis, cum poſſint recordari, ſe ipſis idem jam propoſuiſſe; regulamque ad inveniendos logarithmos, jamdudum actis eorum inſertam eſſe. Se etiam non credere illud novum videri regiæ ſocietati Anglicanæ, cum qua jam ante plures annos communicavit methodum ad invenienda pondera aëris in diverſis altitudinibus ſupra terram; quæ fundamentum in hac ipſâ Hyperbolæ dimenſione habet.

Hæc autem eſt methodus, quam D^us Hugenius propoſuit ad inveniendum per logarithmos dimenſionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Aſymptotis & duas lineas paralelas ad alteram Aſymptoton, data ratione quam in-

inter ſe habent duæ hæ lineæ. *Si logarithmus differentiæ logarithmorum horum numerorum ſemper addatur ad* 0, 36221, 56868, *ſumma erit logarithmus numeri partium, quas continet Spatium Hyperbolicum, illarum quarum* 1.0000000000 *continet parallelogrammum Hyperbolæ, id eſt illud, quod eſt contentum a duabus lineis ductis ex uno Hyperbolæ puncto, & quarum quævis parallela eſt uni ex Aſymptotis*; Exempli gratia ſi parallelæ, quæ includunt ſpatium Hyperbolicum ſint inter ſe ut 36 ad 5 operatio hoc pacto fiet.

1, 5563025008	*Logarithmus* 36.
0, 6989700043	*Logar.* 5.
0, 8573324965.	*Differentia.*
9, 9331492856	*Logar. Differentiæ.*
0, 36221 56868	*Logar. qui ſemper additur.*
10, 2953649724;	*Logar. cujus numerus facit contentum*

in Spatio Hyperbolico, quod hic eſt 1.9740810180.

III.

DOMINI GREGORII RESPONSUM AD ANIMADVERSIONES DOMINI HUGENII, IN EJUS LIBRUM, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

AD ea quæ dicit D. *Hugenius* contra meam *Circ. & Hyperb. Quadraturam*, ingenuè fateor (cum illa ſcriberem) me non animadvertiſſe exemplum in prop. 10. non eſſe ſeriem convergentem expe-

perientiam enim feci ſolummodo de primis & ſecundis terminis, non conſiderando tertios cum primis coincidere, nam ratiociniis inſiſtebam, de exemplis parum ſolicitus. Ut autem appareat in hoc nihil contineri contra noſtram Doctrinam, agedum hoc loco 10: *prop.* totidem verbis, ſed cum legitimo exemplo repetamus.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediate ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint *a*, *b*, & termini convergentes immediatè ſequentes $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$, termini priores inter ſe multiplicati efficiunt eandem *ab*, item ſequentes inter ſe multiplicati efficiunt eandem *ab*; ex his invenienda ſit propoſitæ ſeriei terminatio. Manifeſtum eſt, quantitatem *ab* eodem modo fieri à terminis convergentibus *a*, *b*, quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$: & quoniam quantitates *a*, *b*, indefinitè ponuntur pro quibuſlibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt, duos quoſcunque terminos convergentes propoſitæ ſeriei inter ſe multiplicatos idem efficere productum, quod faciunt termini immediatè ſequentes etiam inter ſe multiplicati; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequantur, manifeſtum eſt, duos quoſcunque terminos convergentes inter ſe multiplicatos idem ſemper efficere productum, nempe *ab*; atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus, ſeu ſeriei terminatio Z, quæ in ſe ipſam multiplicata facit

$Z^2 = a\,b$; eſt igitur Z. ſeu ſeriei terminatio $r^2\,a\,b$, quam invenire oportuit: & proinde ad inveniendam cujuſcunque ſeriei convergentis terminationem opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in Problemate, *ſive termini convergentes*, a, b, *ſint primi, ſecundi vel tertii, &c. manifeſtum eſt, omnis ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo ex ſecundis, tertiis, &c.*

Si quis aliud Exemplum deſideret, ſint primi termini a, b, ſecundi $r^7\,a^5\,b^2$, $r^2\,a\,b$, quantitas eodem modo compoſita &c. eſt $a^7\,b^4$ & ſeriei terminatio $r^{11}\,a^7\,b^4$: videat *Hugenius*, duo exempla legitima hic adducta inquiſitionem *Septimæ* non admittere; ope tamen *prop. decimæ* (ſuppoſita tertia illa quantitate) facilè reſolvuntur, neque ullo modo conſectarium reſpuunt, quod ſolummodo eſſe momenti ſatis ſit indicaſſe; plura autem exempla deſideranti millena afferam.

Ad primam *Hugenii* objectionem quod ſpectat, miror eum non conſideraſſe præcedens *conſectarium*, ubi illa, quæ deſiderat, evidenter deduco ex *prop.* 10. At agnoſcit hoc verum eſſe in illis ſeriebus, quæ ope noſtræ methodi terminantur: velim certè ut aſſignet mihi Nobiliſſimus Vir ſeriem aliquam convergentem cum ſua terminatione, quæ conſectarium noſtrum reſpuat; vel ſi eam aſſignare non poſſit, ſolidam dubitandi rationem tantum deſidero. Ut autem funditus evertatur hæc objectio, ſequentem exhibeo demonſtrationem Geometricam.

Sit

Sit A. Polygonum regulare ſectori *inſcriptum*. B eidem ſimile *circumſcriptum*; continetur ſeries convergens polygonorum &c. ut ſit ejus terminatio ſeu circuli ſector Z: ſit X eodem modo compoſita à terminis C, D, quo Z à terminis A, B; dico Z & X eſſe indefinitè æquales; ſi non ſint indefinitè æquales, ſit inter illas indefinita differentia *a*, & continuetur ſeries convergens in terminos convergentes I, K, ita ut eorum differentia ſit minor quam *a*; hoc enim abſque dubio concipi poteſt, etiamſi hic omnes quantitates ſint indefinitæ, quoniam definitis quantitatibus A, B, definitur etiam *a*, ſed adhuc reſtat K-I quantitas indeterminata in infinitum decreſcens. Manifeſtum eſt, *ſectorem* Z eſſe indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex quantitatibus A, B, quo X. è quantitatibus C, D, & Z indefinitè minor eſt quam K & major quam I, patet ex Proprietatibus ſerierum convergentium, X etiam eſſe indefinitè majorem quàm I, & minorem quàm K (eſt enim revera indefinitè major quàm L & minor quam M) & proinde ſunt quatuor quantitates indefinitæ, quarum maxima & minima ſunt I, K, intermediæ autem Z & X, & ideo differentia extremarum K-I major eſt quàm *a* differentia mediarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor; quantitates ergò Z & X non ſunt indefinitè inæquales, & ideo ſunt indefinitè æquales, quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt hanc demonſtrationem eodem modo applicabilem eſſe omni ſeriei convergenti.

A	B
C	D
E	F
G	H *a*
I	K
L	M
Z	
X	

In objectionibus 2, 3, & 4, contra ſuas ipſius imaginationes argumentatur *Hugenius*: Ego enim ſatis dilucidè affirmo in *Scholio propoſit*. 5. & in *fine prop*. 9. Septimam & nonam propoſitionem eſſe Particularem, unamquamque ſuo caſui; item in *Prop. decima* (quàm ergo pro generali ſubſtituo) evidenter ſuppono, & non quæro, illam quantitatem eo modo compoſitam ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; ſatis enim ſcio, talem methodum genera-

lem eſſe impoſſibilem. Sed omnium maxime admiror, Clariſſimum Virum non animadvertiſſe in 8. *definitione*, Quantitates C, D, E, compoſitionem ingredientes, ſemper eſſe eaſdem, nempe definitas & invariabiles, ipſos autem terminos A, B, eſſe indefinitos & variabiles, nimirum in F, G, & infinitos alios: at quis eſt qui non videt *Hugenii* $\frac{b2\,m}{a2 \dagger ba}$ non minus eſſe indefinitam, quam ſunt ipſi termini? Deinde in *Proœmio noſtræ Geometriæ partis univerſalis*, ſic dico. *Alii objiciunt contra prop.* 11. *ita: ſi addatur* a^3 *termino* $a^3 \dagger a^2b$ & *temino* $ba^2 \dagger b^2a$, *enervetur vis utriuſque demonſtrationis. Reſpondeo*, a^3 *eſſe quantitatem indefinitam, & alias quantitates indefinitas præter ipſos terminos convergentes compoſitionem non poſſe ingredi, quod analyſtam latere non poteſt*: Eodem modo reſpondeo *Hugenio* $\frac{bbm}{a2 \dagger ab}$ eſſe quantitatem indefinitam, & ideo compoſitionem non poſſe ingredi: Si autem mihi objiciat, in *ſeptima* me crediddiſſe, $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ fuiſſe quantitatem indefinitam; Reſpondeo, etiamſi diviſio per *a-b* à me ſatis inconſideratè neglecta ſit, apertè tamen conſtat, me hoc cognoviſſe, ex diverſitate methodorum, quibus utor in ſeptima & decima, quippe iſta *particulari*, in qua quantitatem illam quæro, & hac *generali*, in qua illam ſuppono; nulla enim alia ratio hujus diverſitatis excogitari poteſt; quod etiam ex ipſis *ſeptima* & *decima* eſt manifeſtum, cum appellem ſemper terminos convergentes quantitates indefinitas, hoc ipſo ſatis ſignificans, nullas alias quantitates indefinitas calculo ineſſe.

Semper credidi in rebus ſcientificis verba ita candidè eſſe explicanda (ſi modo poſſibile ſit) ut diſcurſus nullum includat abſurdum; at *Hugenius* ſatis percipit, diſcurſum nihil continere abſurdi, modò nulla quantitas indefinita præter ipſos terminos compoſitionem ingrediatur; judicat tamen abſque omni ratione, me contrarium exiſtimaſſe; libenter enim optarem *Hugenium* aſſignaſſe locum, ubi aſſero, illam inqui-

quiſitionem. Septimæ eſſe univerſalem. Dico igitur & declaro me intelligere, nullam quantitatem indefinitam præter ipſos terminos convergentes compoſitionem poſſe ingredi. Atque ita corruunt tres ultimæ *Hugenii* ſive diverſæ objectiones, ſive ejuſdem portiones; neſcio enim, quare in tot partes dividatur.

Præcedentibus perceptis, evidentiſſimum eſt, *Circuli*, *Ellipſeos*, vel *Hyperbolæ* ſectorem eſſe terminationem ſeriei convergentis, cujus primi termini $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, & ſecundi $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$ * & proinde Sectorem eodem modo componi ex primis terminis quo ex ſecundis*; atque evidens eſt, nullam dari quantitatem eodem modo analyticè compoſitam ex primis terminis quo ex ſecundis, quoniam primos eodem modo analyticè tractando quo ſecundos, ſemper reſtat altior poteſtas ipſius a in primorum producto, quam in producto ſecundorum; de hoc (ſi non credatur) fiat experientia, & conſtabit non ſolum aſſertionis veritas, ſed etiam ejuſdem demonſtratio; quando autem altior eſt ejuſdem poteſtas in una quantitate quàm in altera, nulla datur indefinita æquatio, de qua hic tantum loquimur, hoc eſt, ut (poſitis a, b, ad libitum,) æqualitas ſemper rite procedat. Atque hæc eſt ſumma non ſolum propoſitionis undecimæ ſed etiam totius noſtræ *Circ.* & *Hyp. Quadraturæ*, ab *Hugenio* adhuc intactæ. Gratias tamen ago nobiliſſimo viro, quod meas qualeſcunque lucubrationes examinare dignatus eſt, hinc enim mihi data eſt occaſio illas fuſius explicandi & confirmandi. Num *Hugeniana* methodus circulum menſurandi mea ſit præciſior, experientiæ relinquo judicandum; quod autem noſtra, *Hyperbolam quadrandi*, illi etiam innotuerat, de hoc nihil habeo quod dicam, niſi quod mihi gratuler, inventa mea ipſo *Hugenio* non æſtimari indigna.

* *Schol.* 5.
* *Conſ.* 10.

IV.

EXCERPTA EX LITERIS D^{ni}. HUGENII DE RESPONSO, QUOD D^{nus}. GREGORIUS DEDIT AD EXAMEN LIBRI, CUI TITULUS EST, *VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.*

In circuli quadraturam inquirentes Geometræ, varia & quidem pulcherrima detexere, ideo ne utili exercitio deſtituantur adverſus Gregorium defendere conſtitui, quadraturam hanc detegi poſſe; neque huc uſque reſponſionem hanc diſtuliſſem, niſi occaſione controverſiæ noſtræ examen ſuſcepiſſem exactiſſimum de proxima Circuli & Hyperboles Quadratura: in quo me interpellarunt ſæpe alia impedimenta.

Dico nunc primo; Quod ſpectat impoſſibilitatem analyticam quadraturæ illarum figurarum, tantum abeſſe etiam poſt ſupplementum demonſtrationum, quod D^{nus} Gregorius dedit, impoſſibilitatem hanc bene probatam eſſe, ut adhuc dum incertum maneat, num Circulus & quadratum diametri ejus ſint incommenſurabilia, id eſt an non horum ratio per numeros poſſit exprimi; quod etiam applicari poteſt portioni determinatæ Hyperboles & figuræ huic inſcriptæ. Quod ut demonſtremus ſufficit obſervaſſe; quod XI ejus Propoſitio & ſupplementum nil probent quando in ejus ſerie convergente determinantur quantitates *a* & *b* per numeros rationales vel ſurdos; quoniam tunc terminatio etiam poterit eſſe numerus quidam ſimilis; & contrarium per illam propoſitionem demonſtrari non pote-

terit, quoniam tunc ignotum erit, quomodo terminatio compoſita ſit ex primis & ſecundis terminis. E. G. Si *a* ſit 1 & *b*, 2 quomodo probabitur per XI ejus Propoſitionem, terminationem non eſſe $\frac{7}{3}$. Ut ergo concludatur, rationem Circuli ad quadratum diametri ejus non eſſe analyticam, demonſtrari non ſolum debet, quod ſector Circuli non ſit analyticus indefinite ad figuram ſuam inſcriptam, licet illa demonſtratio non careat ſuâ pulchritudine, ſed quod illud etiam verum ſit *in omni caſu definito*.

Dico præterea, ſi quantitates *a* & *b* maneant indeterminatæ, terminationem forte reduci ad æquationem ex iis, quarum radices dari nequeunt; & contrarium probari per XI ejus Propoſitionem, neque per Supplementum, non poterit, nihilominus ſi illa terminatio reducta ſit ad quandam æquationem ejus naturæ, crederem Quadraturam Geometricè eſſe inventam per interſectionem quarundam linearum curvarum, quæ in Geometriâ admittuntur.

Non inhærebo in aliis objectionibus, quas propoſui; Dicam tantum, has, ſicuti locum amplius non habent poſt correctionem Dn. Gregorii, ita antea firmo fundamento nixas fuiſſe; quoniam omiſſa diviſione neceſſariâ per *a*- *b* in tot locis propoſitionis VII. poterat præſumi illum non noviſſe talem diviſionem eſſe poſſibilem, & conſequenter illum crediḋiſſe, in compoſitione de qua agitur indefinitas admitti debere quantitates.

Tranſeo igitur ad comparationem noſtrarum methodorum pro dimenſione Circuli proxima: Certum eſt, primas ejus approximationes quarum fundamentum ſunt ipſius propoſitiones XX, & XXI. eaſdem eſſe cum iis, quas dedi in tractatu *de Circuli magnitudine*; ubi demonſtravi eadem illa Theoremata, ſcil. ſi Polygonum in Circulo inſcriptum ſit *a*; & Polygonum ſimul circumſcriptum ſit *d*: contentum Circuli minus eſſe quam $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ *, ſed majus quam $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ *, poſito *c* pro Polygono inſcripto quod duplo majorem habeat laterum numerum quam *a* vel *d*. Quidquid hic dico

* *Vide ſupra pag. 861. pr. VI.*

* *Vide ibid. prop. V.*

&

& in ſequentibus dicam de Circulo debet intelligi pariter de ſectore Circuli.

Præter hanc approximationem D. Gregorius aliam proponit in fine ſuæ XXV Propoſitionis, quam admirandam dicit, cujus demonſtrationem ſe ignorare fatetur; hæc eſt, inter duos terminos, ſtatim memoratos $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ & $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$, inventis quatuor mediis quantitatibus in proportione Arithmetica, aſſerit maximam harum quantitatum adeo Circuli magnitudini vicinam eſſe, ut, ſi in numeris, qui deſignant Polygona ſimilia a & d, prima notarum triens ſit eadem, error ad unitatem non pertingat.

Sed invenio hanc approximationem in Circulo veram non eſſe licet in Hyperbola locum habeat, &, dum in hac utimur maxima quatuor mediarum Arithmeticarum proportionalium, minimam pro approximatione Circuli adhibendam eſſe.

Ita minima quatuor mediarum proportionalium inter terminos dictos primæ approximationis erit $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, uti facile eſt videre per Calculum; & probare poſſum non ſolum experientiâ, ſed & per demonſtrationem quantitatem hanc, poſitis numeris quorum prima notarum triens eadem eſt, exprimentibus polygonis a & d, a vera Circuli magnitudine non aberrare niſi in duabus ultimis notis, & plerumque in omnibus notis & ulterius cum vera magnitudine conincidere, quam tamen ſemper ſuperat, cum e contrario maxima quatuor Mediarum, qua utitur D[us] Gregorius in Hyperbola deficiat.

Inveni præterea, approximationem hanc pro Circulo non æque accuratam eſſe, ac eſt illa quam dedi in Tractatu de *Circuli magnitudine*, juxta quam, quando a, c & d deſignant eadem Polygona, ac ſupra, terminus excedens contentum Circuli eſt $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ * Neque demonſtratio difficilis eſt, quoniam ſi neges illum terminum eſſe minorem ideoque magis exa-

* vide ſupra p. 383. in fine.

ctum

ctum quam præcedentem $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, ſequetur, cubum $c - a$ non fore majorem nihilo, & c non majorem quam a contra hypotheſin, uti facile videre eſt per calculum analyticum, obſervando quod d ſit $= \frac{cc}{a}$.

Poſſunt etiam a & c ſumi pro circumferentiis Polygonorum inſcriptorum, quorum unum ſubdupluni laterum habet numerum; Et tum terminus $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ eſt longitudo circumferentiæ Circuli, aut arcus ſectoris parum admodum excedens, ut ſi notarum triens in a & c ſit eadem, error dari non poterit niſi in ultima nota, & ſæpius nequidem in quatuor vel quinque notis ſequentibus ultra illas quæ dantur in numeris a vel c.

Sed & ut illi, qui contemplationes has negligunt, tamen quid commodi ex noſtra controverſia capiant, addam hic Geometricam conſtructionem ex ultimâ approximatione deductam qua invenitur longitudo arcus Circuli dati adeo acurata quam ad uſum deſideratur.

Sit arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam A B C, cujus ſubtenſa ſit A C; dividat hanc ut & arcum in duas partes æquales linea B D. TAB. XLIV. fig. 3.

Ducta ſubtenſa A B ſumantur ejus $\frac{2}{3}$ & ponantur ab A ad E in producta lineâ C D; tum diminuta D E decimâ parte E F, ducatur F B, & tandem ipſi perpendicularis B G. Erit linea A G æqualis arcui A B, vel dupla linea æqualis arcui A B C, quæ tam parum excedet, ut tunc etiam, quum arcus erit æqualis ſemicircumferentiæ Circuli exceſſus non ſit $\frac{1}{1400}$. longitudinis; ſed ſi tantum ſit $\frac{1}{3}$ circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$, ſi autem arcus tantum ſit pars quarta circumferentiæ error non erit $\frac{1}{90000}$ longitudinis.

Poſſem hic addere approximationem & conſtructionem omnino ſimilem pro quadratura Hyperboles, paulo magis accedentem ad veram quam media Arithmetica D^ni^. Grego-

rii, de qua ſuperius dixi, ſed vererer, ne nimium hoc ſcriptum producerem, & certus ſum præterea, poſt illa, quæ D[ni]. Mercator nuper feliciter invenit de illa quadratura, & correctionem D[ni]. Wallisii, inventa noſtra hac de re parum eſſe conſideranda.

V.

EXCERPTA EX EPISTOLA

D. JACOBI GREGORII,

CONTINENTE QUASDAM EJUS CONSIDERATIONES, SUPER EPISTOLA

D. HUGENII,

IMPRESSA IN VINDICATIONEM EXAMINIS SUI LIBRI, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Ex duobus argumentis, quibus conatur Nob. D. *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, reſponſionis fundamentum dedi in *Proœm.* ad *Geometr. partem univerſalem;* alterum autem provenit ſolummodo à Prop. 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta; quam tandem admittit poſt correctiones (ut inquit) à me factas. Ut autem, ſimul cum reſolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admiſſa *Prop.* 11. in forma probare conabor Syllogiſtica, Nullam eſſe rationem analyticam inter Circulum & Diametri Quadratum: Præter Modum quippe & figuram nil deeſt in hactenus à me publicatis, quin

quin id integrè demonſtretur; quæ interim forma rarò à Geometris exigitur. Dico itaque;

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum & Diametri Quadratum, tunc Circulus analyticè componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum E. Sequela Majoris ſic probatur;

Quantitas quæſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione, quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinat, idemque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad Diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, h. e. ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & diametri Quadratum; Ex dictis quantitatibus determinantibus *analyticè* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analyticè componi poſſunt, quæ ad ea rationem habent analyticam.

Secundi Syllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt axioma ab omnibus Geometris tacitè admiſſum.

Minor Syllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto & circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto & Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11. *Prop.* Quadrans Circuli ſeu ſector non poteſt componi analyticè ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. E.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo; Prop. 11. veram eſſe in Methodo indefinita; ſed poſſe eſſe falſam in methodis Particularibus. At inſto: Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus Particulares eſt reſolubilis. Sed hæc methodus indefinita, nempe quod ſector ſit terminatio datæ ſerie convergentis, in nullam particulararem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates æquales in ſe mutuò ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si hæc Methodus

indefinita reſolvetur in aliquam particularem, reſolutio fieret vel ab Analyſi *ſpecioſa* vel *numeroſa*. Sed neutrum dici poteſt. E. *Major* patet ex ſufficienti enumeratione. *Minor* ſic probatur: Non ab Analyſi *ſpecioſa*, quoniam hæc Methodus *indefinita* ad eam eſt irreducibilis, ut patet ex Prop. 11. Non à *Numeroſa*, quæ hic eſt interminabilis, proindeque invariabilis.

In hanc ultimam diſtinctionem reſolvitur 1. objectio *Hugenii*. Velim enim Nobiliſſ. Virum conſiderare, omnem plenam Problematis ſolutionem eſſe *indefinitam*. Nam Methodi *particulares*, cum ſint *infinitæ*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi poſſunt à tenore Problematis quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur Methodus *Generalis* ſeu Indefinita, Particularium directrix. Agnoſco utique Methodos Particulares caſu ſæpe inveniri abſque ope Generalis; attamen fatendum eſt Geometris, nullam eſſe, nec poſſe fieri Mothodum Particularem, in quam reſolubilis non ſit Methodus indefinita. Si igitur Methodus Indefinita omni reſolutioni ſit impervia (ut in *Prop.* 11. eſt demonſtratum) eodem modo omnes Particulares reſolutionem etiam reſpuent; proindeque tam Definita, quam Indefinita nullam compoſitionem agnoſcit. Talis enim Compoſitio, qualis Reſolutio.

Etiamſi prædicta, meo quidem judicio, adundè ſufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11^{mam} noſtram *Prop.* etiam in *Definitis* hic demonſtrabimus. Sit ergò B Polygonum intra Circuli ſectorem, 2B Polygonum circumſcriptum & priori ſimile; ſufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definitè demonſtretur. Continuetur ſeries convergens ut ſit ejus teminatio ſeu Circuli Sector Z. Dico, Z non poſſe componi *analyticè* ex Polygonis *definitis* B, 2B. Si fieri poteſt, componatur Z Analyticè ex Polygonis Definitis B, 2B. ſintque duæ quantitates Indefinitæ *a* & *x*, è quibus componatur *m* eo-

B	2B
C	D
E	F
G	H
Z	
a	*x*

dem

dem modo, quo Z. componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur n ex quantitatibus $\sqrt{ax}$, $\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$: quantitates m, n, non ſunt indefinite æquales ex *prop*. 11. Si igitur inter m & n fingatur æquatio; a manente quantitate indefinita, æquatio inter m & n tot habebit radices ſeu quantitates, in quas reſolvitur x, quot quantitatum, inter ſe diverſas rationes habentium, binarii ſunt in rerum natura, quæ vices quantitatum a, x, ſubire poſſunt, h. e. quæ eandem quantitatem *Analyticè* ex ſe ipſis componit eodem modo, quo eandem quantitas componitur ex ipſarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & x, nempe $\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$, ita ut compoſitio ſit eodem modo quo Z componitur ex B & 2B. atque ex Conſectario *Prop*. 10. omnes quantitatum binarii, rationes quoque diverſas inter ſe habentium, B 2B, CD, EF, GH, &c. in infinitum, poſſunt ſupplere vices quantitatum a, x, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex CD, EF, vel GH, &c. & proinde æquatio inter m & n radices habet numero infinitas. Sed omnis æquatio habet ad ſummum tot radices, quot habet dimenſiones; & proinde æquatio inter m & n dimenſiones habet numero infinitas, quod eſt abſurdum; ideoque Z ſeu Circuli Sector non poteſt analyticè componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonſtrandum erat. Hinc manifeſtum eſt, Terminationem cujuſlibet ſeriei convergentis, ſi non poſſit componi ex terminis convergentibus *indefinitè*, nec poſſe componi *definitè*; adeoque evaneſcit ſimul cum noſtra diſtinctione Objectio *Hugenii* prima.

$\sqrt{ax}$	$\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$
m	
n	

Idem in Objectione ſua ſecunda non videtur advertiſſe, me non ſolum in Prop. 11. ſed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Reſolutionem omnium poteſtatum ſive purarum ſive affectarum; omnium quippe eadem eſt ratio, neque ulla imaginabilis eſt in demonſtratione diverſitas; ſive Sector ſupponatur Radix ali-

cujus poteſtatis puræ, ſive affectæ ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus, quo ex ſecundis (ut in Conſect. *Prop.* 10. eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive puræ, ſive quocunque modo affectæ eodem modo componitur è primis, quo è ſecundis terminis convergentibus, quæ (in Analyticis exhibitæ) erunt æquales quantitates eodem modo Analyticè compoſitæ ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Prop.* 11. admiſſam. Senſus igitur integer *Prop.* 11. eſt Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis, invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam æquationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes prop. 20. & 21. eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *prop.* 25. non percipere videtur *Hugenius*; aliam interim ſibi fingit: hanc primò meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lentè hic feſtinandum.

Sit *a* Polygonum, Circulo vel ſectori inſcriptum, *c* Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, *d* autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi *c*. Ex 20. *prop.* Sector eſt major quam $\frac{4c-a}{3}$; & ex 21. Sector eſt minor quam $\frac{2d+c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor continuè proportionalium $\frac{8d+8c-a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona *a* & *d* ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe *c* & *d*, quæ duplò plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolùm verbis *prop.* 25. ſed & praxi *prop.* 30. eſſe conſonam, ubi approximationem *prop.* 21. ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam è penultimis minus præciſam dare, cum eadem

ope-

opera detur magis præciſa ex ultimis. At miror, cum *Hugenius* incidiſſet in meam *Hyperbolæ* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola abſque dubio 24. *prop.* approximationem ex ultimis ſimilibus polygonis conſtruxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolæ* eſt etiam applicabilis, & vice verſa. Sed hoc non videtur animadvertiſſe *Hugenius*; alioqui in fine ſuarum Animadverſionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quæ autem illic affirmat (ſi de ſemet loquitur in plurali) tranſeant; ſi verò etiam de me adeo fidenter ſibi perſuadeat, falli ipſum putem, cum hæc eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me ſit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis geometrica minus peritis videatur noſtram ſuperaſſe, ex noſtra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, ſequentem praxin exhibebo.

In fig. *Hugeniana* ſit $AC = A$; $ABC = B$, ſitque A+B: B :: 2B: C; eritque $\frac{8C + 8B - A}{15}$ major, quam arcus ABC; differentia autem, in ſemi-circumferentia minor erit quàm ipſius $\frac{1}{3500}$, in triente minor quam ipſius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quam ipſius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam præcedens approximatio major eſt quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit A : B :: B : D; $= \frac{12C + 4B - D}{15}$ minor erit quam arcus ABC; differentia autem in ſemi-circumferentia minor erit quam ipſius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipſius $\frac{1}{60000}$, inter has approximationes ſit maxima, penultima ſex continuè Arithmeticè proportionalium, quæ minor erit quàm arcus, differentia autem in ſemi-circumferentia minor erit quam ejuſdem $\frac{1}{13000}$, & in quadrante TAB. XLIV. fig. 3.

mi-

minor quam ejuſdem $\frac{1}{3000000}$. Sed hæc levia mihi videntur, cum poſſim Approximationes exhibere, quæ ab ipſa ſemi-circumferentia differant minori intervallo, quam quælibet ejus pars aſſignata, neque nobis amplius apparent hæc mirabilia, cum demonſtratio ſolida innoteſcat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo inſtituto ſint aliena, nihil dico, niſi quod ipſa Hugenii dicta (non obſtante exactiſſima ſua, ut ait, materiæ hujus examinatione) à meæ *Appendiculæ* factis ni fallor, longè ſuperentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* hæc eſt, quam ipſe hoc ſenſu, licet Gallicè, ſic explicat. Sit Arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam, A B C, cujus ſubtenſa ſit A C, & dividantur ambo in partes æquales per lineam B D. Ducta ſubtenſa A B, capias inde $\frac{2}{3}$, eaſque jungas inde ab A ad E in lineâ C A protracta. Dein, reſecta lineæ D E parte decima E F, ducas F B, & tandem B G, ipſi perpendicularem: & habebis lineam A G æqualem Arcui A B C, cujus exceſſus tantillus erit, ut etiam tunc, quando hic arcus æqualis erit ſemicircumferentiæ Circuli, futura non ſit differentia $\frac{1}{1400}$ ſuæ longitudinis; at quando non eſt niſi tertiæ partis circumfeferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$; & ſi non ſit niſi quartæ partis, non differet niſi $\frac{1}{90000}$, ſuæ longitudinis.

F I N I S.

CHRIS-

CHRISTIANI HUGENII
GEOMETRICA
V A R I A.

I.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

In æquatione loci ad hyperbolam, ſi neutra indeterminatarum linearum in ſeipſam ducta inveniatur, velut ſi ſit $xy = bb$; vel $xy = cx . bb$; (literis x & y lineas indeterminatas AB, BC ſignificantibus, quæ in dato angulo ſibi mutuò ſint applicatæ, quarumque altera, ut AB, poſitione data intelligitur, & in ea datum punctum A) conſtructio per aſymptotorum inventionem facilè abſolvitur, ut oſtenſum eſt à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Carteſii. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque nihilominus ad aſymptotos rem deduci poſſe, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & transverſi inventionem, oſtendemus hoc modo. TAB. XLIV. fig. 4. 5. 6. 7.

Sit æquatio ejuſmodi reducta, $y = l . \frac{nx}{z} \sqrt{mm . ox + \frac{ppxx}{gg}}$; ſemper enim ad hos terminos reduci poteſt, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata eſt ad poſitionem datam, ſola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hîc inveniantur; nam ſæpe pauciores etiam eſſe poſſunt, cum ſoli neceſſarii ſint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus ABC datus ſit, ducatur per A punctum linea XY quæ ſit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis l, idque ad partes BC, ſi habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò ſi habeatur $- l$, & agatur IK pa-

 ral-

rallela A B. Si verò non habeatur omnino l, recta I K in A B incidere intelligenda eſt.

Deinde ſicut z ad n, quæ ratio data, ita ſit I K ad libitum ſumpta, ad K L; quæ ipſi A I parallela ducenda eſt, ſumendaque hoc pacto, ut puncta K L ſita ſint quo ordine A I, ſi habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà ſi habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per I L; ſi verò deſit $\frac{nx}{z}$, eadem eſt I L & I K.

Porro ut p ad g, ita ſit $\frac{1}{2}o$ ad ſingulas I X, I Y ſumendas in recta A I; atque ita quoque I X ad I V ſumendam in I K ad partes A B ſi habeatur $- ox$, aut in contrarias ſi habeatur $+ ox$; & ſit V M parallela A I, occurratque rectæ I L in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæſitæ; aſymptoti vero, rectæ per M X, M Y ductæ.

Si vero non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; ſumptiſque I X, I Y ad libitum ſed inter ſe æqualibus, inventiſque inde punctis V & M, ut ante, ducentur aſymptoti per I parallelæ ipſis M X, M Y.

Jam porro ſi habeatur $+ mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppoſitæ ſectiones tranſire debent, invenientur ſumendo in recta A I à puncto I, ſingulas I S, I R æquales m: unde jam hyperbola data erit ac deſcribi poterit, in qua B C erit ordinatim applicata ad diametrum, ſi $\frac{\frac{1}{2}og}{z}$ major quam m; ſin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quam m, erit B C parallela diametro hyperbolæ ad quam eſt C punctum, ut hic caſu ſecundo. Quod ſi forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipſæ aſymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipſum I punctum in hyperbola quæſita.

At ſi habeatur $- mm$, accommodanda eſt intra angulum X M I recta G N parallela I X, quæque poſſit quadrata ab I X & I S, vel tantum ipſi I S æqualis, ſi non habeatur

ox;

ox; eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo $AB = x$ ad arbitrium, eique applicata $BC = y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quod fig. 4.

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$$

DEMONSTRATIO.

Occurrat B C utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt I X vel I Y $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, I V $= \frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$, Ratio verò data I K ad K L, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus I K L datus eſt. Ergo & ratio I K ad I L, quæ ſit ea quæ z ad a. Ergo quia ut I K ad I L ita I V ad I M, erit I M $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autem I M ad I X, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut ag ad pz, ita M L, ſive M I minus I L, hoc eſt, $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad L O vel L Q; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia B K $= l$, & L K $= \frac{nx}{z}$, erit B L $= l - \frac{nx}{z}$, quâ ablatâ à B C $= y$, fit L C $= y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum Q C O æquale rectangulo Y S X. Sed rectangulum Q C O æquale eſt quadrato L O minus quadrato L C, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$: quorum quadra-

torum differentia eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc eſt quadrato IX minus quadrato IS, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

fig. 5. In Secundo caſu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rurſus valor Y idem qui caſu primo invenietur.

fig. 6. Sit tertius caſus quo habeatur $-mm$, ſitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri aſymptoto in D. Hîc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ eſſe $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO $=$ rectangulo DNG ſeu quadrato NG, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rurſus utrinque

que $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$
Eademque eſt demonſtrandi ratio in caſu quarto, & aliis fig. 7.
quibusvis, habita ratione ſignorum + & −.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum ſunt, tunc vero ſi $p = g$, hoc eſt ſi habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt ſemper aſymptoti ſibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & ſingulæ = $\frac{1}{2}o$, unde punctum V eſt in ſemicirculo ſuper XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia IM = $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod ſi $ag = zp$, hoc eſt ſi g ad p ut z ad a, tunc erit IM = $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipſi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc caſu erunt aſymptoti ſibi mutuo ad angulos rectos; cum rurſus punctum M ſit futurum in circumferentia circuli deſcripti ſuper XY centro I.

DE-

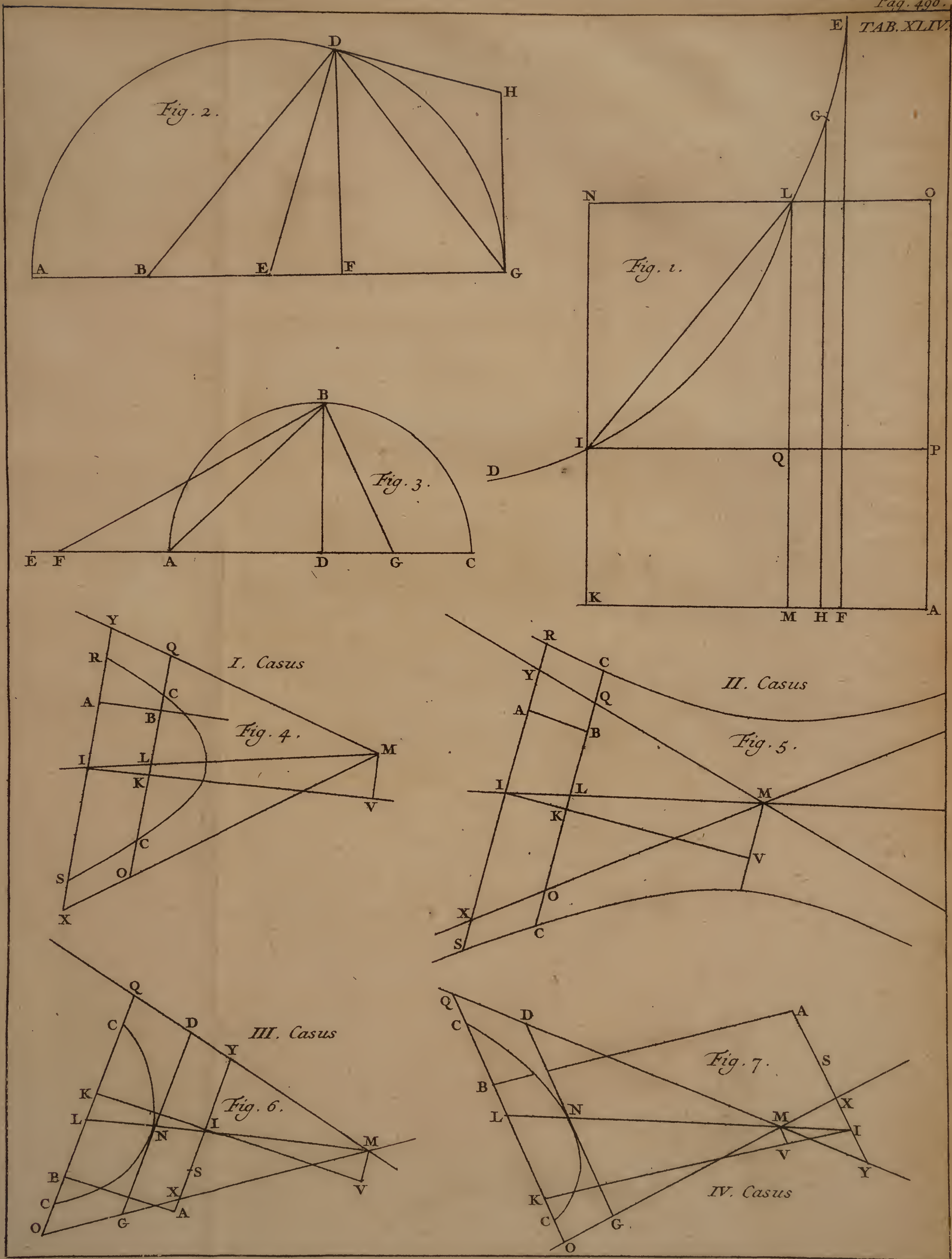
II.

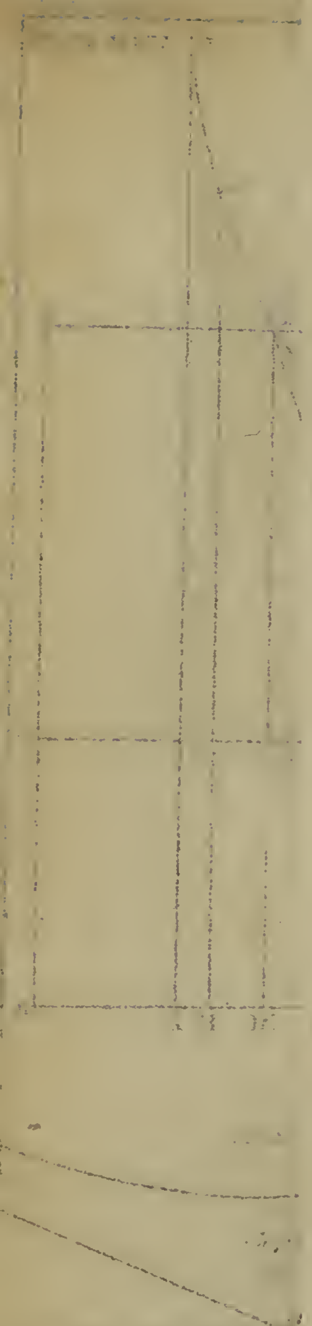
DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Ad inveſtiganda Maxima & Minima in Geometricis quæſtionibus, regulam certam primus, quod ſciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipſo non traditam cum exquirerem, inveni ſimul quo pacto ea ipſa regula ad mirabilem brevitatem perduci poſſet, utque inde eadem illa exiſteret quam poſtea vir ampliſſimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ ſuæ generalioris atque elegantiſſimæ, quæ ab alio prorſus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita eſt unà cum Carteſianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod inſtitui eſt hujuſmodi.

TAB. XLV. fig. 1. Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum eſt utrinque æqualitatis caſum exiſtere: ut ſi data ſit poſitione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis CA, C B, quadrata earum ſimul ſumpta, ſint minima quæ eſſe poſſint; neceſſe eſt ab utraque parte puncti C, eſſe puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur ſumma quadratorum G A, G B æqualis ſummæ quadratorum F A, F B, & utraque ſumma major quadratis C A, C B ſimul ſumptis.

Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat ſumma quadratorum ab ipſis omnium minima; ductis AE, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur a; B D, b; intervallum verò E, D, c: fingo primùm G F, differentiam dua-


TAB. XLIV.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
I. Casus
Fig. 4.
II. Casus
Fig. 5.
III. Casus
Fig. 6.
Fig. 7.
IV. Casus



duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur e; & quæro quanta futura ſit E G, quam appello x, ut quadrata G A, G B ſimul ſumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B ſimul ſumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque ſimiliter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rurſus autem quia E F $= x + e$, ſi ubique in ſumma quadratorum inventa ſubſtituam $x + e$ pro x, & quadratum ab $x + e$ pro xx, adque ita deinceps ſi altior poteſtas ipſius x reperiatur, certum eſt exorituram ſummam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda ſummæ quadratorum A G, G B; dicantur autem hi termini poſteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor E G ſive x, quando G F ſive e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura ſit E G, cum ipſi E F æqualis eſt, adeoque habebitur determinatio quæſita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant ſummam quadratorum minimam, nempe ſublatis primùm, ſi quæ ſunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ ſunt) delentur termini qui utrinque iidem habentur, quales ſunt neceſſariò omnes quibus litera e admixta non eſt; idque facile eſt intelligere, cum dixerimus poſteriores terminos ex prioribus deſcribi, ponendo $x + e$ vel poteſtatem ejus, quoties invenitur x vel poteſtas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibuſque poſt eam diviſionem adhuc unum e aut plura ineſſe inveniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinitè parvas contineant reſpectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius ineſt e. Ex quibus denique ſolis invenitur quantitas x quæſita in caſu determina-

tionis propoſito; & hæc eſt ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ ſunt. Nam primò,

„Quando termini, quos maximum aut minimum deſignare volumus, nullam fractionem habent, in cujus denominatore quantitas incognita quæſita continetur; multiplicandus eſt terminus quiſque per numerum dimenſionum, quem in illo habet quantitas incognita, omiſſis terminis iis in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo propoſito, ubi termini priores inventi ſunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, ſummam duorum quadratorum continentes, quam volo eſſe minimam; tantummodo hujuſmodi inſtituenda erit multiplicatio,

$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - 2cx + 2xx \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; 1 \qquad\;\; 2 \\ \hline \end{array}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $- 2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque ſi priores termini ſint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{2c}x + ab^2$,

multiplicatio erit hujuſmodi $\underline{\;3 \qquad 3 \qquad\qquad 1\;}$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$\overline{9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.}$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, ſciendum primò, quoniam termini poſteriores ex prioribus deſcribuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, neceſſariò omnes terminos priores etiam in poſterioribus reperiri; ideoque illos nihil

nihil opus eſſe deſcribi, cum utrobique mox delendi forent, atque adeo illos tantum ſcribendos in quibus unum e vel plura inſunt, ut in exemplo noſtro $- 2ce + 4ex + 2ee$; eoſque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, ſcribi fruſtra apparet, cum diviſione facta per e delendos poſtea conſtet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio deſcribendi inter terminos poſteriores quam quibus inerit e ſimplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum conſtet nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos poteſtatum ab $x + e$, quia cæteri omnes plura quam unum e vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur x, ſcribendum ſit in poſterioribus e; & ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in poſterioribus; & ubi x^3 in prioribus, in poſterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini ſecundi cujuſque poteſtatis $x + e$ ex ipſa poteſtate x facilè deſcribuntur mutando unum x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius x, ita enim ab xx fit $2ex$, & ab x^3, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos ſolos conſiderandos eſſe patuit, facilè etiam termini poſteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, deſcribuntur; multiplicando tantum ſingulos in numerum dimenſionum quas in ipſis habet x. Nam mutare unum x in e ne quidem opus eſt, cum eodem redeat, ſive omnes poſtea per e ſive per x dividantur, & ex his quidem aperta eſt ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ eſt hujuſmodi.

„Si termini quos maximum aut minimum deſignare volu„mus fractiones habeant in quarum denominatore occurrat „quantitas incognita, delendæ primùm ſunt quantitates co„gnitæ ſi quæ adſint; deinde ſi reliquæ quantitates non ha„beant eundem denominatorem, eò reducendæ ſunt. Tunc „termini ſinguli numeratorem fractionis conſtituentes, du„cendi in terminos ſingulos denominatoris, productaque „ſingula multipla ſumenda ſecundum numerum quo dimen„ſio-

„ ſiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris diffe-
„ runt à dimenſionibus ejuſdem incognitæ quantitatis in ter-
„ mino denominatoris. Signa autem affectionis productis
„ ſingulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quo-
„ ties dimenſiones quantitatis incognitæ plures ſunt in termi-
„ no numeratoris quam in termino denominatoris: at quo-
„ ties contra evenit, contraria quoque ſigna productis præ-
„ ponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inventi termini priores, quos maximum deſignare velimus, iſti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla eſt quantitas cognita. Hîc ergo, ſecundum regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc, priorisque producti ex bx^3 in bcc, ſcribo triplum, quia bx^3 habet tres dimenſiones quantitatis incognitæ x, bcc verò nullam. Secundi producti ex $-ccxx$ in bcc ſcribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duæ ſunt dimenſiones x, & in bcc nulla. Tertium verò productum ex $-2bccx$ in bcc ſcribo ſimplex, quia in $-2bccx$ & bcc differentia dimenſionum x eſt unitas. Tribus autem hiſce productis vera ſigna affectionis adſcribo, quoniam dimenſiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ ſunt, ita ut tria hæc producta ſint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Jam porrò terminos omnes eoſdem numeratoris duco in x^3, terminum alterum denominatoris, primumque productum ex bx^3 in x^3 ſcribere omitto, ſive per o multiplico, quoniam eædem dimenſiones utrobique ſunt ipſius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in x^3 ſcribo ſimplex, quia in his terminis differentia dimenſionum x eſt unitas. At tertium productum ex $-2bccx$ in x^3 ſcribo duplum, quia differentia dimenſionum x in his eſt 2. Signa verò affectionis productis hiſce duobus adſcribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimen-

menſiones x pauciores ſunt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus

$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbcx^4,$$

faciunt ſummam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$

qua æquatione diviſa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum ſit uno exemplo rurſus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem eſſe intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modò propoſueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus ſi alios quibuſcum eos comparem, ut initio factum eſt, deſcribere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi eſt x; video quidem primò omnes illos in poſterioribus terminis poſſe negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia ſemper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob cauſam in ſuperioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi poſterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{bx^3 - ccxx - 2bccx, + 3bexx - 2ccex - 2bcce,}{bcc + x^3 + 3exx}$$

qui nempe ex prioribus hac lege deſcripti ſunt, ut ubicunque eſt x vel poteſtas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel poteſtatis $x + e$ duo priores termini; quoniam ſcimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Jam verò porrò, quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac poſteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos nu-

meratoris partis alterius e carentes, omitti poſſe, cum quantitates inde ortæ eædem utrinque eſſent futuræ ideoque delendæ. Quare in terminis poſterioribus ii tantum ab initio ſcribendi erant in quibus unum e, omiſſis omnibus reliquis, ut æquatio hîc futura ſit iſta

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hîc jam multiplicationes alternæ per denominatores inſtituendæ eſſent ad tollendas fractiones. Verum examinando diligentius quænam futura ſint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec ſcribendos quidem omnino eſſe terminos poſteriores: quia enim deſcribuntur ex prioribus mutato x in e, præpoſitoque numero dimenſionum ipſius x, non difficile eſt colligere ex ſolis terminis prioribus quænam futura ſint iſta omnia producta.

Ita quoniam propter $-ccxx$ in prioribus, habetur $-2ccex$ in poſterioribus; & propter x^3 in denominatore priorum, in poſteriorum denominatore eſt $3exx$; facile perſpicitur utraque producta ex $-ccxx$ in $3exx$ & ex $-2ccex$ in x^3, quæ ſunt $-3ccex^4$ & $-2ccex^4$, eaſdem literas habitura, ſed diverſos numeros præpoſitos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimenſionem minus habeat x quam in termino x^3. Itaque & auferendo poſtea ex utraque parte æquationis, $-2ccex^4$, apparet ſuperfuturum $-ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc ſciri poteſt, multiplicando tantum in terminis prioribus $-ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum ſimplex ſcribendo; quia differentia dimenſionum x in iſtis duobus terminis eſt unitas.

Eadem ratione producta ex $-2bccx$ in $3exx$, & ex $-2bcce$ in x^3, quæ eaſdem literas habent, ſunt enim $-6bccex^3$ & $-2bccex^3$, habebunt numeros præpoſitos di-

ver-

verſos, propterea quod in $-2bccx$ una tantum eſt dimenſio x; at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $-2bccex^3$, ſcio ſuperfuturum à parte terminorum priorum $-4bccex^3$: quod rurſus ab initio cognoſci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $-2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e, & productum multiplicando per 2, quæ eſt differentia dimenſionum x in terminis $-2bccx$ & x^3.

At quoniam in bx^3 & in x^3 eadem eſt dimenſio x, ſequetur producta ex bx^3 in $3exx$, & ex $3bexx$ in x^3, tum literas eaſdem, tum eoſdem numeros præpoſitos habitura, ideoque ſeſe mutuo ſublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti poſſit.

Atque hujuſmodi animadverſionibus inventum eſt quod in regula præcipitur, terminos ſingulos numeratoris in ſingulos denominatoris terminos eſſe ducendos, productaque quælibet multipla ſumenda ſecundum differentiam dimenſionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in ſe mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum poſtea per e an per x omnes termini dividantur.

Quod vero ſi ſigna affectionis vera productis ſingulis præponenda dicuntur, quoties dimenſiones x plures ſunt in numeratore quam in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti conſequenter etiam hoc quod contraria ſigna ſunt adponenda, quoties dimenſionum numerus contra ſe habet. Velut hîc, productum ex bx^3 in bcc ſcribendum eſt cum ſigno $-$ præpoſito numero 3, ut fiat $-3bbccx^3$, quia nempe propter bx^3 ſcimus in poſterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in bcc faciet $+3bbccexx$, ſed tranſlatum in partem priorem æquationis, fiet $-3bbccexx$; ſive, non mutato x in e, $-3bbccx^3$.

Quod denique in regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt eas primum omnium delendas, id

id ex hoc ſequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a - x} - 2vx + xx + vv$; ubi vv quantitatem cognitam ſignificet: id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit ſi non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit vv in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius, explicata ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $- evv$; inde $- e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem hæc tria in ſe mutuo ducantur $2a - x$ in $- e$ in vv, qui proinde termini ſe ſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem vv, idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifeſtum erit.

III.

REGULA

Ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.

IDem *Fermatius* linearum curvarum Tangentes regula ſibi peculiari inquirebat, quam *Carteſius* ſuſpicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epiſtolis ejus hac de re ſcriptis apparet. Sanè in *Fermatii* operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. *Carteſium* vero in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quam

per

per hæc quæ nunc trademus fiet, quæ jam olim, multò ante iſtas literas vulgatas conſcripſimus.

Præcipuum vero operæ pretium tunc fuit compendioſa hujuſce regulæ contractio, quam, quoad potui, proſecutus, tandem in ipſas illas inſignes Huddenii, Sluſiique regulas deſinere inveni, quas mihi Viri hi Clariſſimi uterque ferè eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut B C, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam poſitione datam A F; ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ B F, in dato angulo B F A, datoque in recta A F puncto A, certa æquatione relatio quæ eſt inter A F & F B expreſſa habeatur. Exempli gratiâ, appellando A F, x; F B, y, ſit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi a lineam quandam datam ſignificare cenſenda eſt. TAB. XLV. fig. 2.

Quod ſi jam ad punctum B tangens ducenda ſit BE, quæ occurrat rectæ A F in E, voceturque FE, z, ejus longitudo per hanc regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex ſola æquatione data.

Tranſlatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini ſinguli, in quibus reperitur y, per numerum dimenſionum quas in ipſis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde ſimiliter termini ſinguli in quibus x, multiplicentur per numerum dimenſionum quas in ipſis habet x, & è ſingulis unum x tollatur; atque hæc quantitas pro diviſore erit ſubſcribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis z ſive FE. Signa autem + & — eadem ubique retinenda ſunt; atque etiam ſi forte quantitas diviſoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo ſive negata ſit, tamen tanquam adfirmatæ ſunt conſiderandæ: hoc tantum obſervando, ut cum altera adfirmata eſt, altera negata, tunc F E ſumatur verſus punctum A, cum verò utraque vel affirmata eſt vel negata, ut tunc ſumatur F E in partem contrariam.

In curvâ propoſita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = 0$, fiet ſecundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, diviſor verò $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ eſt longitudo cognita, cum dentur x, y & a.

TAB. XLV. fig. 3.

Eſto item alia curva ABH, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = 0$, poſito ſcilicet a & q eſſe lineas datas, AF vero $= x$, FB $= y$. Sit BE tangens, & FE dicatur ut ante, z. Hîc fiet ſecundum regulam, dividenda quantitas $- qqy$; diviſor autem $2ax - 3xx$; unde $z = \frac{- qqy}{2ax - 3xx}$ Ubi cum dividenda quantitas ſit negata, ſi fuerit etiam diviſor minor nihilo, hoc eſt ſi $2a$ minor quam $3x$, erit z ſive fe ſumenda in partem ab A averſam. Si vero $2a$ major quam $3x$, ſumenda erit FE verſus A, ex præcepto regulæ.

TAB. XLV. fig. 4.

Horum vero rationem, ipſiuſque regulæ & compendii quò reducta eſt, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva BC, ad cujus punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta EBD, quæ non tangat curvam ſed eam ſecet in B, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo; rectæ autem AG occurrat in E; & ab utriſque punctis B, D ducantur ad rectam AG, iiſdem angulis inclinatæ BF, DG; & ſit AF $= x$, FB $= y$, ſicut antea; ponaturque etiam FG data eſſe, quæ ſit e, quæraturque FE $= z$.

Eſt itaque ſicut EF ad FB, hoc eſt, ſicut z ad y, ita EG, hoc eſt, $z + e$ ad GD; quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porrò conſideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya = 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut AH ſignificabat; & patet, cum punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas AG, GD, hoc eſt $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad ſe mutuo referri

atque

atque AF, FB, hoc eſt x & y. Nempe ſi in æquatione propoſita pro x ſubſtituatur ubique $x + e$, & pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc eſt

$$x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} = 0.$$
$$- axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z}$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis, ex qua formata eſt, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cum ſint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos nihilo æquari, in quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum e vel plura reperiri, ideoque omnes per e dividi poſſe. Qui autem poſt hanc diviſionem non amplius habebunt e, eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z ſive FE oſtenſuros; ſi nempe BE jam tanquam tangens conſideretur, ideoque FG, ſeu e, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc e ſupereſt, etiam quantitates infinite parvas ſive omnino evaneſcentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro oſtendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta ſit. Video itaque ex æquatione totâ noviſſimâ, tantum eos terminos ſcribi neceſſe eſſe quibus ineſt e ſimplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = 0$, deſcribi poſſint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos cuborum ab

 $x + e$

$x + e$ & ab $y + \frac{e}{z}$ ideo ſcriptos quia in æquatione habentur cubi ab x & y. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum poteſtatem ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus, fruſtra ſcriberentur. Eâdem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab x vel y eſſent in æquatione propoſitæ, ſcribendi forent in æquatione alterâ termini ſecundi tantùm ſimilium poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque ſecundos hoſce terminos, ex ipſis datis poteſtatibus ab x & y, certa ratione confici; nempe ex poteſtate quavis x, velut x^3, mutando unum x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius x: ita hîc fit $3exx$. Ex poteſtate y verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y: ita hîc ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum eſt.

Porrò propter xy in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. Cum enim ſubſtituendum ſit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantùm e ducemus in y, & tantùm x in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in a ductis, præpoſitoque ſigno $-$, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$, ſicut ſuprà.

Sic

Sic quoque ſi in æquatione propoſita haberetur xxy^3; ſumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro xxy^3 ſurrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quàm unum e vel nullum haberent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, ſemper utrumque horum terminorum deſcribi poſſe ex dato termino, qui hic xxy^3; alterum quidem mutato uno x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam ſecundos terminos poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex poteſtatibus x & y æquationis datæ deſcribi oſtenſum ſit, manifeſtum jam eſt à ſingulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel poteſtas ejus, deſcribi prædicta methodo in ſecunda æquatione totidem terminos in quibus non eſt z; à ſingulis verò in quibus y vel poteſtas ejus, deſcribi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator ſit z; nec alibi hanc literam in ſecunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis propoſita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = o$, alia deſcribenda ſit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = o$, animadverto porro, ſi termi-

ni diviſi per z ad alteram partem æquationis transferantur, ductiſque omnibus in z, diviſio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, exiſtere tunc ipſam quantitatem z ab una æquationis parte; uti hîc fiet $z = -\frac{3ey^3 + aeyx}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad conſequendam quantitatem z, ponendos tantum eos terminos æquationis ſecundæ, qui deſcripti ſunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, ſublato tantum denominatore z, mutatiſque ſignis $+$ & $-$. Deinde dividendo iſtos terminos per eos qui deſcripti ſunt ex terminis æquationis primæ in quibus x. Porro ex omnibus, tam diviſis quàm dividentibus, patet rejici poſſe e, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = -\frac{y^3 3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui deſcripti ſunt ab iis qui habent y. Sic autem deſcriptos eos ſuperius diximus ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimenſionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hoſce (quatenus ad definiendam quantitatem z hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus y, deſcribendos, quam ut præponamus tantum iis numerum dimenſionum quas in ipſis habet y, ſignaque $+$ & $-$ invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, deſcribetur $-3y^3 + axy$. A terminis verò qui deſcripti ſunt à terminis æquationis primæ in quibus x, cum tantum e hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius deſcriptos dixerimus ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimenſionum ipſius x; apparet eos, quatenus hic ad conſtituendum diviſorum adhibentur, ſic tantum deſcribi opus eſſe ex terminis propoſitæ æquationis in quibus x, ut præponatur iis numerus dimenſionum ipſius x, ac deinde unum x auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ deſcribetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique x uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio poſitæ manifeſta eſt. Nam quod ſigna $+$ & $-$ in terminis qui deſcribuntur ab iis in quibus y, hîc immutanda diximus, in regulâ

verò

verò nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet cùm quantitatem negatam, ſive minorem nihilo, tanquam affirmatam conſiderandam ibi dixerimus. Ut autem ratio obſervationis ibidem adjectæ, in utram partem linea F E accipienda ſit, intelligatur, repetemus figuram in principio poſitam, ubi vidimus A G eſſe $x + e$, E G vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ B F cadere intelligatur, velut be, atque hæc primùm curvam ſecare fingatur, ut ibi factum eſt in d, ducaturque dg parallela bf; fiet ponendo rurſus $fg = e$, $fe = z$, ut A g quidem fiat $x + e$, ſed eg erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porrò facile eſt perſpicere æquationem ſecundam, quæ ex propoſita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = o$ deſcribitur, hoc caſu fore $3exx - \frac{3ey3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, termini ut nempe qui per z dividuntur, habeant ſigna contraria iis quæ habebant in æquatione deſcripta caſu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac verò priori ſequitur, quando quantitas $3exx - aey$, ſive quando $3xx - ay$ (quæ diviſorem conſtituit ſecundum regulam) fuerit minor nihilo, ſive negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; ſive etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam ſecundùm regulam conſtituit) eſſe affirmatam, aut cum illa eſt affirmata, hanc eſſe negatam; quia omnes ſimul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, ſequitur, quando quantitas $3exx - aey$, ſive $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$,

TAB. XLV. fig. 5.

ſive

ſive etiam $-3y^3 + ayx$ eſſe affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ eſſe negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judiciari poſſe ad utrum caſum conſtructio tangentis pertineat; nempe excomperta diſſimilitudine affectionis in diviſore & dividendo, ſequi ad priorem caſum eam pertinere, hoc eſt z, ſive FE, accipiendam eſſe verſus A: ex ſimilitudine verò eorum affectionis ſequi ad contrariam partem ſumendam.

TAB. XLV. Fig. 6. Poteſt autem quantitas z ſive FE per regulam inventa, nonnunquam ad ſimpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujuſque ea eſt proprietas ut, ſi à puncto C in eâ ſumpta, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (eſt autem B punctum in axe extra curvam datam) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo BA $= a$, BD $= x$, DC $= y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, iſta $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hîc ponendo CG eſſe tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque GD, z, fit ſecundum regulam $z = \frac{-5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione eſt $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, reſtituendo pro $5y$ id quod ipſi æquale eſt, fiet $z = \frac{-5x^5 + 10ax^4 - 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; ſive dividendo per xx, erit $z = \frac{-5x^3 + 10axx - 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rurſus, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{-5xx + 5ax}{5x - 3a}$. Quod ſignificat faciendum ut ſicut BD quinquies ſumpta minus BA ter, ſive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

IV.

TAB. XLV.

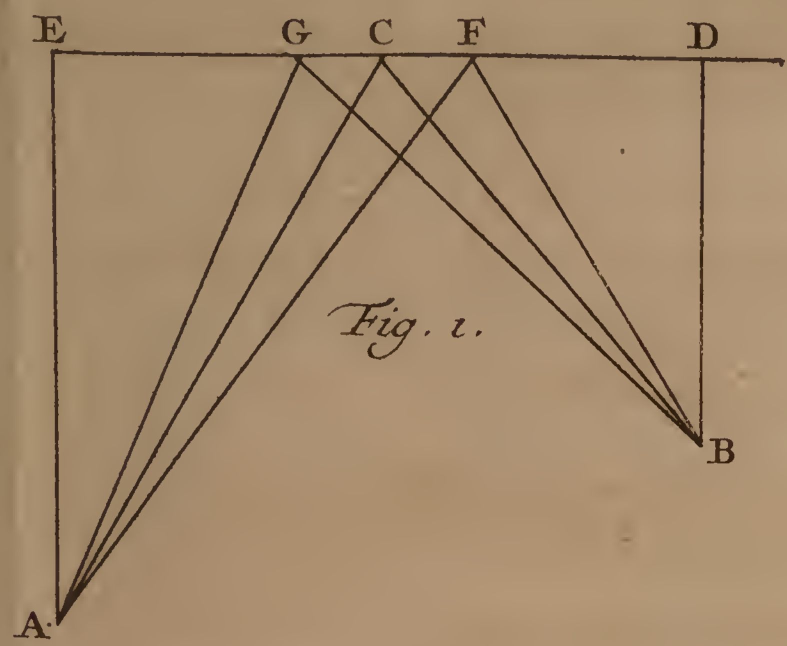


Fig. 1.

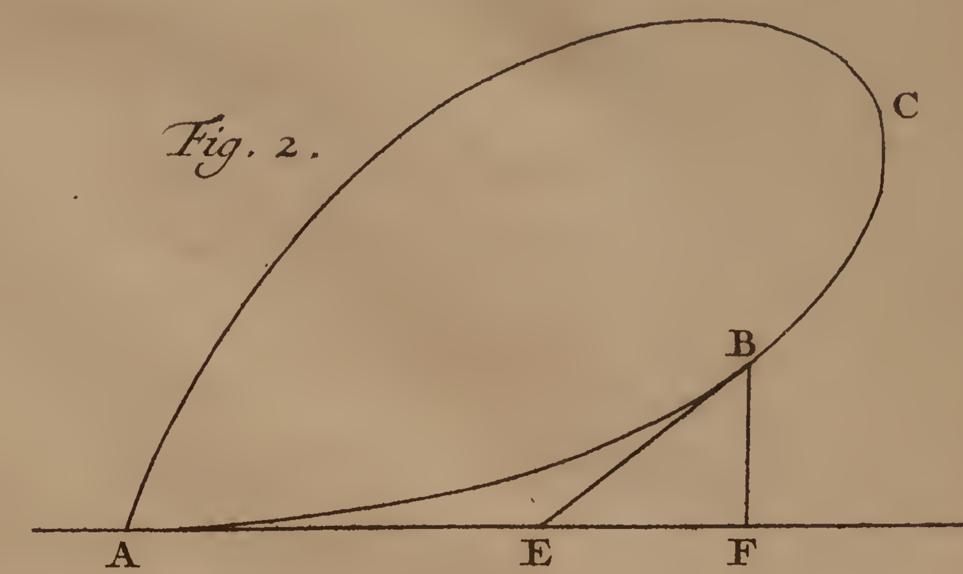


Fig. 2.

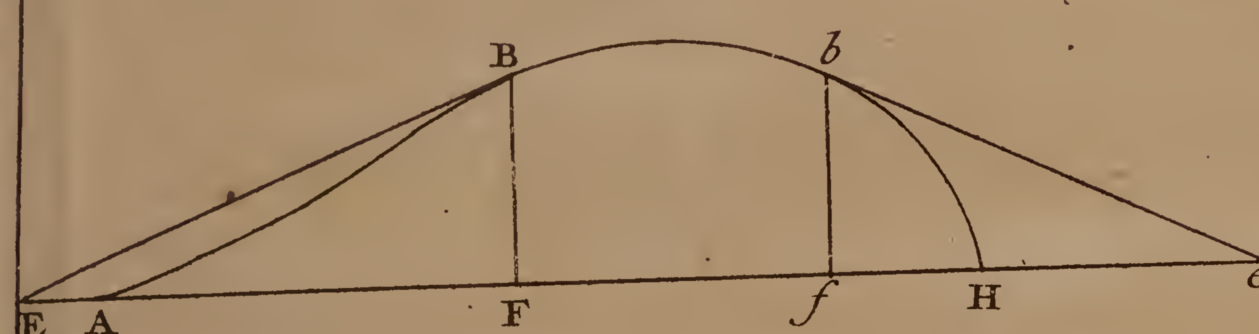


Fig. 3.

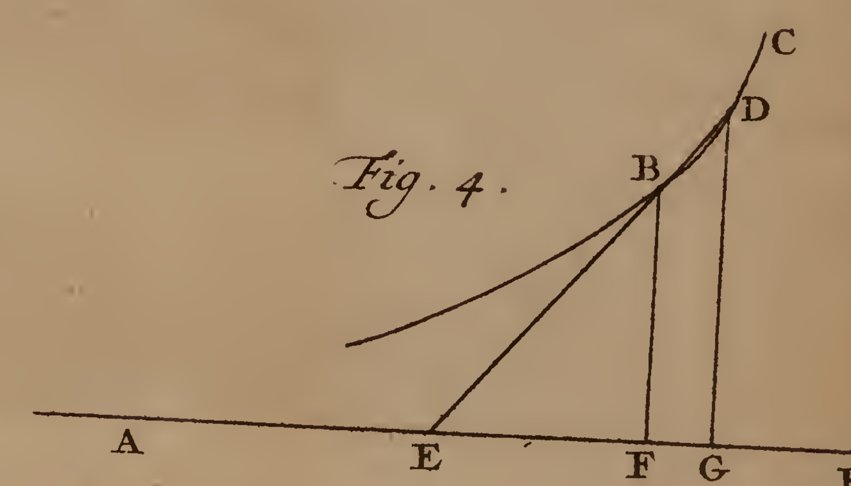


Fig. 4.

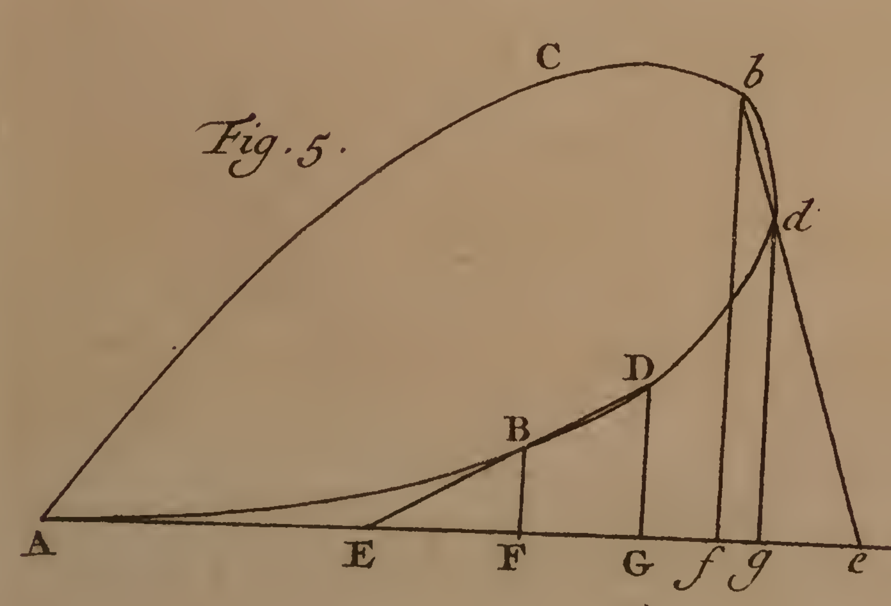


Fig. 5.

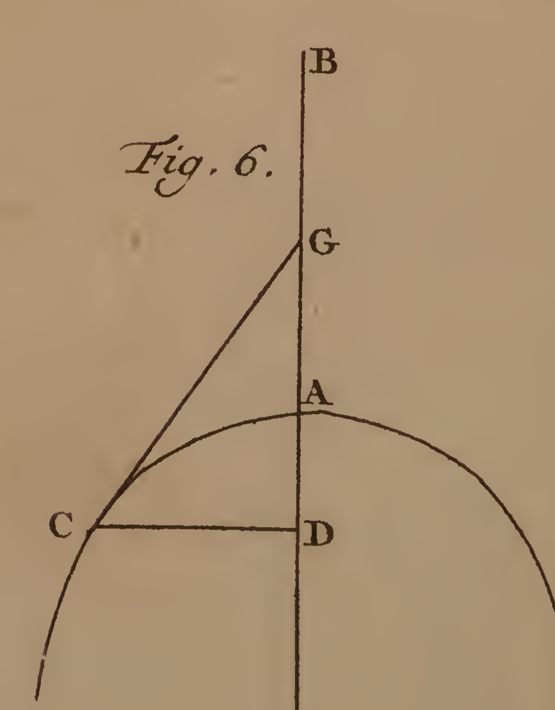


Fig. 6.

IV.

CHRISTIANI HUGENII EPISTOLA

DE CURVIS QUIBUSDAM PECULIARIBUS.

MItto tibi conſtructionem Problematis, quod ſine dubio Geometris placebit, ſi id cum ipſis communicare velis, cum pulcherrimum ſit, & ſingularia quædam contineat: accepi hoc a Marchione de l'Hoſpital, quem ex ſpecimine hoc & variis aliis, inter ſummos noſtri ævi Geometras referendum puto. Hac etiam occaſione ad te mitto quaſdam ex poſterioribus, ſuper rebus fere ſimilibus, contemplationibus noſtris.

Problema March. eſt; Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ut hujus inveniat ſolutionem, ſagaciter utitur *Calculo differentiali* celeberrimi Leibnitii, & reducit problema ad quadraturam curvæ, cujus æquatio eſt, $a^6 = aaxxyy + y^4xx$; poſitis x & y indeterminatis, quæ angulum rectum efficiunt; Hanc quadraturam oſtendit dependere à quadraturâ Hyperboles; quæ datur, ut notum eſt, poſitâ logarithmicâ deſcriptâ; conſtructio autem huc redit. Sit logarithmica indefinita A C D, aſymptos L O, ſubtangens conſtans data a, & portio curvæ ſit C D, cui æqualem rectam invenire oportet. TAB. XLVI. fig. 1.

Duc D L, C O perpendiculares ad aſymptoton, CE perpendicularem ad D L, & fac L T in aſymptoto æqualem ſubtangenti a, & ductis rectis T D, T E, fiat T V = T D & T I = TE:

= TE: tunc junge VD, ductâque ipſi parallelâ IK, e puncto K, ubi occurrit ipſi DL, duc parallelam aſymptoto KA, ſecantem DV in F, CO in X, & Logarithmicam in A. Tum rectæ AX & FK ſimul ſumtæ erunt æquales curvæ CD.

Solutio hujus Problematis, prout ego invenio, poteſt etiam reduci ad quadraturam curvæ, cujus Æquatio eſt $a^4 = xxyy - aayy$, quæ, ut & altera, dependet à quadratura Hyperboles, uti poſſem ſatis facile demonſtrare; ſed conſtructio à modo deſcripta non differt.

Neſcio, an multæ lineæ curvæ hanc habeant proprietatem ut ipſarum longitudines per ipſas curvas menſurari queant; interim ecce unam, quam haud ita pridem inveni, dignam, ut videbis, quæ & ob alia etiam notetur; Eſt curva AXKO extenſa in infinitum ſecundum rectam DN, quæ eſt ejus aſymptos, ad quam AD, tangens ad verticem A, inſiſtit perpendicularis; curvæ princeps & ſimpliciſſima proprietas eſt, ut omnis tangens inter punctum contactus & aſymptoton, ut KN, ſit æqualis lineæ AD; curva pariter extenditur ad alteram partem hujus perpendicularis AD. Ut invenias rectam lineam æqualem portioni hujus curvæ datæ a vertice A, ut AK (ſic enim invenies alias portiones quaſcunque) duc KP perpendicularem ad AD, & deſcripto arcu circuli PQ, qui habeat centrum D & radium DP, quære in AB parallelâ Aſymptoto punctum B, quod ſit centrum circumferentiæ circuli, quæ tranſit per A & tangit arcum PQ, quod facile eſt; porro ductâ rectâ BD, ſume in illâ DY = DA, & e puncto Y duc parallelam Aſymptoto uſque ad curvam in X, tunc YX erit æqualis curvæ AK; Et natura hujus lineæ talis eſt, ut ſi ſumas tot proportionales quot volueris, in recta AD, incipiendo a D, ut DS, DI, DP & ducas applicatas SR, IO, IK: partes interceptæ curvæ, ut RO, OK, omnes ſint æquales.

TAB. XLVI. fig. 2.

Ad quadraturam Hyperboles quoque inſervit curva hæc; nam eadem recta YX facit cum AD rectangulum æquale ſpatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicu-

dicularibus ad F D E, unam ex Aſymptotis, & quæ ſunt inter ſe in ratione A D ad D P, ſi Hyperbola A V ſit æquilatera & quadratum ejus ad angulum Aſymptώtων ſit A D F H; unde reciproce patet, quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ poſitâ quadraturâ Hyperboles.

Habet illa adhuc alias notabiles affectiones, quales ſunt, quod ſpatium infinitum, inter curvam, Aſymptoton, & rectam A D, ſit æquale $\frac{1}{4}$ circuli cujus radius eſt A D: quod ſolidum infinitum, quod producit hoc ſpatium rotando circa Aſymptoton, ſit æquale $\frac{1}{4}$ ſphæræ ejuſdem radii; quod ſuperficies ejus ſolidi infiniti, ſine baſi, ſit æqualis circulo, cujus radius eſt diagonalis quadrati ex A D.

Non autem propter ea qua huc uſque propoſui de hac curva hic egi, ſed quia ſimplici Machinâ deſcribi poteſt, quo reducitur Hyperbola ad quadratum, quod mihi viſum eſt Geometrarum conſideratione dignum.

Conſtructio Machinæ nititur in dictâ Tangentis proprietate & principio vel lege motus; ſcilicet, ſi in plano horizontali detur punctum, quod ſuo pondere vel alio modo aliquantulum reſiſtit, junctum extremitati fili vel vectis inflexilis, cujus altera extremitas movetur, punctum illud deſcribet curvam, cujus Tangens ſemper erit filum vel vectis. In inſtrumento vel machinâ, de qua dixi, movenda eſt extremitas D fili vel vectis D A juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuſpis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam ſic curva A K deſcribitur ſine errore ſenſibili, licet planum non ſit exacte horizontale; Et detegitur, an habeat veram figuram reducendo extremitatem vectis N per eandem rectam N D; quoniam requiritur, ut cuſpis regrediatur ex K in A, per eandem viam.

Si hæc deſcriptio, quæ per leges Mechanicæ eſt acurata poſſet haberi pro Geometricâ, eodem modo ut de-

ſcriptiones ſectionum Conicarum, quæ fiunt per inſtrumenta, haberemus inde & quadraturam Hyperboles & perfectam conſtructionem omnium Problematum, quæ ad hanc quadraturam reducuntur; ut inter alia ſunt, determinatio punctorum *Catenariæ*, & logarithmi. Si enim BY ſit = AC, quæ ſumitur in axe Catenariæ, id eſt DB = DC applicata ejus CG erit = YX; & eadem quoque YX eſt logarithmus rationis quam habet AD ad PD; id eſt, æqualis eſt diſtantiæ duarum linearum AD, PD, vel aliarum duarum quarumcunque, quæ eandem habent rationem, ordinatarum perpendicularium ad Aſymptoton lineæ logarithmicæ, quæ habet DA pro Subtangente univerſali; unde poſſunt inveniri logarithmi tabularum, prout demonſtravi in additione ad *diſſertationem de cauſa gravitatis*. Leibnitius, qui primus initium fecit reductionis curvæ Catenariæ ad leges Geometriæ, ipſam illam lineam ope veræ Catenæ tenuiſſimæ formatam, dixit inſervire poſſe inventioni logarithmorum, vel quadraturæ Hyperboles; licet ad id cognita requiratur (ut quidem ipſe noverat) longitudo rectæ, quam vocat curvæ Parametrum, cujus inventionem non demonſtrat. Ita ut noſtra quadratrix in his uſibus præferenda videatur, quia poſt deſcriptionem Parameter ejus, quæ eſt univerſalis ejus Tangens, datur.

Sed quoniam hæc materia me perduxit ad conſiderationem Catenariæ quæ elegantiſſimis hujus temporis Geometrarum inquiſitionibus occaſionem præbuit, libet hic addere quam inveni peculiarem ſatis methodum qua hæc delineatur curva, quod eſt omnium difficillimum inter ea quæ de hac ſibi inquirenda propoſuere Mathematici. Inter illa, quæ inſerenda dedi in actis Lipſienſibus cum pulcris & eruditis Leibnitii & Bernoullii inventis, dixi, me reduxiſſe conſtructionem vel inventionem punctorum hujus lineæ ad quadraturam curvæ, cujus æquatio eſt $a^4 = aaxx + yyxx$ *; & me cognoviſſe, hanc quadraturam dependere à cognitione ſummæ ſecantium arcuum circuli, quæ æqualiter creſcerent *per minima*; quæ ſumma jam dudum reducta fuerat ad quadratu-

* Vide ſupra pag. 292.

ram

ram Hyperboles per Jac. Gregorium in exercitationibus ſuis Geometricis, ubi inde deducit ſolutionem problematis longitudinum, datis vento & latitudinum differentiâ, quod novum credidit Leibnitius, & quod à Gregorio traditum tunc temporis non recordabar. Leibnitius & Bernoullius, ut cenſeo, pervenerunt ad Catenariæ Conſtructionem ope Curvæ, quam poſterior illorum habet in 1ª. Figurarum quas exhibet ad ſolvendum hoc Problema; nam Leibnitius mihi ſcripſit, ſe etiam ad eandem perveniſſe; Et invenio eandem cum illâ de qua ante, cujus æquatio eſt $a^4 = xxyy - aayy$, cujus quadratura, ut dixi, dependet à quadraturâ Hyperboles: licet nondum concipere potuerim, quomodo calculus illos perduxerit ad hanc lineam. Sed tranſeo ad meam conſtructionem, quæ abſque conſideratione aliûs lineæ curvæ, dat puncta Catenariæ per dimenſionem lineæ Parabolicæ.

Primum fundamentum totius inquiſitionis reſpectu hujus lineæ eſt hoc; Si habeas catenam compoſitam ex variis ponderibus æqualibus filo appenſis, ut BCDEF ſemper trium interſtitiorum ſe mutuo ſequentium duæ lineæ extremæ, ut CD, FE continuatæ ſibi mutuo occurrunt in linea IH perpendiculari ad Horizontem, quæ dividit interſtitium medium in duas partes æquales. Conſiderando porro catenam ita compoſitam à ponderibus connexis ad æquales diſtantias, quas ponimus infinite exiguas, & diſpoſitis, ita, ut interſtitium infimum BC ſit horizonti parallelum, ſi ſuper quovis alio interſtitio concipiamus triangula rectangula CDK, DEL, quorum unum latus ſit horizontale, videbimus, quod ab infimo initium faciendo anguli DCK, EDL, FEM, tales ſint, ut illorum Tangentes æqualiter creſcant, ut numeri 1, 2, 3, 4, id quod demonſtratu facile eſt ex dicto principio, licet forſitan eo non perveniſſemus ſine calculo Algebraico. TAB. XLVI. fig. 3.

Si porro concipiamus partes æquales catenæ CDEFG extenſas in recta horizontali in COPQR, & ex prima diviſione O ductam OS, quæ concurrat cum perpendiculari CS,

ita ut angulus COS ſit æqualis angulo CDO, ſi deinde ducantur aliæ rectæ SP, SQ, SR; triangula SCO, SCP, SCQ, SCR erunt neceſſario ſimilia COD, DLE, EMF, FNG, quoniam SCO eſt ſimile ipſi COD per conſtructionem, & aliorum CSP, CSQ &c. tangentes æqualiter creſcunt.

Si porro ducas CT, OV, PX &c. perpendiculares ad SO, SP, SQ evidens eſt, triangula CTO, OVP, PXQ &c. æqualia eſſe & ſimilia triangulis COD, DLE, EMF &c. eodem ordine ſumendo: unde concluditur, ſi ſpatia CD, DE &c. ſint infinite parva, ut & partes CO, OP &c., id eſt ſi CG ſit curva catenæ, & CR æqualis ejus longitudini, tum ſumma TO, VP, XQ &c. erit æqualis ſummæ perpendicularium KD, LE, MF &c. id eſt rectæ GΣ vel axi ΦC (nam ſpatium BC tum pro nihilo habetur) & ſumma CT, OV, PX erit æqualis ſummæ CK, DL, EM &c. ideſt applicatæ GΦ.

Deſcribendo autem centro S arcum CZ uſque ad ultimam ſecantium SR facile patet, ſummam infinite parvarum TO, VP, XQ æqualem eſſe rectæ ZR; conſequenter, ſi ponamus quod SCΦ ſit axis Catenæ, & linea CS certæ longitudinis, & quod CΦ ſit æqualis ZR exceſſui ſecantis cujuſvis SR ſupra radium SC, & quod applicata ΦG ſit æqualis ſummæ omnium CT, OV, PX &c. uſque ad illam, quæ cadit in SR, punctum G erit in curva catenæ, cujus longitudo CG erit æqualis rectæ CR: ſed quæritur ſumma infinitarum CT, OV, PX &c. quam obtineo hâc conſideratione, quod anguli SOV, SPX, SQY poſſint haberi pro rectis, utpote quorum differentia cum recto eſt infinite exigua, & quod tum lineæ OV, PX, productæ utrinque, ut & RΩ perpendicularis ad SR, fiant tangentes Parabolæ CΩ, cujus vertex eſt C, axis CS, focus S, & in qua SC eſt pars quarta Parametri; quarum tangentium quævis ſecatur in duas partes æqualiter per CR, ita ut una dimidia pars pertingat ad axem, altera ad punctum contactus, ſic ΔΩ ſecta eſt in R; quæ facile demonſtrantur. Hinc porro intelligo ex Evolu-

volutione linearum curvarum, de qua locutus ſum in *Horologio oſcillatorio*, quod ſumma omnium QY, PX, OV, CT, debeat eſſe æqualis exceſſui curvæ Parabolicæ ΩC ſupra rectam ΩR; id quod Geometræ ſatis facile intelligent, licet in demonſtrando non inhæream, quum non conſtituerim hic demonſtrationes ſcribere, ſed tantum indicare viam, quâ ad inventionem pervenis.

Datâ ergo Catenariæ Parametro SC, ſi ſumas in axe punctum quodcunque Φ, & centro S radio SΦ deſcribas arcum circuli, qui ſecat CR tangentem ad verticem in R; tangente RΩ ductâ ad Parabolam dictam e puncto R, & ſubtractâ hac ex longitudine curvæ ſuæ CΩ quam ponimus poſſe menſurari, quod reliquum eſt, erit recta applicata ΦG, & ſic per eandem Parabolam invenies tot puncta in illâ curvâ, quot volueris; miſi hanc conſtructionem ad Leibnitium initio Septembris 1691.

Poteſt porro in tranſitu notari, quod curva GC (ſumendo ſemper numerum interſtitiorum infinitum, & ideo punctum C ac ſi foret in axe & vertex) erit æqualis rectæ CR; & quod dimenſio ſpatii curvi quoque facile demonſtretur, perficiendo rectangulum RCSΘ & producendo perpendiculares GN, FM &c. uſque ad SΘ in Λ, Γ &c.: patet enim triangulum SQY eſſe ſemiſſem rectanguli FΛ, baſin & altitudinem eandem habentis, & pariter triangulum SPX ſemiſſem rectanguli EΓ & ſic porro de aliis. Et conſequenter triangulum SCR æquale dimidio ſpatii SCGΛ. Poſſem ita paucis demonſtrare fundamenta omnium quæ de hac lineâ curvâ detecta ſunt; ſed hæc ſpectant ad Leibnitium & Bernoullium, utpote hujus inventionis magis participes, quos rogatos oportet, ut in bonum publicum laborem hunc in ſe ſuſcipiant.

Finem ſcripto huic impoſuiſſem, niſi nuperrime literas à Marchione de l'Hoſpital accepiſſem, ubi quum duo notabilia hac de materia memorat, non poſſum quin paucis de iis loquar; primum ſpectat ad conſtructionem & plures proprietates lineæ curvæ D^{ni} de Beaune, quam Carteſius in Ep. 79. 3 vol. dicit ipſi inveniendam propoſitam per datam Tangen-

Tangentis proprietatem; Problema, quod mihi apparuit difficillimum. Solutio Marchionis exſtat in 34. Diario Pariſienſi anni ultimi, quare hanc hic non trado.

Alterum eſt ejus reſponſum de aliâ curvâ valde cognitâ, & quam Carteſius aliter adhuc conſideravit, ut & Huddenius eo tempore, quo negotia Reip. non impediebant, quominus vacaret ſtudiis. Curva in fig. 4. exhibetur, folium ABCH circumſcribit & utrimque ſeſe extendit juxta Aſymptoton EFG. Æquatio ejus eſt $x^3 + y^3 = xyn$ ſi AD ponatur x in recta, quæ cum diametro CA format angulum 45 graduum; perpendicularis DB, vel DH, vel DK, y; & n recta data. Cum ipſi indicaſſem, me inveniſſe quadraturam hujus curvæ, & quod contentum folii ABCH eſſet $= \frac{1}{6} nn$ id eſt $\frac{1}{3}$ quadrati diametri AC; quod ſpatium infinitum inter Aſymptoton & ambo curvæ brachia etiam ejuſdem magnitudinis eſſent; & quod quadratura generalis ſegmentorum exprimeretur per unicum terminum; ille invenit veram illam quadraturam generalem. Scilicet quod contentum ſegmentorum AH vel AK exprimatur per $\frac{nxx}{6y}$ & ſegmenti AB per $\frac{nyy}{6x}$; ſed ulterius mihi affirmat ſe eo perveniſſe per tres diverſas vias; quod miror, cum perſuaſum habeam me non parum profeciſſe unicam detegendo.

TAB. XLVI. fig. 4.

PRO-

V.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM:

A

JOHANNE BERNOULLIO

IN ACTIS LIPSIENSIBUS ANNI MDCXCIII. PROPOSITUM.

QUæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD in ratione conſtante M ad N. TAB. XLVI. fig. 5.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva pro ratione M ad N magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum: in reliquis ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determatio puncti in curva.

VI.

C. H. Z. DE PROBLEMATE BERNOULLIANO IN ACTIS LIPSIENSIBUS PROPOSITO.

ELegans inprimis eſſe hoc Problema, cum ex iis quæ Clariſſimus inventor de eo prodidit, tum ex ſolutione & commentatione fraterna manifeſtum eſt. A quo inveſtigando cum propter inſignem difficultatem, quæ ſtatim ſeſe offerebat, abſtinere ſtatuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere neceſſe exiſtimo, aut aſſequendis parem me profiteor) non deſiit tamen quaſi invitum compellere recurrens identidem quæſiti non vulgaris idea, donec tandem quod deſiderabam obtinui. Inventa nimirum *æquatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab aſymptoto perpendicularibus intercepti; ab altera elementum ſpatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci poſſet. Quod apertius exponerem, niſi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejuſmodi hyperbolicum ſecandum eſſet aut augendum ſecundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue propor-

portionales fieri poſſit, ubi ratio tangentis ad abſciſſam eſt ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit curvam quæſitam tunc iis accenſendam quæ geometricæ vocantur, alias eſſe ex heterogeneis; ac tamen conſtructionem dari poſita lineæ logarithmicæ deſcriptione, quam quidem hic adducerem, niſi viderem haud difficulter ex ipſa Jacobi Bernoullii doctiſſima ſimul breviſſimaque ſolutione omnia erui poſſe, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadverſione dignum, nempe quandocunque in inveſtigatione curvarum ex tangentibus aut ſubtangentibus ejus, ad ſimiles ei, quam dixi, æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum ſpatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diverſorum generum graduumque exiſtant, ſi hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in aſymptotis, ſint commenſurabilia. Præterea obſervanda venit in hoc problemate inuſitata ac ſingularis analyſis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir Celeberrimus *calculi differentialis* inventor, ſine quo vix eſſet, ut ad haſce geometriæ ſubtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, deſignationem in plano attinet, poſſem, ſi operæ pretium eſſet, alios modos ac fortaſſe commodiores indicare quam qui a Cl. Bernoullio præſcribitur, atque etiam docere qua ratione optime peragatur deſcriptio noſtræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari poſſunt) ſimpliciſſima cenſenda eſt, cum ad eam filis nihil opus ſit, ſed bacillo tantum utrimque cuſpidem lateri infixam habente, quo fit ut & regreſſu explorari poſſit quam recte exarata ſit. Sed his ſuperſedendum arbitror, donec inſignis uſus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utiliſſimam curvam

vam nuper mihi repertam Geometræ ſciant, cujus opera horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejuſmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis noſtris hactenus uſurpatis non ſatis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior ſpes nunc affulgeat perficiendi Longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

aabbcdeeeeefiiiiilllmmmmnorrſſttuux.

VII.

C. H. Z. CONSTRUCTIO UNIVERSALIS PROBLEMATIS A CLARISSIMO VIRO JOH. BERNOULLIO PROPOSITI.

TAB. XLVI. fig. 6.

Cum in *actis Lipſienſibus* Conſtructionem hanc me reperiſſe ſignificarem, menſe Octobri anno 1693, edenda tamen ea ſuperſedi quod futurum putabam, ut vel ab Auctore ipſo, vel Clariſſimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multum abſimi-

ſimilis brevi in lucem mitteretur; ac ſubverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nuſquam adhuc comparuit, & eſt inter eas quæ dari poſſint quodammodo ſimpliciſſima, non videtur abſque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Eſt autem hujuſmodi. In recta AB ſit datum punctum A, & oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejusquævis CD abſcindat a recta AB partem AD, quæ ad ipſam CD habeat rationem datam lineæ C ad L.

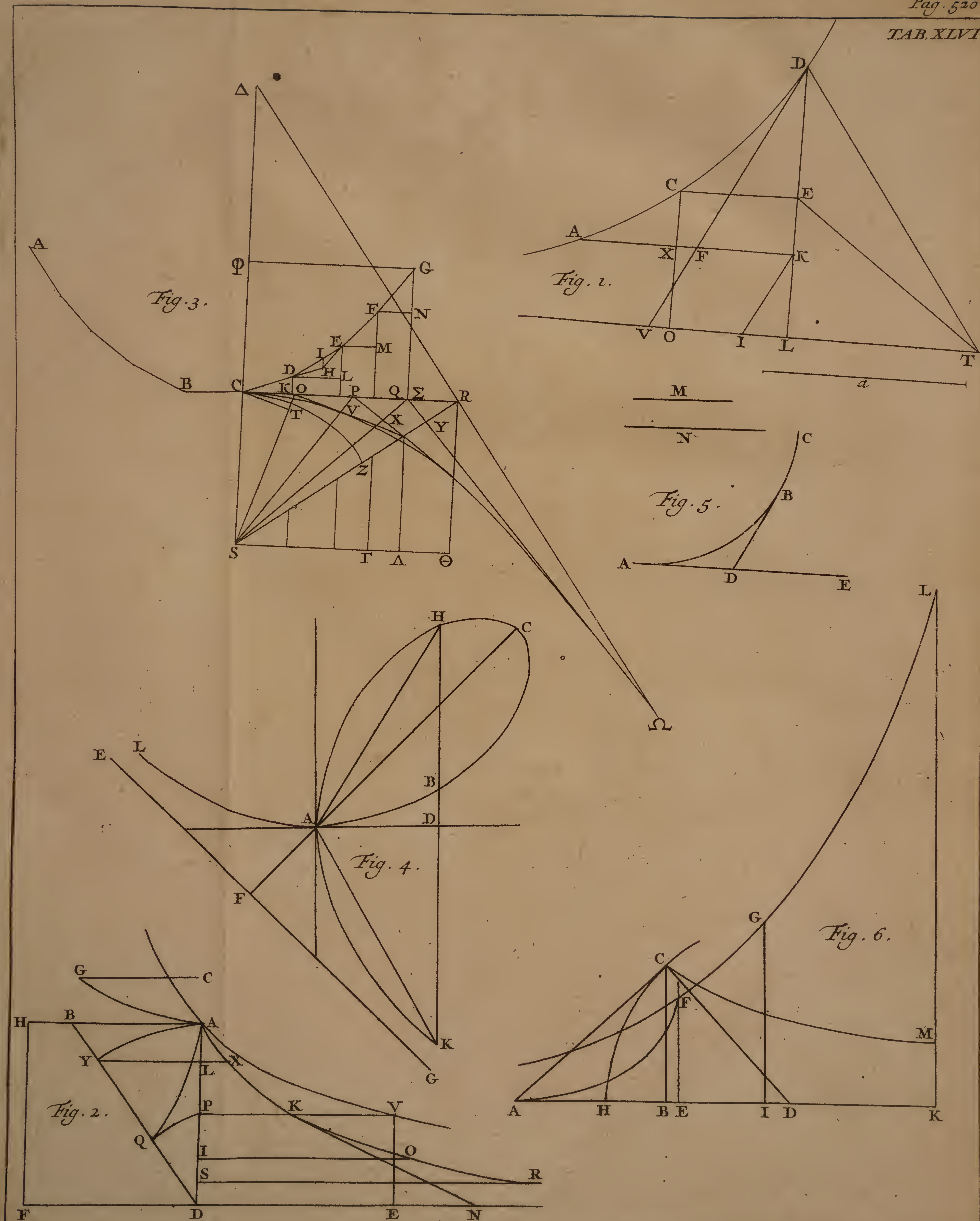
Conſtructio: ſicut C ad L, ita quælibet AE, in recta AB aſſumta ad EF ipſi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcunque cujus aſymptotos ſit AB, ad quam illa accedat verſus A. Deinde ab A verſus E accepta diſtantia qualibet AD, ſit ut C ad L, ſive ut AE ad EF, ita AD ad aliam DH; qua tanquam radio, centroque D, deſcribatur Circuli circumferentia HC; ac præterea applicetur ad Logarithmicam recta IG aſymptoto perpendicularis, ipſique DH æqualis. Jam ſicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, ſumendam in aſymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rurſus ad Logarithmicam recta KL. Utque duæ ſimul KL, EF ad earum differentiam, ita ſit DH ad DB; quæ ſumenda verſus A punctum, ſi AD major ſit quam AE; at in contrariam, ſi minor. Denique erigatur ad aſymptoton perpendicularis BC; ea ſecabit circumferentiam HC in puncto C, quod erit in curva quæſita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

Porro animadverſione dignum eſt, non ſimplicem eſſe curvaturam lineæ hujus cum C major eſt quam L, ſed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum

 hæc

hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales ſunt DA, DC, DB.

F I N I S.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA

ASTRONOMICA.

Tomus Tertius.

Tomi tertii contenta.

De Saturni Luna observatio nova. 521.

Systema Saturnium, ſive de cauſis mirandorum Saturni Phænomenon; & Comite ejus Planeta novo. 527.

Eustachii de Divinis Septempedani brevis annotatio in Syſtema Saturnium Chriſtiani Hugenii. 597.

Brevis assertio Systematis Saturnii sui. 619.

De Saturni Annulo observationes. 635.

ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ, ſive de Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ. 641.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI LUNA
OBSERVATIO NOVA.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI
LUNA
OBSERVATIO NOVA.

ANNO milleſimo ſexcenteſimo quinquageſimo quinto, Menſis Martii die quinto & viceſimo, Saturni planetam per tubum dioptricum aſpectans, animadverti præter anſas ſive brachia quæ utrimque illi cohærent, ſtellulam quandam ab occaſu adſtantem, tribus circiter ſcrupulis remotam, eratque diſpoſita ſecundum eam quæ per utraque brachia ducta fuiſſet rectam. Et cum ſubdubitarem nunquid fortaſſe planeta eſſet ejus generis, quales circa Jovem quatuor

 cir-

circumferuntur, locum Saturni ſtellulæque & poſitum utriuſque ad aliam quandam quæ tantumdem fere, ſed in contrarias partes, à Saturno diſſita erat annotavi; ex inerrantium numero hanc potiùs quam illam fore ratus, quod ab ea quam dixi recta linea deflectebat. Neque me fefellit opinio. Poſtridie enim repetita obſervatione, eam quæ ad occaſum ſpectabat ſtellam eodem ad Saturnum ſitu, eodemque quo prius intervallo ſejunctam deprehendi; alteram verò ad duplam ferè prioris diſtantiam receſſiſſe. Unde hanc quidem è fixis unam eſſe, atque à Saturno tum temporis retrogradiente longius relictam, illam autem ſimul cum eo progreſſam, comitem ipſi adeſſe intelligere mihi viſus ſum. Sequentium verò dierum obſervationibus omnis dubitatio ſublata eſt. Namque ab eo tempore per tres continuos menſes, quoties ſerenitas aëris patiebatur, novum planetam notavi, oſtendique amicis, nunc dextrum Saturno nunc ſiniſtrum; redactiſque in commentarios obſervationibus, ſexto decimo die periodum explere cognovi. Digreſſio ſumma tribus ſcrupulis paulo minor viſa eſt, ad quam ubi pervenit maximè fit conſpicuus: at cum Saturno appropinquat ante aut ponè tranſiens biduo propter ſplendorem ejus deliteſcit. Tempus verò ſexdecim dierum tam exactè circuitum planetæ metitur, ut cum annus jam & amplius à primis obſervationibus effluxerit, nihil adhuc aut abundare aut deficere deprehendatur, quoque loco prædicimus ibi ſeſe in cœlo ſiſtat. Scio ante annos complures Ant. Mariam de Rheita non unum, ſed ſenos jam Saturno errones attribuiſſe. Verum æquè circa hos, quàm circa alios illos quinque, quos præter Mediceos Jovi circumpoſuerat, deceptum fuiſſe, inde perſpicitur, quod cum meliori Teleſcopio ſeſe uti Clar. Vir Joh. Hevelius demonſtret, nullum tamen Saturno utut diligentiſſimè ſæpiſſimeque inſpecto comitatum adeſ-

ſe

ſe ſenſerit. Hoc enim ultrò fatetur. Præter Rheitam verò nemo quod ſciam ſimile quid de Saturno prodidit. Nam gemini illi quos Galilæus detexerat laterones longè aliud eſſe deprehenſi ſunt quàm prima ſpecie videbantur. Quid tamen ſint in incerto eſt, neque adhuc pronunciare audent Aſtronomi. Cæterùm mihi novum Saturniæ lunæ phænomenon ad hæc quoque viam aperuit, tandemque cauſam reſcivimus, cur interdum inter binas veluti anſas Saturnus medius teneatur, alias recta quaſi brachia protendat, tum nonnunquam omnibus amiſſis rotundus inveniatur, qualis anno 1642. ſpectatus fuit, jamque rurſus trimeſtri ſpatio perſtitit. Et harum quidem viciſſitudinum tempora in futurum definire non erit difficile ſi duorum adhuc menſium obſervationibus attendere licuerit, quæ videndum an hypotheſi noſtræ conſentiant. Expectamus enim ut ſub finem Aprilis, ſi non ante, brachia Saturno renaſcantur, non curva illa, cujuſmodi à Franc. Fontana & Hevelio depicta cernuntur, ſed ſecundùm lineam rectam utrimque prominentia, ſi quis melioris notæ perſpicillo intueatur. Nam vulgaria ſi adhibeat binos orbiculos referent, ſicuti Galilæo primum ſeſe obtulere. Noſtrum, quo Saturni aſſeclam reperimus, quinquagies diametrum rei viſæ multiplicat, duodenos pedes æquans: cui poſtea duplum longitudine conſtruximus, multiplicatione centupla. Cum autem longiora etiam hiſce Teleſcopia, utpote triginta & quadraginta pedum ab aliis fabricari dicantur, aliquid aut vitris vitii ineſſe, aut hæc eadem non debita proportione mutuò reſpondere credibile eſt. Neque enim alias hucuſque aciem eorum effugiſſet novus Saturni ſatelles.

Obſervationes præterito præſentique anno collectas, quibus periodus ipſius demonſtratur, tunc unà edituri ſumus cum integrum Saturni ſyſtema perfecerimus. Cujus interea ſummam ſequenti grypho conſignare viſum

Vvv 2 eſt,

eſt, ut ſi quis fortaſſe idem ſe inveniſſe exiſtimet, ſpatium habeat ad expromendum, neque à nobis ille aut nos ab illo mutuati dicamur.

*aaaaaaaccccc deeeeeghiiiiiiillllmmnnnnnnn
nnooooppqrrsttttuuuuu.*

Hagæ-Com. 5. Mart. 1656.

CHRI

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.

SYSTEMA SATURNIUM,

SIVE

DE CAUSIS MIRANDORUM SATURNI
PHÆNOMENON;

ET

COMITE EJUS

PLANETA NOVO.

SERENISSIMO PRINCIPI

LEOPOLDO

AB HETRURIA

Chriſtianus Hugenius S.D.

RES in cælo remotiſſimas, extraque hominum conſpectum poſitas, niſi cum ab arte ſibi auxilium adſciſcunt, hoc opuſculo perſequor, Princeps Sereniſſime, nec dubito quin multis nimia diligentia verſatus dicar in his quæ tam parum ad nos attinere arbitrantur, cum eorum quæ hîc coram & in propinquo nobis ſita ſunt, plurima inveſtigatu digna ſuperſint. Verum hi parum attendere videntur, quanto præſtet cæteris omnibus ſublimium rerum conſideratio, quamque hoc ipſum præclarum ſit, ad tam longe diſſitas naturæ partes contemplationem mitti; quæ licet viſu obſcuræ & exiles, reipſa tamen illuſtres multoque maximæ exiſtunt. Nam ſi quod procul abſunt, ideo parum ad nos pertinere illas putemus, indigni profecto ſimus mente rationis participe, qua facile immenſa cæli ſpatia tranſcendimus, indigni etiam egregio illo, nec unquam ſatis laudato, propagandæ viſionis invento, quo ad aſtrorum regionem ipſo quoque oculorum ſenſu pertingimus.

Cu-

Cujus quidem inventi beneficio ad longinqua Saturni regna propius nunc quam antehac quiſquam adivi, & uſque eò progreſſus ſum, ut vaſti adeo itineris, pars una centeſima tantummodo reliqua fuerit: quam ſi quo pacto ſuperare potuiſſem, quot qualiaque, dii boni, narranda haberem! Nunc autem ea perſcribo quæ ex intervallo iſto notare oculis valui, quæque & ipſa miranda eſſe & relatu digniſſima nemo diffitebitur. Quem enim non admiratio capiet, ubi Saturnum annulo circumdatum ac velut corona redimitum viderit? atque hanc eam formam eſſe, quæ, cum perpetuo eadem ſit, diverſas tamen facies induat, & pertinaciter hactenus conjecturas Aſtronomorum fruſtretur. At neque hoc minus novum atque inopinabile omnium auribus accidiſſet, Planetam aliquem non antea viſum in cælo repertum eſſe, niſi novitatis gratiam ſtellæ Mediceæ abſtuliſſent. Verum hic noſter Saturni accola, quo diutius latuit, majorique molimine ad terram deducendus fuit, eo magis deprehenſo gaudendum eſt: quodque unus hactenus deſideratus, cumulum nunc tandem errantium ſtellarum explet, numerumque earum duodenarium; quo majorem poſthac repertum non iri, prope eſt ut confirmare audeam. Certè jam majoribus illis ac primariis, inter quos Tellus hæc reponenda eſt, æquales multitudine minores exiſtunt, & utrique illo, quem perfectum dicimus, numero continentur, ut conſilio ſummi opificis modus hic

præ-

præfinitus videri poſſit. Cæterum multiplicem contemplandi materiam, Philoſophorum ingeniis circa hæc cæleſtia corpora exorituram, quibus veluti nova acceſſione mundum auximus, non perſequar. Unum hoc inanimadverſum eos præterire nolim; nempe quam non leve argumentum ad aſtruendum pulcherrimum illum mundi univerſi ordinem, qui à Copernico nomen habet, Saturnius hic mundus adferat: ſi enim gravatè olim iſti ſyſtemati aſſentientibus, ſcrupulum demere potuerunt quaternæ circa Jovem repertæ Lunæ; manifeſtius utique nunc eos convincet unica illa circa Saturnum oberrans, atque ob hoc ipſum quod unica eſt, noſtratis Lunæ ſimilitudinem magis exprimens: ut omittam nunc aliam quoque Saturnii globi cum hoc noſtro cognationem, quam in ſimili axium utriuſque inclinatione invenient Aſtronomiæ periti. Quæ ſanè cum mecum reputo, fieri non poſſe videtur, ut veritatem hiſce in rebus tam feliciter repertam, tamque manifeſtis indiciis fultam, ulla ætas obliterare valeat, quamdiu modo obſervationum Galilæi aut noſtrarum aliqua memoria ſupererit. Haſce igitur ut ab oblivione vindicarem, utque deficientibus forſan olim organis quibus eaſdem repetere liceat, eſſet tamen unde aliquando extitiſſe probari poſſet, hac qualicunque ſcriptione publicandas cenſui, omnibuſque impertiendas. Quod autem Celſitudini Tuæ commentarium hunc inſcripſerim, feci id non una ratione. Namque in

primis celebritatem claritatemque ei non exiguam ab Illuſtriſſimo nomine tuo acquiri poſſe credidi; cujus cum per orbem univerſum, quà modo aliquis virtuti aut humanitati locus eſt, latè fama pervaſerit, librum hunc tibi nuncupare, hoc eſt velut in edito cunctiſque conſpicuo loco eum deponere. Deinde nec ignorabam quantum momenti acceſſurum eſſet invento illi noſtro, quo perplexa Saturni myſteria exponere conatus ſum, ſi exactiſſimo tuo judicio illud probari contingeret: quod utinam non fruſtra ſperaverim. Sed ante omnia occaſionem aliquam me inveniſſe gaviſus ſum, neque omittendam duxi, qua palam commemorarem quantum tibi, Princeps Celſiſſime, artes diſciplinæque optimæ, & in his Mathematicæ præſertim debeant, quod contra invaleſcentem indies barbariem patronum iis ac defenſorem te præſtas, quodque familiariter eas colendo, ac velut in contubernium tuum admittendo, plurimum dignitatis ipſis concilias: quod denique præſtantiſſimorum ex omni antiquitate Autorum ſcriptis in vitam revocatis eaſdem promoves ac locupletas. Nempe ad hæc facienda, & illuſtria majorum tuorum exempla & innata virtus & egregia animi tui propenſio te impellunt. nos autem ad quos optimæ hujus tuæ voluntatis curæque utilitas pervenit, grato animo illa agnoſcere & prædicare æquum eſt. Hagæ Comitis. 5. Julii. Anno 1659.

NICO-

NICOLAUS HEINSIUS, D. F.

AD AUCTOREM SYSTEMATIS.

LAudibus Hugeni pars addite magna paternis,
Quem totum Vranie vindicat una ſibi.
In cunis placiti reptare per avia cæli,
Aſtra tibi puero volvere ludus erat:
Aſtra minus patriis non trita penatibus olim;
Cognita natali non minus aſtra ſolo.
Jamque eadem populis mirantibus aſtra recludis,
Perſpicua ingenii lumine facta tui.
Qualis ſidereo radiatus in æthere Titan
Oppoſitam nocti ſpargit ubique facem.
Ardue ſtellantis ſalve metator Olympi,
Qui ſuperâ nobis das regione frui:
Per quem, diſcuſſâ dubiæ caligine mentis,
Inſerimur liquido cominus ora polo.
Devocat in terras, magico ſine carmine, Lunam
Æqua Syracoſio cui manus arte ſeni.
Ecce Jovis genitor tenebroſo carcere per te
Et fugit, & lætam rurſus oberrat humum.
Macte auſis ſtudioque; Deos qui vindice chartâ
Aſſeris: inventi qui facis aſtra tui.
Nunc ſua Saturno cum vincula demſeris ipſi;
Sæcla tuum terris aurea munus eunt.

IN IDEM SATURNI SYSTEMA.

OMnia qui magni diſpexit ſidera Mundi,
Viderat hæc oculo debiliore Conon.
Attigit illa Conon miris adjutus ab alis,
Attigit, & viſu nobiliore, meus.
Perque vias Lunæ, per, qua Cyllenius errat,
Volvitur & Veneri Martia flamma comes;
Quique nitet famulos inter tot Jupiter ignes;
Lumina falcigeri miſit ad aſtra Dei:
Et didicit vario quare mutabilis ore,
Ludat in obſcurâ mobilitate Senex:
Quod frontem diadema premat, quo, Circulus illi
Aureus, infauſtum cingat honore caput:
Quæ noctes ibi Luna regat, quæque, æmula noſtræ,
Expleat amiſſum Cynthia luce diem.
Nec ſatis hæc vidiſſe ſibi miracula, teſtes
Convocat, & viſis quærit ubique novis.
Noluit hæc noſtros fugerent arcana nepotes,
Ignaros cœli nec ſinit eſſe ſui.
Ampla ſatis Juveni eſt, ut debita gloria, merces,
Vocibus innumeris quam ſua fama ſonet;
Gloria ſideribus quam convenit eſſe coævam,
Et tantum Cœlo commoriente mori.

CONST. HUGENIUS. C. F.

CHRISTIANI HUGENII

ZULICHEMII, CONST. F.

SYSTEMA SATURNIUM.

CUM ad cæleſtium contemplationem tubos opticos, nobiliſſimum Belgicæ noſtræ inventum, Galileus admoviſſet, celeberrimaque illa Planetarum phænomena mortalibus primus aperuiſſet; in his, ea quæ de Saturni ſtella prodidit, vel præcipuè admiratione digna fuiſſe videntur. Nam cætera quidem, etſi ſuſpicienda meritò ac magni facienda, non tamen ejuſmodi erant, ut, quibus de cauſis talia cernerentur, enixè quærendum eſſet. Saturni vero mutabiles figuræ novum quoddam & reconditum naturæ artificium præferebant, cujus certè rationem neque Galileo ipſi, neque tanto poſt tempore Aſtronomorum cuiquam (pace eorum dixerim) divinare contigit. Hunc primò non ſimplici orbe lucentem, ſed veluti tergeminum conſpexerat, binis ſtellis minoribus mediæ majori proximè utrinque adjectis. Eâque formâ triennio fere abſque ulla mutatione perſeverante, certò ſibi perſuaſerat, quales Jovi quatuor, tales duos comites Saturno obtigiſſe, nullo tamen motu præditos, eóque ſimili poſitu ſemper lateribus hæſuros. Verùm ſententiam mutare coactus eſt, ſolitario Saturno prodeunte, ac priore ſatellitio penitus deſtituto. Quod cum admirabundus vidiſſet & cauſam rei conjectura aſſequi tentaret, de reditus tempore, quo prior illa phaſis reſtitui deberet, nonnulla vaticinatus eſt. Sed neque hæc ita tunc ſucceſſiſſe quemadmodum ſperaverat deprehenſum eſt, nec gemina modò aſpectus diverſitate Saturnum contentum eſſe. Etenim aliæ deinceps mirabiles ac prodigioſæ formæ appa-

ruerunt, quas primùm à Joſepho Blancano & Franciſco Fontana deſcriptas novimus; adeo quidem inſolita ſpecie, ut multis oculorum ludibria cenſerentur, imagineſque vitris potius quam cælo hærentes: donec pluribus eadem videntibus, haud vano indicio proditas fuiſſe conſtitit.

Igitur ipſe quoque ad hæc cæli miracula conſpicienda magno deſiderio actus; cum non niſi vulgaria ſuppeterent perſpicilla, quinum aut ſenum pedum longitudine; artem eam qua vitra in hoſce uſus figurantur quanta potui cum cura diligentiaque excolere aggreſſus ſum, nec piguit ipſummet operi manus admoviſſe; quoad multis ſuperatis difficultatibus (nam plures in receſſu hæc ars habet quam prima fronte præferre videatur) ea denique vitra mihi effeci, per quæ ad hæc ſcribenda præbitum eſt argumentum. Continuo enim ad Saturnum teleſcopia dirigens, aliam ibi rerum faciem reperi, quàm pleriſque antehac fuerat credita. Nam quæ vicinæ illi hærebant appendices, eas non ſane geminos planetas, ſed quidvis potius aliud eſſe, diverſum vero ab his unumque numero planetam, majori intervallo à Saturno remotum, diebus ſexdecim circa eum ambire apparuit; & hunc quidem omnibus antehac ſæculis ignoratum. De qua nova noſtra obſervatione tribus abhinc annis Aſtronomos certiores feci, prudenti conſilio obſecutus viri Illuſtris, ingenioque juxta ac virtute conſpicui, Joh. Capelani. Huic enim, uti & Gaſſendo aliiſque, cum Lutetiæ Pariſiorum agens, de Saturni comite à me viſo narraſſem, multas ob cauſas cenſuit, non reticendum tam gratum omnibus futurum nuncium, quoad illud quod meditabar integrum Saturni Syſtema perſcripſiſſem. Itaque anno 1656 die 5 Martii, de Saturni Luna (ita enim novam ſtellam nec immerito appellavimus) obſervationem emiſi *, atque unà hypotheſin quæ cauſam reliquorum Saturni phænomenôn contineret; ſed hanc confuſo elementorum quibus ſcribebatur ordine, quo tantùm, non ignoraſſe nos eam illo jam tempore, teſtatum eſſet, aliique etiam ad vulganda quæ commenti eſſent hoc pacto invitarentur, neque ſibi præreptam quererentur inventionis gloriam. Deinceps ve-

* *Vide ſupra pag. 523.*

vero rogatu ejuſdem Viri eximii, ſolvi quoque hunc literarium gryphum, totamque hypotheſin ſummatim illi expoſui: unde jam ad plures forſitan noſtra de Saturni phaſibus ſententia manaverit. Sed pleniorem utique tractationem poſtulat mira & inſolens circa hunc planetam naturæ fabrica, neque expectare debemus ut vel à nobis relatis, vel ad explicanda phænomena adſumtis, fidem omnes habeant, niſi & hæc rationum momentis, & illa obſervationum teſtimonio adſtructa viderint. Quamobrem horum utrumque nunc præſtare nobis propoſitum eſt. Ac primò quæ ad comitis planetæ motum periodumque ſpectant accuratè, quantum fieri poterit, ex obſervatis definiemus, motuſque ejus tabulas condemus. Deinde ipſius Saturni phaſes ſingulas ſuis cauſis aſſignabimus, ita ut futuras quoque inde prænoſcere in promptu ſit.

Sed antequam obſervationes exhibeamus, de teleſcopiis noſtris quibus cælo eas deduximus, pauca referre expediet, ut ſciant hinc, qui comitem Saturni, mirabileſque Planetæ ipſius figuras intueri cupiunt, qualibus ad hoc turbis vitriſque indigeant; útque ſuos ſi quos habent, poſſint cum noſtris contendere. Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat, duobus convexis vitris inſtructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad trium paulo minus pollicum, ſive unciarum pedis Rhenolandici diſtantiam. Eo planetam novum & deteximus primùm, & per aliquot menſes obſervavimus, nec non formam eam Saturni, quæ à nemine adhuc percepta fuerat, quámque poſtea deſcribemus, licet non prorſus erroris expertem. Inde verò duplicata priori longitudine, ſimul duplo propiores ſideribus facti ſumus, multóque meliùs faciliúſque phœnomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, è ferri bractea conſtructi ſunt, habentque ab altera parte vitrum inſertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, ſed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quæ nimirum oculo admovetur, bina ſunt vitra minora, $1\frac{1}{2}$ pollicem diametro

Teleſcopiorum noſtrorum deſcriptio.

æquantia, juncta invicem, quæque hoc pacto æquipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3, aut paulo etiam anguſtius. Ex quo ſanè majoris vitri excellentia æſtimanda eſt, tam breve convexum perferre valentis: quoniam quanto minori de ſphæra id fuerit, tanto res viſæ magis ampliantur. Illud enim in Dioptricis noſtris demonſtratum invenietur, ſpeciei per tubum viſæ ad eam quæ nudo oculo percipitur, hanc ſecundum diametrum eſſe rationem, quæ diſtantiæ foci in exteriori vitro ad illam, quæ in interiori ſive oculari vitro eſt, foci diſtantiam. Centuplam itaque fere rationem hanc in perſpicillis noſtris eſſe conſtat, cum Galileana non ultra trigecuplam proceſſerint. Nam quantitatem incrementi eodem modo nos atque ille æſtimamus; nempe ut tanto major res quæque per tubos quam nudo viſu conſpici dicatur, quanto majori angulo ad oculum extrema ejus deferuntur, ſive quanto latior ejus imago in fundo oculi depingitur.

Quantum iis res viſæ amplientur. Augmentum teleſcopio perceptum quomodo æſtimetur.

Alia ejuſdem falſa æſtimatio.

Eſt autem & alia æſtimandi augmenti ratio, ſed parum ex vero, cùm abſque ulla anguli conſideratione apparentem perſpicillo alicujus rei magnitudinem determinamus; velut cum Jovis orbem circello duorum aut trium digitorum latitudine æqualem nobis cerni putamus. At enim cum idem circulus, trium puta digitorum diametro, major minorve neceſſario appareat, pro diverſa ſui ab oculo diſtantia, nonne etiam adjiciendum ſit, quanto ex intervallo conſpectus circulus diſco Jovis æqualis cernatur? Profectò niſi hoc addatur, nihil certi ea comparatione deſignari videtur. Et tamen ratio ſubeſt cur magis una quæpiam quam alia magnitudo imagini viſæ tribuatur, & quidem à pluribus ſæpe ſpectatoribus eadem. Verùm de his aliàs fortaſſe. In præſentia illud oſtendiſſe ſufficerit, fallacem omnino eſſe hoc modo initam æſtimationem. Idque primùm inde liquet, quod Lunâ aut ſigno aliquo cæleſti, velut Orione, prope horizontem conſpecto, idem longè majus viſus judicet, quam ubi altè jam ac ſupra verticem penè adſtiterit, cum tamen hîc nihilo minori angulo illud comprehendi certum ſit. In his autem quæ teleſcopio

in-

intuemur major adhuc error contingit. nam cum, exempli gratia, vel triplo latior ſecundum diametrum appareat Jupiter, oculo altero per teleſcopium noſtrum ſpectatus, quam Luna oculo altero vacuo, atque adeo utrâque hac ſpecie, in unum convenire juſsâ, latè à Jove Luna contegatur; nihilominus cum ſeorſim Jupiter inſpicitur, trium circiter digitorum latitudinem pleriſque ſpectatoribus æquare tantummodo exiſtimatur. quanquam aliquos repererim qui diſco Lunari æqualem faciebant, atque ita tertiam partem ſaltem tribuebant ejus quæ reipſa apparet amplitudinis. Quamobrem de multiplicatione teleſcopii malè hoc modo inquiri certum eſt. Fiet autem rectè Galilei methodo, quam in Sidereo nuntio tradidit; vel, quia hæc in prægrandibus teleſcopiis difficultatem habet, inquirendo foci diſtantias in ſingulis vitris, eaſque inter ſe comparando. Qua ratione diximus centuplum fere augmentum tuborum noſtrorum reperiri.

Cæterùm libenter intellecturos credo qui hæc legent, qualia etiam eorum ope de reliquis præter Saturnum planetis fixiſque ſtellis obſervaverimus: de quibus breviter ergo hæc habeant. In primis ſæpe illud quæſivimus, num aliqui etiam apud Venerem, Martem aut Mercurium comites circumferrentur, ubi tamen nullos unquam reperimus. Apud Jovem autem quatuor neque amplius. Qui quidem ſemper ac facilè teleſcopio noſtro patent, niſi cum diſco ſuo aut umbra Jupiter aliquem abſcondit. Inde verò quamprimum rurſus emergere incipiunt fiunt conſpicui, imò priuſquam toti exierint, ut non ſemel me vidiſſe memini. Porrò quæ in Jove zonæ ſeu faſciæ quibuſdam animadverſæ ſunt, non ſemper eâdem formâ præditæ; has ego & qui mecum obſervarunt perſpicuè ſæpe animadvertimus reliquo Jovis corpore magis lucidas, cum tamen alii obſcuriores aſſerant; quibus forſitan interjectum ſpatium inter binas zonas lucidiores pro una obſcuriore fuerit. Atque anno quidem 1656, multo majori intervallo, quam ſequentibus tribus, illas à ſe mutuo diſtare comperimus, ſicut in adjunctis delineationibus videre eſt. Qua ex inſtabilitate non malè forſan colligemus, ad inſtar

Quænam circa planetas cæteros & fixas obſervata.

In Jovis diſco zonæ candicantes.

TAB. XLVII. fig. 1. 2.

nubium noſtrarum, vapores quoſdam vicinum Jovi ætherem inſidere, qui nunc his nunc illis climatis crebri magis conſertique exoriantur.

In Marte zona obſcura. TAB. XLVII. fig. 3.

In Marte quoque cingulum ejuſmodi unicum anno 1656 deprehendi, latum admodum, mediámque diſci partem offuſcans, quemadmodum figura adjecta demonſtrat. Inſuper diſcum planetæ hujus parte aliqua deficientem vidi aliquoties, & in Venere phaſes omnes quales Lunæ. Verùm hæc minoribus etiam teleſcopiis alii notarunt.

Fixarum diametri nulla latitudine.

Fixarum autem diametros etiam maximè ſplendidarum nulla unquam latitudine cernere potui, ſed tantum minimi puncti inſtar, quoties vitris uſus ſum fuligine leviter infectis ad auferendos radios. At ex Hevelii conſilio, quod in egregio ejus extat opere Selenographico, exterius vitrum contegens, ita ut exiguum tantum foramen relinquatur, aliquam magnitudinem præ ſe ferre illas vidi; quam proinde non ſtellarum propriam eſſe, ſed ex aliqua viſus fallacia naſci arbitror. Nam noſtra quidem illa methodus, trans fumum, quo lens proxima oculo tincta eſt, ſtellas inſpiciendi, certa eſt omnique erroris ſuſpicione carens; atque ita planetas quoque nimia luce radiantes, ſolemque ipſum intueri ſolemus. Foramine autem exiguo majorem lucis partem excludendo, non tolli penitus circumfuſos ſideribus radios, ſed in orbem minorem ſatiſque perfectè circinatum eos cogi opinor, qui imprudentibus pro ipſius ſtellæ corpore imponat.

Phænomenon in Orione novum.

Unum verò circa fixas phænomenon relatu dignum occurrit, à nemine hucuſque, quod ſciam, animadverſum, nec quidem niſi grandibus hiſce teleſcopiis rectè obſervandum. In Orionis enſe tres ſtellæ ab Aſtronomis reponuntur inter ſe proximæ. Harum mediam Anno 1656 fortè per tubum inſpicienti mihi, pro ſtella una duodecim (quod quidem minimè novum) ſeſe obtulerunt; eo poſitu quem ſubjecta figura expreſſimus.

TAB. XLVII. fig. 4.

Ex his autem tres illæ pene inter ſe contiguæ, cumque his aliæ quatuor, velut trans nebulam lucebant, ita ut ſpatium

tium circa ipſas, qua forma hîc conſpicitur, multo illuſtrius appareret reliquo omni cælo; quod cum apprime ſerenum eſſet ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam eſſet proſpectus. Idem verò in hanc uſque diem nihil immutata facie ſæpiùs atque eodem loco conſpexi; adeo ut perpetuam illic ſedem habere credibile ſit hoc quidquid eſt portenti; cui certè ſimile aliud nuſquam apud reliquas fixas potui animadvertere. Nam cæteræ nebuloſæ olim exiſtimatæ, atque ipſa via lactea, perſpicillo inſpectæ, nullas nebulas habere comperiuntur, neque aliud eſſe quam plurium ſtellarum congeries & frequentia.

In Lunæ facie autem quàm multa, diligentiſſimis quibusque obſervatoribus prætcrita, tubis noſtris detegantur, non referam; quandoquidem ſchemate ad hoc deſcripto opus eſſet, eoque ampliſſimo. Quem laborem hactenus non ſuſcepimus, credimuſque exiturum in immenſum, ſi montium omnium eminentias & anfractus, qua multitudine nobis videntur, depingere conemur. Itaque ad Saturni obſervationes pergo, de quibus ſciendum eſt, priores omnes, uſque ad eam quam 19 Febr. Anno 1656 annotavimus, tubo 12 pedum peractas eſſe, reliquas pedum 23. Uterque autem everſo ſitu viſibile referebant, ideoque ſchemata omnia, non ut primùm deſcripta fuerant, hîc expreſſimus, ſed ſupera inferis, dextra ſiniſtris permutavimus, ut vera pateret diſpoſitio.

Die igitur, ſecundum Calendarium Gregorianum, 25 Martii, Anno 1655, circa horam 8 veſpertinam, Saturnum conſpexi cum brachiis utrinque ſecundum rectam lineam extentis; tribuſque fere ſcrupulis ab eo diſtantem occaſum verſus ſtellulam quandam exiguam *a*, ſic ſitam, ut ſi per brachium utrumque recta duceretur, ea in illam incurreret, aut certè pauxillo tantum inferior tranſiret. Alteraque item verſus orientem ſtellula *b* aderat, paulo longius à Saturno remota, & brachiorum lineâ multo inferior. Et hac quidem prima vice ſuſpicatus ſum ſtellam *a* Saturnum comitari, quoniam

Circa Saturnum obſervationes. TAB. XLVII. fig. 5.

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, ſimilique fere poſitu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extenſa cernebantur, ſed verſus extremas cuſpides craſſiora paulo quam qua parte Saturni diſco cohærebant, qualia ſequens ſchema exhibet.

Eâque formâ uſque ad occaſum Heliacum Saturnus perſtitit. Cæterum cum poſt phaſin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepiſſet, eadem quidem illa forma reverſa eſt duodecempedali tubo ſpectanda: ſed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem eſſe patuit; unde antea quoque talem extitiſſe credibile fiebat, quæ tamen minori teleſcopio perfectè conſpici nequiiſſet. At lineam illam obſcuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra ſe relinquentem, etiam 12 pedum teleſcopio notavimus.

TAB. XLIX. fig. 6.

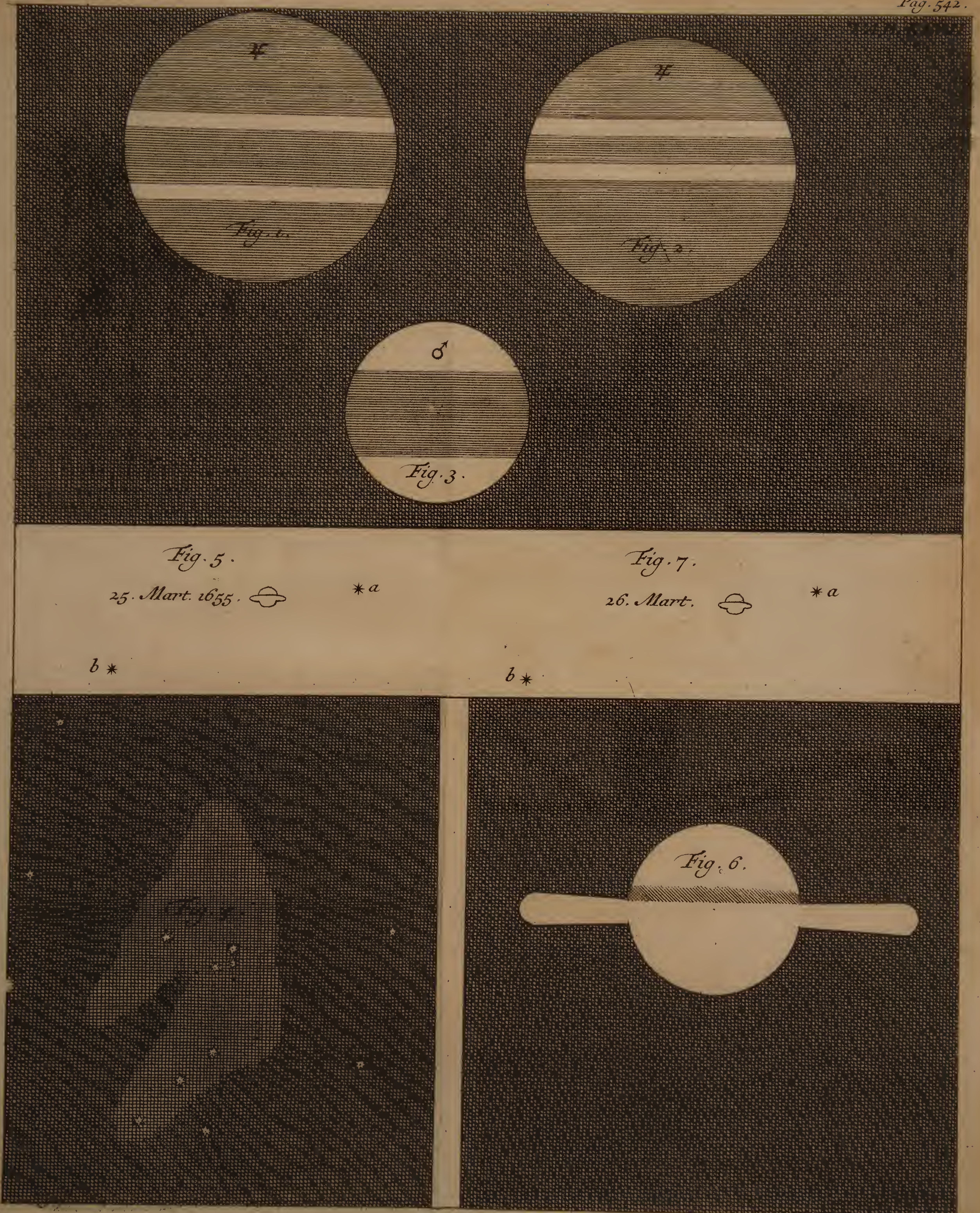
TAB. XLVII. fig. 7. Die ſequenti, nempe 26 Martii ſtella *a* eodem modo eademque qua prius diſtantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum diſtantia inter ſe ſtellularum *a* & *b* major eſſet effecta, ſequebatur vel utramque vel alteram ſaltem erraticam eſſe. Et ſtellam quidem *a* neceſſario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum eſſe noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam eſſe, quum alioqui propinquior multo fieri debuiſſet. Altera vero *b*, quominus fixa cenſeretur nihil obſtabat, imo prorſus ita exiſtimari conſentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus receſſiſſet, quantum motus ejus poſtulabat. Neque verò aliter ſe rem habuiſſe ſequentes obſervationes oſtendunt.

TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. ſtella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius receſſerat.

Inde nubili dies interceſſerunt uſque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, ſed ſtellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rurſuſque fere 3 ſcrupulis diſtabat. *fig.* 2.

Quinque diebus ſequentibus, rurſus ut ante impeditæ obſervationes.

9 Apr.


♃
Fig. 1.
♃
Fig. 2.
♂
Fig. 3.
Fig. 5.
25. Mart. 1655.
a
b
Fig. 7.
26. Mart.
a
b
Fig. 6.

9 Apr. denuo ad occidentem ſitus erat comes *a* ſicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter ſcrup. diſtans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abſceſſerat, & comes à Saturno. *fig*. 4.

Diebus duobus ſequentibus aucta fuit continuè diſtantia ſtellæ *c*, comitis *a* eadem fere manſit. Nempe

11 Apr. hic poſitus fuit. *fig*. 5.

12 Apr. talis. *fig*. 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius ſemper recedebat, ſed lentiore paſſu. *fig*. 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum ſitus erat, diſtans fere 3 ſcrup. ſtella vero *c* longius abierat, ſemper tamen oculis notata; Ac poſtea quidem eadem ad Saturnum reverſa eſt, ut ſequentes obſervationes docebunt. *fig*. 8.

18. Apr. comes ſitum mutaſſe non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum acceſſerat. *fig*. 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig*. 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque anſarum lineâ paulo ſuperior. *fig*. 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem diſtabat quantum 21. Apr. *fig*. 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem inſtitio Saturni incidit, comes in maxima ab eo diſtantia videbatur, orientem verſus. *fig*. 13.

Diebus inſequentibus uſque ad 27 Maii, ejuſmodi poſitus fuit qualem exhibent ſchemata ſubjecta.

6. Maji. *fig*. 14.

7. Maji. *fig*. 15.

10. Maji. *fig*. 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig*. 18.

14. Maji. *fig.* 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig.* 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig.* 21.

19. Maji. *fig.* 22.

20. Maji. *fig.* 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig.* 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam præterierat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig.* 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig.* 26.

Saturnus brachiorum expers inventus. Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig.* 27.

TAB. LI. fig. 4. Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28. 19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig.* 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig.* 30.

18 Apr.

18 Apr. ad ortum ſitus erat comes in maxima diſtantia. *fig*. 31.

17 Jun. hora $9\frac{1}{2}$ ultimò ea vice obſervatus fuit Saturnus, ſatellite verſus occidentem adſtante, & mediocriter remoto. *fig*. 32.

Hiſce autem obſervationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, tranſverſa illa linea, cæteris diſci partibus paulo obſcurior, ex æquo medium ejus diſcum ſecabat, eratque ad ſatellitem directa. Et hac quidem obſervatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum ſcilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, ſecundum eandem illam incedere lineam.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rurſus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; ſerius quidem quàm in obſervatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujuſmodi eſſet diſcerneretur, ob adhibitos tubos præſtantiores. *Brachia Saturno renata.* TAB. LI. fig. 5.

Faſcia autem illa ſeu zona obſcurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 ſuperior fuiſſet. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, ſecundum hujus zonæ ductum, ac proinde ſecundum rectam quoque lineam per utraque brachia protenſam, ac ſemper poſtea quotquot obſervationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem ſeſe habere comperi. Comes conſpici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque craſſiorem prope horizontem.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri diſtantia abſiſtens, quæ diebus ſequentibus duobus aucta eſt continuè. TAB. XLVIII. fig. 33.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in diſtantia maxima occidentali. *fig*. 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora $5\frac{1}{2}$ mat. propinquus Saturno comes exiſtebat, occidentalis rurſum, ac lineâ anſarum paulo ſuperior. *fig*. 35.

26 Nov. hora $6\frac{1}{2}$ mat. comes latuit. Brachia verò paulo

la-

latiora evaſerant, & quà Saturno junguntur, minus intenſa luce quàm verſus extremas cuſpides lucebant, & hac fere ſpecie ad occaſum uſque Heliacum Saturnus permanſit.

27 Nov. hora 6 mat. ſatelles ægre conſpiciebatur, ad orientem ſitus, & brachiorum linea ſuperior. *fig.* 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur ſatelles in maxima diſtantia orientali. *fig.* 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora 12½ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri diſtantia, orientem ſpectans. *fig.* 38.

A Saturno autem polum verſus dimidio circiter gradu diſtabat fixa 3 magnitudinis, quæ eſt in ventre Leonis, longitudine reſpondens Virginis gr. 4. 5′. cum latit. borea gr. 2. 49′.

22 Martii hor. 7½ veſp. comes in maxima diſtantia orientali, & anſarum linea paulo ſuperior; linea obſcura non ſatis erat conſpicua.

Scripſit mihi Hevelius ſe quoque pridie hujus diei comitem Saturni obſervaſſe ad orientem ſitum in maxima diſtantia, quod ſatis bene cum noſtra hac obſervatione convenit.

29 Martii hora 7½ comes erat in mediocri diſtantia occidentem verſus, & in eadem cum brachiis recta. *fig.* 39.

30 Martii, comes in maxima diſtantia occidentali. *fig.* 40.

Qua veſpera Hevelius quoque ad eandem partem ſibi conſpectum aſſerit, ſed difficulter, unde fortaſſe de diſtantia minus recte judicaverit, nam 1½ ſcrupulo tantum abfuiſſe à Saturno ſcribit.

18 Maji, comitem mecum obſervavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri diſtantia. *fig.* 41.

19 Maji, proximus Saturno adſtabat comes occidentem verſus, vix anſarum linea ſuperior. *fig.* 42.

Brachia Saturni in anſas mutari cœpta. TAB. XLIX. fig. 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora 5½ manè, quo die primùm poſt ortum Heliacum Saturnum obſervavi, comes mediocriter diſtabat orientem verſus, eratque anſarum lineâ ſuperior. *fig.* 43. Brachia verò prope Saturni diſcum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obſcurâ verſus inferiora ulterius promotâ.

Et

Et hac quidem figurâ permanſit, donec rurſus radiis ſolis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima diſtantia, orientem ſpectans, & in ipſa anſarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem verſus in maxima fere diſtantia ſitus erat, & anſarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis ſitus erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conſpiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem ſpectabat, eratque anſarum linea aliquanto inferior, & quaſi ſub Saturno tranſiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes receſſerat occidentem verſus, vixque erat anſarum linea ſuperior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem diſtabat, lineâ anſarum rurſus paulo ſuperior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque anſarum ſublimior cernebatur. *fig.* 49.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. poſtquam Heliace ortus eſſet Saturnus, jam latius aperiri anſæ videbantur, quanquam ob humilitatem ſideris, ſurgenteſque vapores, & auroræ claritatem non admodum diſtincte poterant diſcerni: comes occidentem verſus adſtabat, remotus ut cum maximè, anſarum linea nonnihil tamen ſuperior. *fig.* 50. *Anſæ Saturni amplius patefactæ.*

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo ſitus erat, non longe à Saturno diſtans, linea autem anſarum integra fere Saturni diametro ſuperior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam anſarum deſcenderat, occidentalis rurſus. *fig.* 52.

Forma verò anſarum diſtincte hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam uſque harum obſervationum talis extitit. TAB. LI. fig. 6.

24 Febr. hora dimidia poſt mediam noctem, comes erat in mediocri diſtantia, orientem verſus, rectâ anſarum pau-

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipſo remotus. *fig.* 54.

Comes infra Saturnum tranſire viſus.

14 Martii, hora 12, comes recta ferè infra Saturnum obſervatus, unius circiter diametri longitudine diſtans; paulum tamen verſus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum poſitus erat, fere in maxima diſtantia, inferiorque paulo eâ quæ per anſas ducitur. *fig.* 56.

Idem ſupra Saturnum tranſiens.

21 Martii, hora 11, rurſus ad eandem partem conſiſtebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro ſupra anſarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro diſtans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rurſus integra diametro ſuperior erat rectâ anſarum, ac fere ſupra orientalis anſæ extremam cuſpidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora 10½ comes in maxima diſtantia videbatur; quam accuratè hac vice dimenſus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium ſcrupulorum primorum, 16 ſecundorum. *fig.* 59.

Hucuſque obſervationes, & plures quidem quam neceſſe fuerat, recenſui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio iſto ſimul forſitan mecum novo Planetæ obſervando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit conſenſum mutuum ſuarum cum noſtris obſervationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conſpicere ante biennium cœpit, ut ſupra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clariſſimo Wrennio ipſo jam Anno 1655, ſibi animadverſum quandoque aſſerunt, nec tamen Planetam eſſe cognoviſſe donec à nobis eſſent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus inveſtigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

Lunæ Saturnia periodus.

Penſitatis priorum aliquot menſium obſervationibus, cum circiter 16 dierum ſpatio Saturnum à Luna ſua ambiri comperiſſem; nam quo loco animadverſa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum ſexto decimo inde die rediiſſe viſa eſt, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem ſitus fuerat deprehenſus; nec non 13 & 29 ejuſdem menſis. Hiſce igitur animadverſis, circulum deſcripſi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus eſſet, atque in partes 16 diſtribui, uti Schema ſubjectum exhibet. In eo comitem, ſecundum ſignorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem obſervatione ut ita ſtatuerem cogente, ſed quod in eam partem Luna quoque noſtra & Jovis comites deferrentur. Poſtmodum autem ſtabilita hypotheſi, qua phænomena anſarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me conſtituiſſe. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima noſtra obſervatione ſtetiſſet, ſæpiuſque eundem retractando, ut obſervationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti aſſignata; ita demum commodiſſimè repreſentari omnia viſum eſt, ſi prima obſervatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad viſum noſtrum vergere ponimus, & utraſque hujus epicyclii apſides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ obſervatis primi anni exactè ſatis conveniunt, quanquam aliquid ſubinde addendum auferendumve 16 dierum periodo exiſtimaverim. Cum autem ſcirem etiam orbitæ terreſtris, qua nos circa Solem ferimur, ipſiuſque Saturni motus rationem habendam eſſe, ſi accuratè comitis periodum definire vellem, proinde ſequenti methodo eam deinceps inveſtigavi.

TAB. LI, fig. 3.

Bina tempora quæſivi quibus in apogæo vel perigæo comes verſatus eſſet; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, veſperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergreſſus erat locum perigæi quantum ex obſervatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipſo fuiſſe. Alterum ſimilem comitis ſitum colligo contigiſſe die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava poſt meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejuſ-

Eadem periodus accuratius ſupputata.

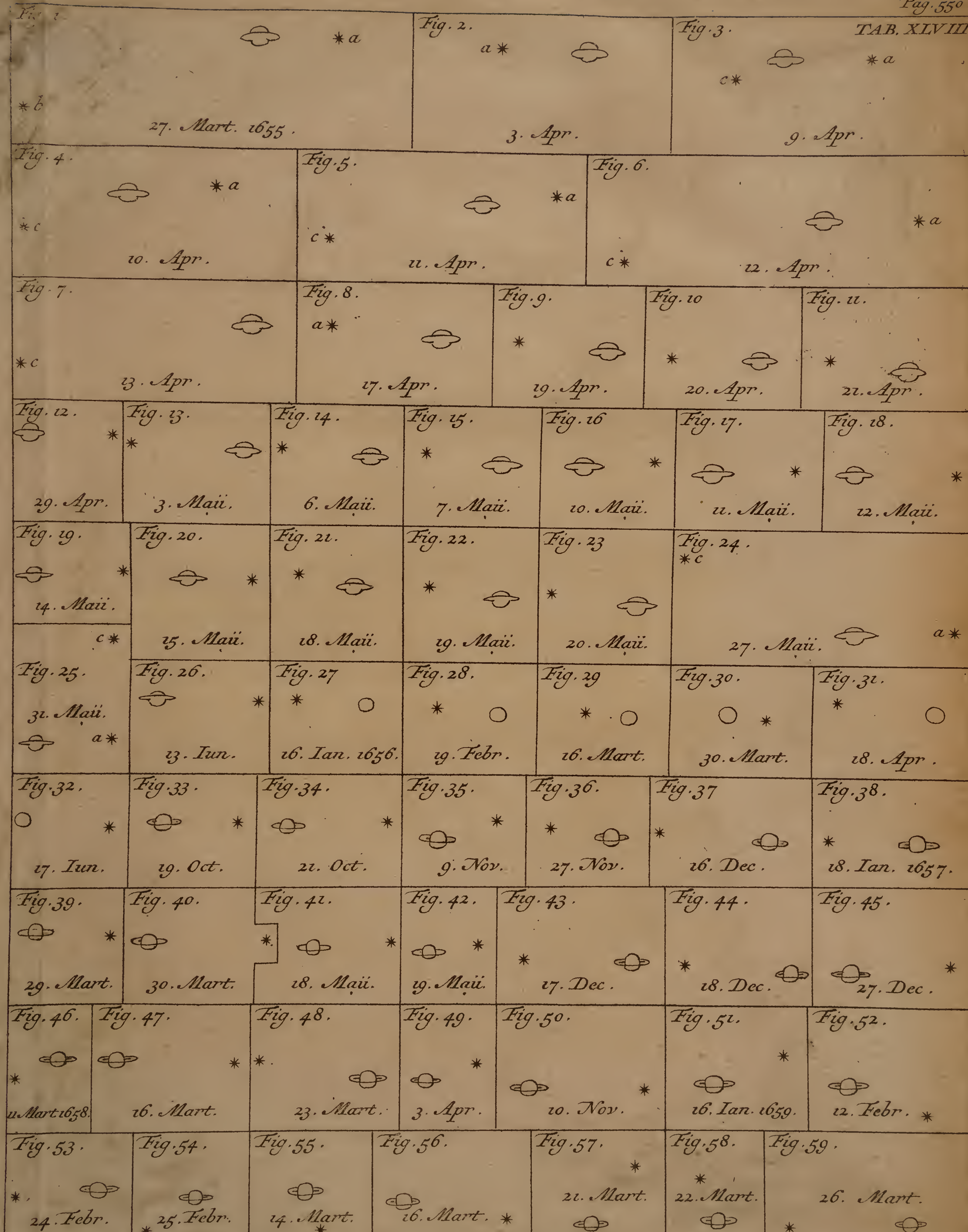
 dem

dem menſis hora 8 p. m. æquali ſpatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem ſuæ orbitæ ſuperiorem verſatum conſtat, ſequitur 16 Martii medium locum eum tenuiſſe inter puncta 1 & 2 circuli modò deſcripti; 30 verò Martii medium fuiſſe inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum eſt. Ac proinde neceſſario perigæus fuit die 23 Mart. poſt meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hiſce temporibus deſcribo circulum A B C, qui Saturni orbitam deſignet, itemque G F orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum ſumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 poſt mer. fuiſſe in A; quo tanquam centro deſcribo comitis orbitam D E L; Tellurem vero eo tempore fuiſſe in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta G A circulum comitis interſecat, ſiquidem perigæum fuiſſe conſtat. Rurſus poſito ad diem 14 Martii 1659 hora 8. poſt mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; neceſſe eſt comitem fuiſſe in H, ubi recta F B ſecat circulum ejus N H K. Eſt autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progreſſus eſt ad B: Comitem vero ſpatio dierum 16 circuitum unum abſolvere ſcio, atque inſuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur diviſis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros noſtri reſpectu comitem peregiſſe, quia in H rurſus perigæus fuit. Sit B K parallela A G. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H ſed in K poſitus fuiſſet; ſequeretur eum hiſce 1086 diebus ſexagies octies orbitam ſuam decurriſſe fixarum reſpectu, hoc eſt, totidem menſes periodicos, ſive ſidereos potius, Saturni incolis præbuiſſe. Nam quando rectæ A D, B K ſecundum quas ex Saturno comes proſpicitur, inter ſe parallelæ ſunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò inſuper arcum K H emenſus eſt, qui totidem eſt graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora tranſivit; quoniam angulus H B K æqualis eſt ei quem conſtituunt rectæ F B, G A, motus apparentis indi-

ces;

TAB. XLVIII.


Fig. 1. 27. Mart. 1655.
Fig. 2. 3. Apr.
Fig. 3. 9. Apr.
Fig. 4. 10. Apr.
Fig. 5. 11. Apr.
Fig. 6. 12. Apr.
Fig. 7. 13. Apr.
Fig. 8. 17. Apr.
Fig. 9. 19. Apr.
Fig. 10. 20. Apr.
Fig. 11. 21. Apr.
Fig. 12. 29. Apr.
Fig. 13. 3. Maii.
Fig. 14. 6. Maii.
Fig. 15. 7. Maii.
Fig. 16. 10. Maii.
Fig. 17. 11. Maii.
Fig. 18. 12. Maii.
Fig. 19. 14. Maii.
Fig. 20. 15. Maii.
Fig. 21. 18. Maii.
Fig. 22. 19. Maii.
Fig. 23. 20. Maii.
Fig. 24. 27. Maii.
Fig. 25. 31. Maii.
Fig. 26. 13. Iun.
Fig. 27. 16. Ian. 1656.
Fig. 28. 19. Febr.
Fig. 29. 16. Mart.
Fig. 30. 30. Mart.
Fig. 31. 18. Apr.
Fig. 32. 17. Iun.
Fig. 33. 19. Oct.
Fig. 34. 21. Oct.
Fig. 35. 9. Nov.
Fig. 36. 27. Nov.
Fig. 37. 16. Dec.
Fig. 38. 18. Ian. 1657.
Fig. 39. 29. Mart.
Fig. 40. 30. Mart.
Fig. 41. 18. Maii.
Fig. 42. 19. Maii.
Fig. 43. 17. Dec.
Fig. 44. 18. Dec.
Fig. 45. 27. Dec.
Fig. 46. 11. Mart. 1658.
Fig. 47. 16. Mart.
Fig. 48. 23. Mart.
Fig. 49. 3. Apr.
Fig. 50. 10. Nov.
Fig. 51. 16. Ian. 1659.
Fig. 52. 12. Febr.
Fig. 53. 24. Febr.
Fig. 54. 25. Febr.
Fig. 55. 14. Mart.
Fig. 56. 16. Mart.
Fig. 57. 21. Mart.
Fig. 58. 22. Mart.
Fig. 59. 26. Mart.
a
b
c

ces; iſque motus ex Ephemeridibus invenitur fuiſſe gr. 40, 48′. Sic itaque colligo; ſi diebus 1086 abſolvit periodos 68, atque inſuper gr. 40, 48′, hoc eſt gr. 24520, 48′, quantum ergo die una? Prodeuntque gr. 22, 34′, 44″, qui motus comitis diurnus eſt reſpectu fixarum. Ad menſis ſiderei longitudinem inveniendam ita calculum inſtituo; ſi gr. 24520, 48′ percurrit diebus 1086, quot dies impendet gradibus 360? fiunt dies 15, horæ 22, ſcr. 39. ſpatium quo ad eandem fixam Saturni incolis Luna ſua revertitur.

Deinde medium motum diurnum à ſole (qui minor eſt motu quo reſpectu fixarum comes progreditur, ut in noſtra quoque Luna evenire novimus) ita reperio; Saturni motum medium diurnum qui 2 eſt minutorum, aufero ab invento motu diurno reſpectu fixarum gr. 22, 34′, 44″. unde ſuperſunt gr. 22, 32′, 44″, diurnus motus à Sole. Atque hinc facile quoque menſis Synodici Saturnicolarum media longitudo computatur. Nempe ſi gr. 22, 32′, 44″, uno die percurruntur, quot igitur diebus gr. 360? Fiuntque dies 15, horæ 23, ſcr. 13. Reliquis duntaxat 47 ſcrupulis ad dies 16. Atque illud etiam medium tempus eſt quo noſtri reſpectu ad apogæum ſuum Saturni comes revertitur, ſive intra quod cum Saturno bis conjungitur.

Menſis Saturnicolarum vera longitudo.

Cæterum quia ex motu comitis illud præcipue inveſtigari meretur, quo pacto ad datum quodvis tempus ſitus ejus apud Saturnum exhiberi poſſit; oſtendemus nunc breviſſimam ad hoc calculi rationem, ſequentium tabularum ope abſolvendam; in quibus motum comitis æqualem qualis ex Saturno fixarum reſpectu appareret, proponimus. Hunc autem diurnum adſumſimus gr. 22, 34′, 44″, ſicut modo inventus fuit. Etſi enim expertus ſum, iterato eodem examine adhibitiſque aliis duobus temporibus quibus comes fuit apogæus aut perigæus, aliquot ſecundis ſcrupulis majorem interdum minoremve eundem motum reperiri, iſtum tamen medium quodammodo inter alios retineri poſſe ratus ſum, poſt plures abhinc elapſos annos facile emendandum. Nam & inæqualitas puto aliqua, & eccentricitas, quemadmodum in Luna noſtra, ita circa hanc quoque, diligenti obſervatione olim deprehendi poterit.

 Ta-

Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita ſua reſpectu fixarum.

In Annis Julianis.

	Gr.	Min.
1	321	18
2	282	35
3	243	53
4	227	45
5	189	3
6	150	21
7	111	38
8	95	31
9	56	48
10	18	6
11	339	24
12	323	16
13	284	34
14	245	51
15	207	9
16	191	2
17	152	19
18	113	37
19	74	55
20	58	47

In Diebus.

	Gr.	Min.
1	22	35
2	45	9
3	67	44
4	90	19
5	112	54
6	135	28
7	158	3
8	180	38
9	203	13
10	225	47
11	248	22
12	270	57
13	293	32
14	316	6
15	338	41
16	1	16
17	23	50
18	46	25
19	69	0
20	91	35
21	114	9
22	136	4
23	159	19
24	181	54
25	204	28
26	227	3
27	249	38
28	272	13
29	294	47
30	317	22

In Horis.

	Gr.	Mi.
1	0	56
2	1	53
3	2	49
4	3	46
5	4	42
6	5	39
7	6	35
8	7	32
9	8	28
10	9	24
11	10	21
12	11	17
13	12	14
14	13	10
15	14	7
16	15	3
17	16	0
18	16	56
19	17	52
20	18	49
21	19	45
22	20	42
23	21	38
24	22	35

Primo Jan. anno 1653, meridie, diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo erat gr. 274.21′. Saturni locus apparens, eodem tempore in ♌ gr. 11. 41.

In Menſibus anni Juliani ineuntibus.

Janu.	0	0
Febr.	339	57
Mart.	252	9
April	232	6
Maji	189	28
Junii	169	25
Julii	126	47
Aug.	106	43
Sept.	86	40
Octo.	44	2
Nov.	23	59
Dec.	341	21

Si fuerit datus annus intercalaris, poſt Februarium unus dies, eoque & unius diei motus addendus eſt.

Harum

Harum tabularum auxilio primùm Epocham, quæ præcederet omnes obſervationes noſtras, conſtitui diem 1 Jan. meridie, anno 1653. Nempe ex eo, quod 14 Martii, 1659, hora 8 pom. in perigæo Saturni Luna verſaretur, collegi retrorſum numerando, ad prædictam diem 1 Jan. 1653, abfuiſſe illam ab apogæi loco gr. 274, 21′. Jam vero ut ad quodlibet datum tempus, e-pocha poſterius, inveniatur ejus ab apogæo diſtantia, (namque hinc facile deinde perſpicere eſt quam propinqua Saturno apparitura ſit) *addendus eſt ad motum Epochæ, motus comitis uſque ad tempus datum, ex tabulis collectus; hinc auferendus Saturni motus apparens per idem temporis intervallum, qui ex Ephemeridibus cognoſcitur; reliquum erit diſtantia comitis ab apogæo quæſita.* Ut ſi datum fuerit tempus dies 25 Martii, anno 1655, hora 8 pom. quæ prima noſtra fuit obſervatio: Motus Epochæ, ſive diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo tempore Epochæ, quæ eſt gr. 274, 21′, addita ad motum ejuſdem Lunæ inde ab Epocha ad tempus datum, colligit gr. 278, 31′; Hinc ablato Saturni motu apparente per idem tempus, qui invenitur gr. 22, 58′, relinquuntur gr. 255, 33′, diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo, quæ invenienda erat. Unde apparet in circulo (Tab. LI. fig. 3.), ubi A apogæi locum referebat, fere ad numerum 12 illam conſtitiſſe, eoque in maxima propemodum diſtantia viſam, uti revera contigit. Calculum autem ſubjicimus qui ſic ordinatur.

Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.

Gra-

	Gra.	Mi.
Motus Epochæ,	274	21
Anni 2	282	35
Martii 1	252	9
Dies 24	181	54
Horæ 8	7	32
Summa	278	31
Motus Saturni apparens	22	58
Reliquum	255	33

diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo.

	G.	M.	
♄ Locus app. 25 Mart. 1655,	4	39	♍
♄ Locus app. tempore Epochæ,	11	41	♌
Reſtat ♄ motus apparens,	22	58	

Ejus calculi comprobatio. TAB. XLIX. fig. 1.

Ut verò conſtet methodi ratio, intelligatur in ſuperiori diagrammate, Saturnus die 1 Jan. 1653 poſitus fuiſſe in A, terra in G, Luna Saturni in E, gradibus 274, 21′ ab apogæo L. Rurſumque 25 Martii 1655, Saturnus ponatur in B, terra in F, Luna Saturni in M: ſitque BN parallela A L. Quoniam igitur Lunæ motus periodicus inter bina illa tempora, additus motui Epochæ, hoc eſt, arcui L D E graduum 274, 21′, efficit gr. 278, 31′; erit idcirco arcus N K M hoc graduum numero. Diſtantia autem Lunæ Saturniæ ab apogæo eſt arcus O K M, qui ut cognoſcatur, auferendus eſt ab arcu N K M arcus N O. Ergo cum arcus N O totidem ſit graduum atque angulus quem conſtituunt rectæ O F, L G; hujus autem quantitas definiatur apparenti Saturni motu inter duo prædicta tempora; apparet nos rectè ab inventis gr. 278, 31′, hoc eſt ab arcu N K M, ſubtraxiſſe Saturni motum apparentem gr. 22, 58′ (quippe æqualem arcui N O) ad conſequendum arcum O K M, gr. 255, 33′, diſtantiam nempe Lunæ Saturni ab apogæo.

Nondum hic locus eſt explicandi alium quendam hujus lunulæ motum in latitudinem, obſervationibus aliquot præcedentibus jam ſeſe prodere incipientem; quo nempe ab linea recta per anſarum extrema tranſeunte plerumque exorbitat, apparetque circa Saturnum ellipſin percurerre, interdum quidem ſatis latam, alias verò anguſtiorem, & rotundo

do Saturno lucente, in rectam lineam abeuntem. Etſi enim, ad verum lunulæ ſitum reſpectu Saturni determinandum, hujus quoque motus ratio eſt habenda, cum tamen cauſæ ejus cum cæterorum phænomenôn cauſis prorſus conjunctæ ſint, ſimul cum illis atque una opera exponendum cenſeo.

Illam igitur Syſtematis hujus partem alteram nunc aggredior, in qua formæ Saturni inſtabilis atque à ſe ipſa diſcrepantis ratio reddenda, tum qua periodo ſingulæ mutationes contingant dicendum eſt. Harum aliquas quæ nobis ſeſe obtulere ſupra exhibui; ſed eæ partem tantummodo periodi complectuntur. Ideoque ut omnem phænomenôn diverſitatem ab iis quas dicemus cauſis pendere conſtet, aliorum quoque temporum obſervationes examinare neceſſe erit, quas à 40 atque amplius annis complures ſcriptis prodiderunt. At verò cum Saturni figuras omnes quas nobis delinearunt oculis luſtro, eas multiplices adeo ac prodigioſas invenio, ut ſi qua hypotheſis comminiſcenda foret quâ cunctis fieret ſatis, nemo non, ut opinor, in ea excogitanda operam luſurus ſit: cum nulla tam crebræ atque enormis transformationis cauſa eſſe poſſit, niſi ponatur ipſam Saturnii corporis molem identidem aliam atque aliam faciem induere, quod ab omni veriſimilitudine eſt alienum. Quamobrem delectus adhibendus eſt obſervatis illorum, & inquirendum quænam ex iis fidem mereantur, quæve contra ut ſuſpecta rejicienda ſint. Quo in examine illud concedi nobis poſtulamus, ut quoniam Saturni comitem primi perſpicillis noſtris deteximus, ac quoties libet clarè intuemur, præferantur propterea noſtra hæc illis quibus alii ad ſtellam eandem nequaquam pertingere potuere, licet quotidie Saturno obſervando intenti: eoque noſtræ etiam circa formam planetæ obſervationes veriores habeantur, quoties eodem tempore nobis atque illis diverſæ phaſes animadverſæ fuerint. Adjuncta itaque tabella omnes eas exhibet quas ex variis autoribus deſcripſimus. TAB. LII.

Ac prima quidem harum formarum eſt quam Galilæus ad- *Hæ ſingulæ examinantur.*

TAB. LII. fig. 1. notavit anno 1610, in qua triceps Saturnus ſpectatur, minoribus duobus orbiculis majori utrinque adjacentibus. Hanc alii quoque permulti viderunt, aut certè ſe vidiſſe crediderunt. Nam ſi grandiores tubos adhibuiſſent atque optimis vitris inſtructos, haud dubiè pro triplici hac globulorum facie eadem ſeſe illis obtuliſſet quam nobis diximus anno 1655, ac rurſus anno inſequenti, die 13 Oct. viſam. Hoc enim inde colligimus quod dum illis bini ad latera globuli apparent, nobis porrecta in longitudinem brachia tubi noſtri referunt; uti contigit eo ipſo anno 1655, menſe Aprili ac Majo, quo tempore triſphærica illa figura Ricciolo Helvelioque obſervata fuit. Etenim quo certius conſtet ob perſpicillorum parvitatem talem hanc cerni, experimur nobis quoque, quoties breviori perſpicillo, quinûm puta aut ſenûm pedum, Saturnum aſpicimus, binos globulos dictorum loco brachiorum apparere; etiam illâ anni 1658 jam exiſtente phaſi.

Quænam autem fallacis imaginis cauſa ſit facile perſpicitur. Quippe enim quum circa extremas cuſpides ampliorem lucem brachia hæc ſive alæ emittant, quam qua parte medio Saturni diſco adhærent, ubi ſemper umbræ aliquid intercedit, non modo cum manifeſto jam bifida evaſerunt, velut anno 1658, ſed antea quoque ut anno 1657; non mirum eſt lucem illam intenſiorem, debiliori interjecta, penitus à medio orbe ſeparatam videri. Neque item rotundam ex oblonga fieri mirandum eſt, cum idem accidat omni figuræ eminus, nec ſatis diſtinctè ob exilitatem, perceptæ, atque eo magis quo fuerit lucidior. Itaque plane conſtat teleſcopiorum culpa phaſin hanc vitiatam eſſe, licet obſervatores bona fide eam tradiderint.

TAB. LII. fig. 2. Quæ ſequitur hanc nihilo melius ſe habet, à Scheinero obſervata anno 1614. Atque equidem dubito, perfectioribuſne an deterioribus perſpicillis, quam qui præcedentem dederunt, hanc deprehenderit. Quoniam hactenus quidem ad veram magis accedit, quod affixas Saturno auriculas exhibet; at contra in eo aberrat, quod plus juſto earum contra-

trahat longitudinem. Hæc autem phaſis tum ſibi ipſi tum ſuperiori fidem derogat, alterutram certe haud veram fuiſſe arguit; quoniam eodem tempore, anno nimirum 1614, altera à Scheinero, altera à Galilæo aliiſque obſervata perhibetur. Ut proinde dubitandum non ſit, quin & hæc ſimilis extiterit ei quam nos anno 1657 vel 1658 in commentaria retulimus. Neque aliud de tertia hujus tabellæ exiſtimandum eſt, quæ Ricciolo ſecunda ponitur, quamque anno 1640 & 1643 obſervatam ſcribit. Veritati tamen propior hæc videri poteſt, quod pro orbiculis oblongas atque olivæ ſimiles figuras habeat. TAB. XLII. fig. 3.

Quarta eſt quam in locum triſphæricæ formæ Hevelius adſumſit in libro *de Saturni nativa facie;* ubi ſecundum leges hypotheſeos ſuæ aſſerit talem quandoque cerni debere, quæ tamen ex viſus hallucinatione in triſphæricam degeneret. Quanquam mihi ne iſtiuſmodi quidem forma ſatis convenire hypotheſi illius videatur, ut poſtea oſtendemus. fig. 4.

Ejuſdem Hevelii etiam quinta eſt, cui ſimilem Gaſſendus edidit. Et hæc quidem ſatis prope cum noſtra illa anni 1658 conſentit, niſi quod partes brachiorum tenuiores, qua medio diſco adnectuntur utriuſque tubi non ſint aſſecuti. fig. 5.

Idemque in 6 & 7 contigit, quæ ambæ ab Hevelio quoque traduntur, ſimiles iis quas circa eadem tempora Ricciolus obſervavit, nimirum anno 1648, 1649 & 1650, quæ hic octavo nonoque loco exhibentur. Neque alia re differunt, quàm quod medius orbis Hevelio nonnihil oblongus apparuit, cum Ricciolo rotundus fuerit: quodque hic connexas anſas cum inter ſe tum Saturno ipſi ſpectaverit, quæ Hevelio pauxillo à contactu abeſſe viſæ ſint. Verum ipſe Hevelius cauſam cur ſeparatæ videantur viſus imbecillitati adſcribit, cum alioqui reipſa cohærere eas Saturno ſtatuat. fig. 6. 7. fig. 8. 9.

Tales autem & Euſtachius de Divinis notavit anno 1646, 1647 & 1648, à quo editum ſchema ad num. 10 hic exhibuimus. Iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt omnium emendatiſſimè nativam Saturni faciem nobis deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas quæ in fig. 10.

ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.

TAB. LII. fig. 11. Porro ab hiſce figuris non multum recedit ea quæ à Fr. Fontana vulgata fuit, undecima tabellæ noſtræ. Quam quidem & Ricciolus anno 1646 ſibi viſam ſcribit. Sed minus bonis teleſcopiis tunc uſum crediderim, quam quibus modo dictas octavam nonamque detexit. Siquidem eodem anno 1646 ſeptimam formam ſe vidiſſe teſtatur Hevelius, cui potius hic ſtandum eſt. Nam Fontanæ obſervationes quominus in dubium vocare verear facit, quod etiam olim magis monſtroſas formas Martis publicavit, veluti trilateræ cujuſdam rupis, ac rurſus aliter cum nigra in medio orbe macula; quæ nos cum aliis multis fabuloſa comperimus. Hæc tamen, quam in Saturno prodidit formæ diverſitatem, neque magna eſt, ut dixi, neque miranda.

fig. 12. 13. Plus negotii poſteriores duæ, duodecima decimatertiaque, exhibituræ videntur: quarum priorem præter Blancanum eiam Gaſſendus prodidit; reliquam Ricciolus, aliunde tamen acceptam, nobis impertiit. Mirabilis præſertim illa Gaſſendi apparet. Verumtamen ſi bene perpendatur, facile eſt intelligere, quo pacto ab nona figura hæc defluxerit. Nam ſi tantum in locum rotundarum lacunarum, lunatæ ſubſtituantur, cornibus ſeſe mutuo reſpicientibus, jam profecto nona illa exiſtet, quam Ricciolus adnotavit. Nihil mirum autem Gaſſendo ac Blancano, cum non magnis perſpicillis uterentur, rotundas potius eas maculas quam lunularum forma apparuiſſe, ſiquidem partes harum acuminatas diſtinctè percipere illis negatum fuit. Tertiadecima denique quam Ricciolus à Fontana, itemque ab aliis Romæ viſam memorat, anno 1644 & 1645: eam quoque pro octava ac nona ſuppoſitam eſſe certum eſt, vel etiam pro ſeptima quam Hevelius prodidit. Non ſolum enim Ricciolus hanc ſibi unquam oblatam negat, ſolas octavam, nonamque cum anſis ſe vidiſſe affirmans: ſed & eodem anno 1645 Heveliano teleſcopio ſeptima illa conſpecta fuit. Nempe anſas Saturno conjungi rectè hîc Fontana animadvertit; ſed cum præcipuus earum ſplendor à parte gibba procederet, orbicularem ibi figuram conſtituere viſus eſt. Non

Non adſcripſi phaſibus hiſce eam qua Saturnus ellipſis formâ conſpectus dicitur, abſque illis comitibus brachiiſve; quoniam ſatis conſtat ob exilitatem teleſcopiorum, in ipſo inventi hujus exortu, talem apparuiſſe; poſtquam verò ad majorem perfectionem eadem adducta ſint, neminem amplius ſolitarium Saturnum vidiſſe niſi ſimul & rotundus fuerit.

Omiſi etiam phænomenon aliud à nonnullis quidem relatum, ſed vanum proculdubio atque à ſola imaginatione profectum: quo nempe alterum quandoque Saturni ſive comitem ſive anſam altera minorem deprehendi aſſerunt. Ego vero exiſtimo non tam ab indiſcreta perceptione phaſin hanc enaſci (cur enim hanc anſam potius quam illam minorem dicerent?) quam quod ubi hypotheſin quiſpiam commentus fuerit, ex qua talem prodire neceſſe ſit, facile ſibi ipſi imponat, quodque cupit evenire credat. Itàque viro eximio J. Hodiernæ qui ad nos è Sicilia Syſtema ſuum Saturnium, de quo pluribus mox agemus, miſit, accidiſſe reor. Hic enim anno 1655 & ſub finem anni inſequentis, orientalem globulum reliquo minorem ſibi apparuiſſe ſcribit, quum tamen eodem tempore, nobis inſpectantibus, eadem utrique magnitudo, claritas ac figura adfuerit, non quidem orbicularis, ſed rectà in longitudinem utrinque à Saturni diſco procedens. Quin etiam fruſtra cauſam hujuſce rei ex hypotheſi ſua adducere Hevelius laborat, quum planè contrarium ex ea ſequatur, perpetua videlicet utriuſque anſæ æqualitas. Nam cum faciem Saturni nativam ejuſmodi fingat, qualis ſuperiori tabella ad numerum ſeptimum exhibetur, utrâque ſcilicet anſâ pari formâ ac magnitudine corpori medio adnexâ, non ſinunt ullæ opticorum leges, ut qualicunque hujus corporis converſione, aliter una atque alia anſa ſeſe videndam nobis præbeat. Nobis, inquam, in tam immenſa poſitis diſtantia. Cum enim 3000 fere diametris Saturni maximis ab eo remoti ſimus, quo pacto exiſtimat vir Clar. nos percepturos diſcrimen angulorum quibus propior remotiorque anſa ſpectari debeat?

Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem.

TAB. LII. fig. 7.

Æquè parum rationi conſentaneum eſt quod, ob eandem il-

Non etiam unamquam.

alteram citius ad medium Saturni corpus applicari.

illam diſtantiæ differentiam, unam anſarum citius quam alteram cum medio diſco coaleſcere poſſe exiſtimat. Hoc enim, admiſſa licet Heveliana hypotheſi, atque etiamſi centuplo præſtantiores tubos haberemus, nequaquam tamen nobis viſu deprehendere liceret. Cæterum & hujus ſententiam viri ſolertiſſimi, quo certè nemo hac tempeſtate majori animo atque induſtria rem promovet Aſtronomicam, pluribus exponere, & aliorum inſuper de propria Saturni forma opiniones, priuſquam noſtram adferamus, recenſere placet, quas poſt editam de Luna Saturni obſervationem omnes accepimus. Hevelius igitur, in eo libro quem peculiarem huic argumento dicavit, cauſas phænomenôn redditurus, ſphæroidis oblongi figuram medio corpori Saturni tribuit, cui ab utroque latere appendices iſtæ, ut jam dixi, brachiorum ſive anſarum forma, firmiter adhæreant, quemadmodum ſupra 7 loco expreſſimus. Porro ſimul cum Saturno haſce anſas, ſpatio 30 circiter annorum, circa minorem ſphæroidis axem converti facit, qui quidem axis plano orbitæ Saturni ſit ad angulos rectos. Enimverò his poſitis ſeptimæ quidem ſuperioris figuræ phaſin nec non rotundam quoque repræſentari certum eſt: ut nimirum in duobus eclipticæ locis oppoſitis anſata hac facie Saturnus appariturus ſit, aliiſque rurſus duobus rotundus anſiſque prorſus exutus. Quinimo & ſexta ac quodammodo quinta quoque exhiberi poſſent, niſi quod conjunctæ cum medio diſco anſæ videri debebant. Sed quarta phaſis nequaquam ab eadem forma proficiſci poterit. Nam cum ponatur Saturnus cum annexis ſibi anſis, qualem 7 figura oſtendit, rectus conſiſtere ad planum eccentrici ſui, atque ita perpetuo manere, licet circa axem proprium vertatur; eveniet quidem ea converſione, ut paulatim arctius ad medium orbem anſæ applicentur, veruntamen ſemper geminas lunas referent ejuſdem cum dicto orbe altitudinis, minimeque in tam compreſſas formas abibunt. Nam quod hoc efficere poſſe declinationem Saturni orbitæ ab ecliptica Vir Cl. cenſet (ita enim mihi reſpondit cum difficultatem hanc ei moviſſem) ſi diligentius rem expendat in-

Hevelii hypotheſis circa anſas Saturni examinatur.

TAB. LII. fig. 7.

intelliget fieri non poſſe, cum Saturni orbita tantum 3 gradibus ab eclipticæ plano recedat, ut inde anſarum figuris ulla nobis percipienda mutatio adveniat. Cæterum nec veram quidem eſſe hanc quartam phaſin ſuperius indicavimus, ſed cum hæc, ſive triſphærica potius, minoribus teleſcopiis cernitur, noſtris prægrandibus illam comparere quam adnotavimus anno 1655 & 1657. Quæ cum adhuc minus Hevelianæ hypotheſi conveniat, clarius demonſtrat illam ſcopum non attigiſſe. Neque ſanè vel rotundæ phaſis phænomena ſatis congruunt præſtitutis ab Hevelio limitibus; ut patet non tantum ex prædictione ejus, eventu refutata, quæ ferebat rotundam phaſin anni 1656 continuatum iri uſque in Menſem Septembrem anni 1657, cum tamen jam inde à 13 Oct. 1656, anſas Saturnus recuperaverit, neque poſtea amiſerit; ſed & ex Galilæi obſervatis circa rotundam phaſin anni 1612. Solſtitio enim hujus anni, Saturnus gr. 18, 22′. ♓ obtinens, tricorpor adhuc Galilæo apparuit, quum per tabulas Hevelii debuiſſet rotundus obſervari, ac viciſſim 1 Dec. ejuſdem anni 1612, cum verſaretur in gr. 11, 27′. ♓ rotundus Galilæo repertus eſt, quo loco Hevelius triſphæricum expectaſſet.

Cauſa phænomenôn Saturni à Robervallio excogitata.

Alteram hypotheſin, ingenio ſuo acutiſſimo dignam, ſummus Geometra E. Robervallius nobis expoſuit. Qua quidem Saturnum perinde ut cæteros planetas rotundum ſtatuit; egredi autem è Zona ejus torrida, hoc eſt, quæ rectiores ſolis radios excipit, vapores quoſdam non admodum ſpiſſos, qui procul à ſuperficie ejus in ſublime evolantes, undique illum ambiant, præterquam polos verſus, ubi fortaſſis intenſum frigus eos à ſole attrahi prohibeat. Hi ſi quando omne ſpatium complent à Saturno ad uſque extremam ipſorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus denſi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem ſolares radios non reflectunt, niſi inde ubi magis conferti iiſdem opponuntur; quod noſtri reſpectu neceſſe eſt fieri in partibus à medio diſco Saturni remotioribus. Ubi pro-

proinde anſarum formam ex ea reflexione produci oportet, illasque inter ac Saturnum ſpatia utrinque obſcura vel certè minus lucida intercedere. At quoties nullæ prorſus hujuſmodi exhalationes aſcendunt, rotundus planeta ſpectabitur.

Equidem rectè hoc conſideravit vir ſagaciſſimus eſſe aliquid quod æqualiter undique Saturnum circumdaret; ſuadente ſcilicet periodo Lunæ Saturniæ dierum 16, etiam ipſum circa axem ſuum, & breviori tempore, converſiones facere; ex quibus converſionibus intra paucos dies diverſas phaſes naſci oporteret, niſi undique eodem modo materia quædam circumpoſita eſſet. Nec diſſimili collectione uſi fueramus dum noſtrum Syſtema effingeremus, ut poſtea dicetur. Verumtamen ex illa ſua hypotheſi neque phaſis noſtra anni 1655 & 1657, ſatis commodè exponitur, neque certis Saturni orbitæ locis phaſes quæque peculiares ſunt, quod tamen ita ſe habere obſervationes omnes evincunt, & rotundi Saturni inprimis. Hæ enim in duobus oppoſitis Eclipticæ locis accidere animadverſæ ſunt, contraque in iis qui quadrante hinc diſtant, anſæ quam maximè expanſæ: cum tamen cauſa non appareat cur aliis quidem orbitæ partibus nullos vapores Sol è Saturno, aliis maximam eorum copiam extracturus ſit. Deinde vapores iſti, neſcio quam bene, at multum certè diſſimiles noſtris hiſce qui terram ambiunt ponuntur, tum quod immenſo ſpatio, prout hi ſolent, à Saturno aſcendant, tum quod verſus polos pauciſſimi aut nulli ſint, cum circa terræ polos plures contra atque altiores exiſtant quam circa Zonam torridam. De elliptica autem forma Saturni diximus ſupra, eam revera nunquam talem cerni, ut proinde cauſam ejus adferre ſuperfluum fuerit.

Hodierna Siculi circa eadem phænomena opinio.

Nunc verò tuam quoque Hodierna doctiſſime ſententiam excutiamus, quam novo nuncio meo de Saturni Luna & promiſſo Syſtemate excitatus, ſubito publicam feciſti. Meretur tuus ille in hæc ſtudia non vulgaris amor, ut melioris notæ teleſcopia tibi ſuppeditentur, qui qualibuſcunque etiam inſtructus, non ceſſas in cælum quà licet eniti, ſummum-

mumque illum planetarum, formarum varietate omnes fruſtrantem, certis legibus aſtringere aggreſſus es. At ille te quoque ut opinor deluſit. Nam ſi poſthac ea facie ſe tibi offerat, qua mihi anno 1655 & 1657 apparuit, vel ea quoque quæ ſucceſſit anno 1658, cognoſces utique has non quadrare illi quod tibi finxiſti corpori. Sphæroidi nimirum, cujuſmodi aut ovum aut prunum eſt, ſed magis etiam oblongo quam Hevelianum illud, ſimilem Saturnum imaginaris; in quo binæ utrinque ſint maculæ lucis expertes, quales in tabula ſuperiori phaſis octava exhibet, quæ nobis interſtitia illa inter anſas Saturni mediumque ejus diſcum referant. Inde converſiones hujus corporis circa axem, eadem periodo qua & Hevelius, definis; & rotundum tunc videri aſſeris, cum longior ſphæroidis axis ad nos dirigitur, ideoque bis hoc accidere annorum 30 decurſu. Verùm enim cum prorſus rotundus ac orbe integro lucens appareat Saturnus, quoties brachiis ſuis nudatus eſt, expendendum tibi amplius relinquo, qua ratione lacunas quaſdam expleas quas à maculis illis nigris ſuperfuturas rectè ipſe prævidiſti. Præterea & phaſes illas te conſiderare velim quas hæc tua hypotheſis non poteſt non producere, nec à quoquam tamen obſervatæ perhibentur. Quas ut facilius omnes coram inſpicias, ovum aut aliud quod eam formam habeat, iſtis maculis ornatum, tibi proponito, atque ita ut Saturnum converti vis circumducito; videbis non pauca in tuo hoc Saturno phænomena quæ cæleſtis Saturnus nunquam exhibuit, atque alia rurſus, quæ ineſſe huic certo tibi affirmare audeo, non videbis, ipſéque de Syſtemate tuo ſtatues.

TAB. XLIX. fig. 6. 7.

TAB. LII. fig. 8.

Quod autem rei veritatem neque tu neque illi viri egregii, quorum antea opiniones recenſui, aſſecuti ſitis, minimè mirandum eſt, aut vobis imputandum, utpote ad quos falſa plurima pro veris phænomenis delata ſint; alia vero quæ de Saturno citra viſus fallaciam obſervantur, non pervenerint. Quæ ſi nobiſcum aſpicere vobis contigiſſet, eadem inde quæ nos de nativa Planetæ forma collecturos fuiſſe credibile eſt. Me vero præter phaſes illas ſynceriores, etiam Lunæ Satur-

niæ motus jam inde à principio animadverſus, non parum hîc adjuvit; ſiquidem ex hujus circa Saturnum gyratione, prima mihi ſpes de conſtituenda hypotheſi affulſit. Quæ cujuſmodi ſit deinceps explicare aggredior.

Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata.

Quum ergo 16 dierum periodo circumferri Saturno planetam novum comperiſſem, haud dubiè minori etiam temporis ſpatio Saturnum in ſeſe ſuper axem ſuum revolvi arbitratus ſum. Namque antea quoque, in eo cum Tellure hac noſtra cæteris primariis Planetis convenire, ſemper credidi, quod ſinguli in ſe ipſis rotentur, atque ita tota eorum ſuperficies lumine ſolis per vices gaudeat. Quin imo in univerſum ita cum magnis Mundi corporibus comparatum eſſe, ut illa quibus alia minora circumferuntur, ipſa quoque in medio poſita minori tempore circumeant. Ita enim Solem diebus 26 circiter in ſe redire maculæ ejus declarant: circa Solem vero Planetarum ſinguli, inter quos Tellus quoque reponenda eſt, prout quiſque remotior eſt ita tardius curſum conficiunt. Rurſùs Tellus hæc diurno ſpatio gyratur, quam Luna menſtruo motu ambit. Jovis autem Planetam quatuor minores, hoc eſt, totidem Lunæ circumſtant, eâdem hac lege, ut propiores quæ ſunt, celeriore curſu ferantur. Unde Jupiter quidem breviori forſitan tempore quam 24 horarum converti cenſendus eſt, cum citima ei lunularum minus biduo impendat. Quæ omnia cum pridem cognoviſſem, Saturno quoque jam tum ſimilem motum ineſſe judicabam. De celeritate autem periodi, comitis ſui obſervatio me certiorem fecit. Qui cum 16 diebus orbitam expleat, Saturnum in centro orbitæ ſitum, multo frequentius circumagi arguit. Jam verò & hoc credibile videbatur, omnem cæleſtem materiam, Saturnum inter comitemque ejus interjectam, eidem motui obnoxiam eſſe, hoc pacto ut quo Saturno propinquior eſt, eo magis ad ipſiuſmet celeritatem accedat. Unde illud ſequebatur denique, etiam appendices ſive brachia Saturni, vel medio globoſo corpori conjuncta atque affixa, ſimul cum eo volvi, vel, intervallo aliquo diſcreta, non multò tamen lentiorem periodum ſortita eſſe.

Fi-

Figura porro brachiorum, dum hæc circa motum eorum mente agitabam, ejuſmodi apparebat, qualis in ſuperioribus obſervationibus anni 1655 expreſſa eſt. Nempe medium Saturni corpus omnino rotundum erat, brachia vero utrinque ſecundum eandem rectam lineam protendebantur, velut ſi axe quodam medius planeta trajiceretur, quanquam tubo illo 12 pedum quo tunc utebar, utraque verſus extremas *TAB. XLVII. fig. 6.* cuſpides paulo craſſiora clarioraque videbantur, quam ubi mediæ ſphæræ cohærebant, ut indicat figura. Quum itaque quotidie eandem hanc ſpeciem præ ſe ferret, intellexi id alia ratione fieri non poſſe, ſiquidem tam brevis eſſet Saturni eorumque quæ illi cohærent circuitus, niſi ut globus Saturni à corpore alio æqualiter undique cinctus poneretur, atque ita annulus quidam medium eum ambiret. *Annulo Saturnum cingi.* Hinc enim, quacunque celeritate circumvolveretur, eandem ſemper faciem nobis oblatum iri, ſi nimirum axis ad iſtius annuli planum erectus eſſet.

Et ſic quidem ei quæ per id tempus aderat phaſi cauſa ſua conſtabat. Ergo deinceps expendere cœpi anne reliquæ etiam, quæ de Saturno ferebantur, eidem annulo imputari poſſent. Hoc autem non tardè ſucceſſit ex animadverſa, per frequentes obſervationes, brachiorum Saturni ad eclipticam obliquitate. Cum enim lineam rectam, ſecundum quam utrinque ea extabant, non ſequi ductum eclipticæ, ſed interſecare eam angulo 20 partibus majore comperiſſem, ſtatui proinde planum annuli quem imaginatus eram tali circiter angulo ad eclipticæ planum inclinari. *Eum ad Eclipticæ planum obliquè poſitum eſſe.* Perpetua videlicet conſtantique inclinatione, quemadmodum in tellure hac noſtra plano æquatoris contingere notum eſt. Hinc autem neceſſario illud ſequebatur, ut diverſis aſpectibus nunc ellipſin ſatis latam, nunc eandem ſtrictiorem, nonnunquam denique & rectam lineam idem annulus nobis exhiberet. Quod autem anſæ effingerentur, intellexi id inde fieri, quod non arctè Saturni globo annulus cohæreat, ſed pari interſtitio undique ab eo removeatur. Quibus proinde ſic ordinatis, ac præterea adſumta ea quam dixi annuli inclinatio-

ne, omnes mirabiles Saturni facies ſicut mox demonſtrabitur, eo referri poſſe inveni. Et hæc ea ipſa hypotheſis eſt quam anno 1656 die 25 Martii permixtis literis una cum obſervatione Saturniæ Lunæ edidimus *.

* vide ſupra pag. 523.

Erant enim Literæ aaaaaaa ccccc d eeeeeg h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu *; quæ ſuis locis repoſitæ hoc ſignificant, *Annulo cingitur, tenui, plano, nuſquam cohærente, ad eclipticam inclinato.* Latitudinem vero ſpatii inter annulum globumque Saturni interjecti, æquare ipſius annuli latitudinem vel excedere etiam, figura Saturni ab aliis obſervata, certiuſque deinde quæ mihi ipſi conſpecta fuit, edocuit: maximamque item annuli diametrum eam circiter rationem habere ad diametrum Saturni quæ eſt 9 ad 4. Ut vera proinde forma ſit ejuſmodi qualem appoſito ſchemate adumbravimus.

* vide pag. 526.

TAB. XLIX. fig. 2.

Occurritur iis quæ de annulo objici poſſent.

Cæterum obiter hic iis reſpondendum cenſeo, quibus novum nimis ac fortaſſe abſonum videbitur, quod non tantum alicui cæleſtium corporum figuram ejuſmodi tribuam, cui ſimilis in nullo hactenus eorum deprehenſa eſt, cum contra pro certo creditum fuerit, ac veluti naturali ratione conſtitutum, ſolam iis ſphæricam convenire, ſed & quod annulum hunc ſolidum ac permanentem (talem enim arbitror) Saturno ita circumponam, ut nullis compagibus retinaculiſve ei cohæreat, ac nihilominus æqualem ab omni parte diſtantiam ſervet, unáque cum Saturno motu velociſſimo transferatur. Hos autem reputare illud oportet, non ex mera inventione atque arbitrio meo hanc mè fingere hypotheſin, ſicut Aſtronomi ſuos epicyclos, nuſquam in cælo apparentes; ſed oculorum ſenſu, quo nempe reliquarum rerum omnium figuras dignoſcimus, hunc quoque annulum ſatis evidenter me percipere. Neque verò cauſam eſſe cur corpus aliquod inter cæleſtia hac forma præditum exiſtere nequeat, quæ ſi non ſphærica at ſaltem rotunda eſt, atque ejuſmodi ut motum circa centrum æquè commodè atque ipſa ſphærica ſuſcipiat. Nam minus utique mirandum, hujuſmodi figuram tali corpori tributam, quam inconcinnam

quam-

quampiam miniméque tornatilem. Porro quum certo ſatis colligi poſſe videatur, ob ſimilitudinem ac cognationem magnam quæ Saturno cum Tellure noſtra intercedit, illum perinde ut hæc in medio ſui vorticis ſitum eſſe, centrumque ejus verſus omnia naturâ ſuâ tendere quæ illic gravia habentur; inde neceſſario quoque efficitur, annulum iſtum omnibus ſui partibus æqualivi ad centrum nitentem, hoc ipſo ita conſiſtere, ut undiquaque pari intervallo à centro abſit. Planè ſicuti quidam contemplati ſunt, quod ſi continuum fornicem per totum terrarum ambitum exſtrui poſſibile eſſet, is abſque ullo fulcimine ſemet ipſum eſſet ſuſtentaturus. Ergo tale quid in Saturno reipſa effectum eſſe ne protinus abſurdum credant, ſed ſuſpiciant potius infinitam naturæ potentiam & majeſtatem, quæ ſubinde nova ſuorum operum ſpecimina in lucem promens, plura etiam ſupereſſe admonet. Verum ad propoſitum jam revertamur.

Saturni major diameter Æquatori parallela oſtenditur.

Diximus brachiorum lineam anno 1655 eclipticæ occurrere viſam angulo partium plus minus 20. Quod cum præcipuè faciat ad phænomena ex hypotheſi noſtra deducenda, antequam ad illa accedamus, ita ſe habere ex obſervationibus oſtendendum eſt.

TAB. XLIX. fig. 3.

Cum igitur 25 Martii, anno 1655, Saturni in A poſiti ad ſtellam fixam B ea fuerit conſtitutio quæ hîc adnotata eſt, ut conſtat ex ſuperioribus obſervationibus; die autem ſequenti ſicut in D & B, tertioque item die ſicut in C & B, ita ut quotidie linea anſarum producta altius ſupra ſtellam B aſcenderet; hinc perſpicuum fit viam Planetæ A C nequaquam congruere directioni anſarum, ſed diverſam ferri angulo A C E, quem 20. gr. majorem invenio. Eo autem tempore nihil admodum mutabatur latitudo Saturni apparens, unde conſtat viam A C eclipticæ parallelam fuiſſe; ac proinde eodem illo 20 gr. angulo etiam ab ecliptica lineam anſarum deflexiſſe.

TAB. XLIX, fig. 4.

Rurſus 9 Apr. & tribus ſequentibus continuè diebus ad aliam fixam C talis annotatus fuit Saturni poſitus qualis in L, M, N, O cernitur. Ubi ſimiliter apparet, lineam an-

ſarum OP, Saturni tramitem LO ſecare angulo LOP, qui 20 plus minus graduum deprehenditur. Eclipticam verò vel eclipticæ parallelam lineam RQ, angulo PQR, paulo etiam majore quam LOP, quoniam decreſcebat per eos dies Saturni latitudo, quæ borea erat.

TAB. XLIX. fig. 5. Denique cum poſt ſtationem Saturnus ad fixam eandem C revertiſſet, factuſque eſſet auſtralior, die 27 Maji, eo poſitu juxta hanc adſtabat quo hîc ad S deſignatus eſt. Die vero Maji poſtrema, eo qui ad T. Ita ut hic quoque linea SV, quæ ſecundum brachia ducitur, interſecet ST, quam quatriduo illo Saturnus permeaverat, angulo VST, 20 gradus exiguo ſuperante. Eclipticam vero vel eclipticæ parallelam XY, paulo minore angulo SXY, quoniam minuebatur adhuc continuè Planetæ latitudo, etſi directus jam incedebat.

Et his quidem intellectis, inclinatio brachiorum Saturni ad eclipticam, in dubium vocari amplius nequit, etſi, fateor, non admodum accuratè quanta ſit hoc modo definiri poſſit. Si tamen 21 graduum per id tempus apparuiſſe ponatur, quantam ferè adductæ obſervationes comprobant, ac porro ad locum Saturni, qui tunc fuit, attendamus, inveniemus æquatori planè parallela brachia extitiſſe. Cum enim circa 3 gr. Virginis Saturnus verſaretur, ubi parallelus æquatoris eclipticam interſecat angulo gr. 21. quo angulo etiam brachiorum linea illam interſecabat; manifeſtum eſt hanc ſecundùm dictum parallelum atque adeo ſecundùm ipſum æquatorem incedere debuiſſe.

Cæterum alio nunc irrefragabili argumento eandem hanc brachiorum inclinationem, & cum æquatore circulo paralleliſmum confirmabimus. Suprà in obſervationum Hiſtoria ad diem 13 Octob. anni 1656, adnotatum eſt, motum Saturni, quo cum cælo quotidie defertur, ſecundum ipſam anſarum lineam procedere nobis viſum, non ea die tantum, ſed quotieſcunque exinde idem inquirere libuit: inquiritur TAB. L. fig. 1. autem hoc modo. Teleſcopio ad Saturnum obverſo, eoque intra tubi aperturam, quam hic refert circulus AB, recepto, ita ut primùm in extremo margine conſiſtat, vergatque

que linea brachiorum ad aperturæ centrum, immotum inde tubum ſiſtimus, quo ita manente, mox totam tubi capacitatem A B percurrere Saturnus conſpicitur, motu qui cælo tribuitur abreptus, atque exire ad partem oppoſitam B, quo tendebat brachiorum linea. Quoniam ergo Saturnus, hoc motu ſuo, circulum æquatori parallelum percurrit, cujus circuli pars eſt linea A B, manifeſto patet brachiorum lineam æquatori quoque parallelam extendi. Hujus vero rei periculum facere licet quoties Saturni obſervandi facultas datur, neque alia certiori ratione directionem anſarum inveſtigari poſſe credimus. Non defuere tamen qui diverſimode idem examen inſtituerunt, quorum obſervationes ſententiam hanc noſtram comprobant. Nam Galilæus quidem ipſe, qui primus phænomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticæ parallelam lineam, in qua Saturni comites poſiti eſſent, ſibi viſam ſcribit, ſed evidenter ab ea deflectere; & fortaſſe, inquit, æquatori parallela eſt.

Poſt hunc vero quicunque rem examinaverunt, omnes hanc ejus conjecturam nequaquam aberraſſe oſtendunt, & in his Aſtronomi inſignes Gaſſendus, Bullialdus & Ricciolus; quorum hic ſtellarum fixarum ope (alia tamen methodo quam qua modo nos uſi ſumus) non ſemel illum anſarum cum æquatore paralleliſmum liquido ſibi compertum demonſtrat.

Hevelii de inclinatione anſarum contraria opinio.

Clariſſimus tamen Hevelius, ſuis obſervationibus confiſus, quæ cujuſmodi fuerint non indicat, diverſam hîc opinionem tuetur, contenditque excentrico Saturni parallelam eſſe brachiorum inclinationem, ut proinde eclipticæ quoque ferè conveniat, non amplius unqnam quam $2\frac{1}{2}$ gr. deflectens: & hoc quidem cum circa nodos interſectionis Saturnus verſatur. Quo fiet ut cum in Libræ & Arietis gr. 20, ubi limites ſtatuuntur, poſitus fuerit, prorſus eclipticam ſequatur brachiorum diſpoſitio. At circa hæc loca maximam omnium inclinationem noſtræ & aliorum obſervationes produnt; nam noſtræ quidem, Saturno prope libræ ſignum atque in ipſo ſigno verſante, habitæ ſunt; aliorum vero quædam

cum

cum non procul ab oppoſito limite diſtaret. Ergo quod & plurium autoritas & propria experientia confirmat, haud cunctanter hac in re amplectemur: Neque vero dubito, quum certam ſemperque obviam obſervandi methodum tradiderim, quin ea adhibita vir veri amantiſſimus priorem ſententiam volens abdicaturus ſit. Illud utique nobiſcum novit, fruſtra ſive hunc ſive alium quemlibet obſervandi modum, ad dirimendam inter nos hanc litem, uſurpari, quando circa ſigna Cancri vel Capricorni Saturnus commoratur, quoniam ibi diſcerni nequit utrum æquatori an eclipticæ parallela ſit quæ per anſas ducitur, eò quod in his locis parallelus æquatoris eclipticam non interſecet ſed tangat. Quamobrem miror etiam quo pacto Ricciolus, obſervationem Grimaldi adferens anno 1650, 18 Martii habitam, quæ probat eo tempore hanc anſarum lineam eclipticæ obliquam incidiſſe, non animadverterit contrarium ejus quod intenderat illa obſervatione evinci: ſi enim tunc, Saturno prope initium Cancri agente, non erat eclipticæ parallela anſarum linea, ne quidem æquatori parallela fuerit, ut conſtat ex modo dictis. Semper autem æquatori parallelam cerni, & aliis multis obſervationibus docuit, & hac ipſa oſtendere voluit. Ergo & experientiæ propriæ & ſententiæ ſuæ, quam veram eſſe demonſtravimus, planè hîc adverſatur. Grimaldi autem obſervatio, quanquam alioqui in hoc negotio verſatiſſimi atque experientiſſimi, vitio aliquo laborare cenſenda eſt; in qua forſitan priore fixa à Saturno contecta, vel ob fulgorem cerni prohibita, aliam deinde teleſcopio detexerit prius non animadverſam, proque eadem illa habuerit. Nos verò, cum parallelam æquatori brachiorum lineam eſſe indubitatis rationibus ſatis jam adſtruxerimus, deinceps ad annuli noſtri hypotheſin hunc ejus ſitum applicemus, indeque phænomenôn cauſas ſingulas derivari doceamus.

Ricciolus ſibi contrarius. lib. 7. Almag. novi.

Eſto itaque Saturni orbita, quam 30 circiter annis ille emetitur, A B C D; & in eodem plano (nam exiguæ declinationis gr. $2\frac{1}{2}$ non hîc rationem habebimus) circulus F E, orbem magnum ſive telluris orbitam referens, quam an-

Ulterior hypotheſeos noſtræ explanatio. TAB. L. fig. 2.

annuo ſpatio cum illa nos obimus: inque hujus centro G conſiſtat Sol. Jam ſicuti axem terra habet ſemper ſibi parallelum, circa quem in ſeſe volvitur, ita Saturnus quoque habere ponatur, qui ſit ad annuli ſibi circumdati planum erectus. Adeo ut circa unum eundemque axem gyrentur & corpus Saturni ſphæricum, & annulus, & in eodem annuli plano poſitus Saturni comes ſive Luna. Intelligatur autem Saturni hic axis axi terræ circiter æquidiſtans. Unde & planum annuli plano æquatoris noſtri parallelum erit, ac proinde angulo partium 23½ ad planum eclipticæ inclinabitur. Nam ſic conſtituendum eſſe inde intelleximus quod anſarum Saturni inclinatio æquatori parallela deprehendatur, ut modo demonſtratum fuit.

Nobis itaque in circulo EF circumlatis, varias annuli hujus, à Sole pariter cum Saturno illuſtrati figuras cerni debere perſpicuum eſt, prout nimirum nunc has nunc illas orbitæ ſuæ partes Saturnus peragrabit. Nam eodem quidem orbitæ loco, quacunque tandem celeritate ſuper axem ſuum converti dicatur, diverſas phaſes non exhibebit, quoniam ea converſione ſitum annuli, noſtri reſpectu, nihil immutat, ſed ita demum ſi in eccentrico ſuo ſive orbita ſpatio aliquo progreſſus fuerit. Cumque triginta fere annis ad loca eadem revertatur, hinc neceſſario intra id tempus omnium phaſium viciſſitudinem conſpici neceſſe erit, atque alias quidem bis, alias quater: quas ſingulas nunc expendemus.

Primò itaque duos orbitæ locos eſſe liquet è diametro oppoſitos, velut A & C, in quibus Saturnus conſtitutus latiſſimas, maximeque omnium diductas anſas exhibeat; cum nimirum à plano per centra Telluris & Saturni acto, atque ad orbitæ Saturniæ planum erecto, annuli quoque planum ad angulos rectos ſecatur, eoque viginti trium circiter partium angulo ſupra planum annuli viſus noſter attollitur.

Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum.

Cujus phaſeos vera proinde forma, ſecundum ea quæ ſupra circa annulum definivimus, ejuſmodi erit qualis hîc de- TAB. L. fig. 3.

lineata cernitur, majori ellipſis diametro ad minorem ſe habente fere ut 5 ad 2. Atque hæc ea figura eſt quam ab Hevelio, Ricciolo, & Euſtachio de Divinis, anno 1648, 1649, & 1650 ſpectatam fuiſſe diximus. Cujus itaque locum, hinc inter ſigna ♊ & ♋, inde inter ♐ & ♑ conſtitui oportere certum eſt, quandoquidem iſtis annis ſignum ♊ Saturnus peragrabat & in ♋ ſignum tranſibat. Poſtea verò accuratius hunc locum latiſſimè anſarum phaſeos inquirentes oſtendemus eum cadere in 20½ gr. ♊ & ♐.

Clarior Saturnus propter anſas cernitur.

Illud vero manifeſtum eſt, Saturnum, quoties hanc præfert ſpeciem, multo lucidiorem ſeſe intuentibus oſtendere debere, quàm dum nullis brachiis auctus eſt: quum tantundem luminis fere ab hiſce emanet, quantum ab toto interiore diſco. Atque ita ſemper quo propius verſus Cancri & Capricorni ſigna acceſſerit, eo majorem, aut certè ſplendidiorem, etiam abſque teleſcopio appariturum; quippe annuli ellipſis ſemper latius ſe pandente, ut in ſequentibus declarabitur.

Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.

Sed & aliud circa hanc phaſin obſervandum occurrit, motus nimirum inſolens Saturnii comitis, qui quidem motus obſervationibus anni 1659 adnotari jam cæpit, verùm hac latiſſimâ anſarum phaſi exiſtente, omnium evidentiſſimè ut ſeſe prodat neceſſe eſt. Etenim quum eodem plano & annulus Saturni & comitis orbita contineantur, aut certè parum diverſis; conſtat ſimul cum annulo etiam orbitam hanc latiſſimam omnium ellipſin nobis explicaturam: eoque futurum ut comes apparente motu altè ſupra Saturnum atque infra tranſire conſpiciatur, ita ut corpore ejus vel radiis nimium propinquis nequaquam nobis occultetur, quemadmodum aliàs accidere ſolet. Atque ea quidem ellipſis quam tali motu deſcribere hiſce in locis cernetur, longitudinem latitudinis ſuæ duplam ſeſqui alteram habere invenietur, ſicut & annuli, quam diximus, ellipſis latiſſima. Verum recedente hinc Saturno ſenſim anguſtior ipſa quoque evadet, quippe annuli ellipſi ſemper ſimilis, adeo ut primum fulgore planetæ tranſitus comitis conſpici prohibeatur, deinde corporis

ris ipſius Saturni ante vel pone comitem objectu. Ita namque obſervationes anni 1655 & 1657, quo tempore exilia & quam maximè compreſſa brachia erant, oſtendunt comitem etiam in ea recta tunc perpetuo apparuiſſe quæ per utrumque illorum extendebatur.

Et hac quidem in re diſſidet Saturniæ Lunæ curſus ab eo qui in noſtrate Luna animadvertitur; ſiquidem hæc non æquatoris noſtri ſed magis eclipticæ plano obnoxia eſt, à quo quinque tantummodo partibus exorbitat.

Verum ad Saturni phaſes revertamur: quo poſito ad H vel I, vel ex adverſo ad O vel P, paulo anguſtiorem jam annuli ellipſin, eadem tamen qua prius longitudine nobis aſpici oportet, quum ſupra planum annuli minus altè hoc ſitu viſus noſter efferatur. Unde illa phaſis exorietur quæ in tabellæ LII. ſerie octava poſita eſt; vel, minus accuratè perſpicere valentibus, ea quæ ſexta eſt efficietur. *Quomodo anſarum latitudo ſenſim contrahatur.* TAB. L. fig. 2.

Rurſus autem eum ad K aut L Saturnus pervenit, vel ad loca hiſce oppoſita N & M, magis adhuc contrahi apparet minorem ellipſis diametrum, quippe magis ex obliquo inſpectam. Ut jam ea Saturni facies proditura ſit quam nos anno 1658 obſervavimus (T. XLIX. *fig.* 7.); quæ minus bonis teleſcopiis excepta degeneravit in illam quæ quinta in tabella LII. recenſetur; pejoribus etiam in triſphæricam.

Deinde cum penè quadrante circuli à latiſſimæ phaſeos loco Saturnus remotus invenitur, velut in Q & R, vel S & T; uſque eo ellipſis annuli conſtringitur, ut ſi qua adhuc rima ſuperſit viſui pervia, ea tamen propter exilitatem & reliqui corporis ſplendorem conſpici nequeat; ac proinde Saturni forma ejuſmodi appareat qualem anno 1655 & 1657 nos ſpectaſſe ſupra meminimus (T. XLIX. *fig.* 6. T. LI. *fig* 5.), quæ quomodo aliis omnibus hactenus teleſcopiorum culpâ triſphærica exiſtimata ſit, antea quoque oſtenſum eſt. *Quomodo patulæ videri anſæ deſinant.*

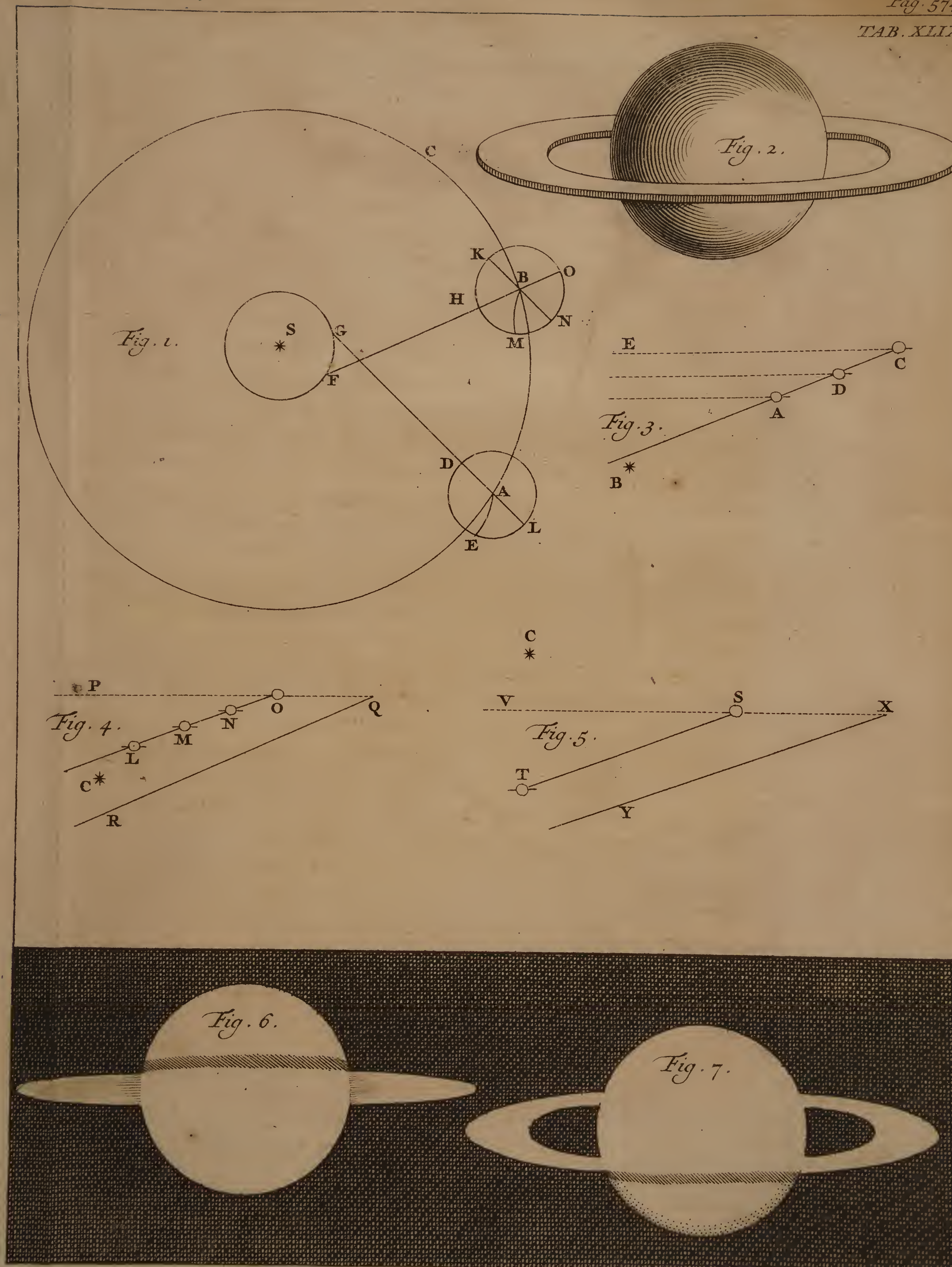
Sola dehinc rotunda phaſis explicanda reſtat; ad quam priuſquam tranſeam, de inclinatione magnæ Saturni diametri, ſive anſarum lineæ, ut ſupra eam vocavi, pauca adnotanda ſunt.

Majorem Saturni diametrum neceſſario Æquatori parallelam ſemper videri.

Ajo itaque in omnibus prædictarum phaſium, poſito, ut hactenus fecimus, parallelum eſſe annuli planum plano æquatoris, neceſſario fieri ut major diameter Saturni, ſive ellipſeos ejus cui annulus aſſimilatur, ſemper æquatori circulo parallela ſpectetur, planè quemadmodum revera contingere noſtris aliorumque obſervationibus ſupra probavimus. Quum ènim viſus noſter reſpectu cæleſtium in centro æquatoris circuli, atque adeo in plano ejus collocatus ſit, cui plano planum annuli parallelum ponitur, neceſſe eſt maximam longitudinem annularis ellipſeos eidem æquatori circulo parallelam extendi: eâdem prorſus ratione, quâ, ſi in aëre plano terræ parallelum circulum ſuſpendamus, oculo noſtro altiorem, indeque paſſibus aliquot retro abſiſtamus, major diameter ellipſis quam ſuſpenſus circulus viſui offert Horizontis circulo æqui diſtare comperietur. Hoc enim proculdubio eventurum, cuivis vel citra experimentum intelligitur.

Reverà tamen minimum quid nonnunquam aberrare.

Eſſe autem annuli planum plano æquatoris omnimodis parallelum, etſi obſervationibus, quas quidem expendimus hactenus, minimè repugnantibus ſtatuere licuit; exiguum tamen quid deeſſe, quo minus omnino perfectus ſit eorum paralleliſmus, alia ratione deprehenditur. Etenim ſi prorſus inter ſe parallela forent utraque plana, ſequeretur ut cum in pr. ♈ & ♎ Saturnus ſpectaretur, omnium arctiſſima annuli ellipſis, & quaſi recta linea exiſteret, latiſſima verò in pr. ♋ & ♑. Atqui arctiſſimam annuli phaſium in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ & ♓ cadere invenimus, ut in ſequentibus demonſtrabitur, ac proinde latiſſimam in gr. $20\frac{1}{2}$ ♊ & ♐. Non igitur exactè parallela eſſe plana annuli & æquatoris hinc patuit, ideoque nec ſemper revera parallelam, licet ita videatur, magnam Saturni diametrum æquatori circulo fore. Quæſitoque per ſphærica triangula, quibus in locis & quanta ſit maxima inclinatio, inveni eam gr. 4. 8′. quando Saturnus in gr. 25, 15′. ♊ & ♐ verſatur. Tali nimirum angulo, nec unquam majori, anſarum linea circulum æquatori parallelum per Saturnum tranſeuntem iis in locis interſecabit; qui cum ſit adeo exiguus,


Fig. 1.
C
K
B
O
H
N
S
G
M
F
D
A
L
E
Fig. 2.
Fig. 3.
E
C
D
A
B
Fig. 4.
P
O
Q
N
M
L
C
R
Fig. 5.
C
V
S
X
T
Y
Fig. 6.
Fig. 7.



gnus, vix puto obſervabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iis quidem quæ quadrante Zodiaci inde abſunt, nempe cum gr. 25.15′. ♍ aut ♓ Saturnus obtinebit, prorſus parallela æquatori eadem anſarum linea conſpicietur. Eclipticæ vero parallela fiet Saturno gr. 20½ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per quadrantem circuli inde diſtantibus, nempe in gr. 20½ ♍ & ♓, maximo angulo interſecat. Hunc autem maximum angulum quo linea anſarum eclipticam interſecat eſſe circiter gr. 23½ obſervationibus anni 1655, 1656 & 1657 apparuit, talemque ad iſta ſupputanda adſumſimus. Fortaſſe autem, longo ſæculorum lapſu, ſenſim omnia hæc loca mutari continget, ſimili quodam motu Saturni globum inclinante atque in Tellure noſtra eſt is qui præceſſiones æquinoctiorum efficit: atque ita phaſium quoque omnium loca transferri neceſſe erit. Hoc verò non tam facile in cæteris phaſibus quam in rotunda pateſcet, ad cujus conſiderationem deinceps veniendum.

Schema itaque repetenti manifeſtum eſt Saturnum integro orbitæ ſuæ circuitu non poſſe non ad eum locum bis pervenire, (eſto in B & D) ubi planum annuli recta ad nos dirigatur, productumque in oculos noſtros incurrat. Quod quidem in locis è diametro oppoſitis contingeret, inque iiſdem perpetuò, ſi ex Sole Saturni motum proſpiceremus; at nunc propter motum Terræ in ſua orbita annuum, nonnulla oritur inæqualitas. Annulo igitur ſecundum latus inſpecto, nec niſi rectam lineam referente, quum neutra planarum ejus ſuperficierum appareat, ad nihilum rediguntur brachia ac prorſus intereunt, ſolo rotundo Saturni corpore quod intueamur reliquo. Cujus phænomeni primum teſtem Galilæum ſupra commemoravimus, qui anno 1612 ſimplicem hanc Saturni formam obſervaverit. Inde verò poſt annos 30 Gaſſendum alioſque complures; ac nos etiam denique anno 1656. Verùm enim ſi hôc tantum annuli poſitu anſæ evaneſcerent, nequaquam tanto tempore perſtare rotunda phaſis poſſet atque obſervationes teſtantur, toto enim ſemeſtri rotundus Saturnus ſpectatus fuit. Quamobrem por-

Rotundæ phaſeos cauſæ.

ro quærendum eſt quæ cauſa, præter eam quam jam attulimus, anſas quandoque cerni prohibeat: eſt autem quæ ſequitur manifeſtiſſima.

Frequenter nimirum evenire conſtat Saturno circa locos modo dictos B vel D commorante, ut tum hujuſce tum Solis reſpectu ita poſiti ſimus, ut ſi produci planum annuli intelligatur, id inter nos ac Solem tranſiturum ſit: velut in ſchemate, cum Saturnus prope D conſiſtit, nos autem cum Tellure in E. Quo fit ut illam annuli ſuperficiem quæ ſolis radiis illuminatur conſpicere nequeamus, ſed alteram tantummodo quæ tunc umbræ vices patitur. Nulla itaque ne hîc quidem brachia Saturno annulus præſtat, ſed oculis noſtris ereptus orbum ac ſolitarium relinquit. Atque hæc cauſa ad continuos quinque aut ſex menſes rotundæ phaſi interdum ſufficit, uti poſtea accuratius docebimus.

At non immerito dubitari poſſit, cur & hôc & præcedenti quoque annuli poſitu cum planum ejus rectà ad nos vergit, non ſaltem exterior ejus limbus à Sole illuſtratus appareat: quid enim dicemus? anne tam tenue eſſe totum annuli corpus, ut licet revera ſplendeat extrema ejus margo, exilior tamen ipſa ſit quam quæ noſtris teleſcopiis percipi poſſit? Nequaquam: verùm res eadem quæ cauſam hanc prætexi vetat, eadem veram cauſam quoque haud dubiè ſuppeditat: faſcia nimirum illa reliquo Saturni diſco obſcurior, quam & rotundo illo apparente, & rurſus brachiis aucto, nobis viſam narravimus. Hæc ita comparatum eſſe exteriorem illum annuli ambitum evincit, ut aliqua quidem craſſitudine præditus ſit, verum ejus naturæ, ut ſolis lumen, vel nihil prorſus, vel certè leviter admodum reflectat. Quia enim in Saturno etiam brachiis prædito tractus iſte nigricans animadvertitur, nempe cum ſuperficiem annuli eandem quæ à Sole illuſtratur deſpicimus; quo poſitu nulla ejus regio obumbrata oculis noſtris obverſa eſt; ſequitur nigredinem illam ex alia cauſa manare non poſſe, niſi quod ejuſcemodi quadam materia annuli margo cooperta ſit, quæ non perinde ut reliqua ejus ſuperficies repercutiendo lumini ſit idonea.

Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans.

nea.

nea. Sic in lunari quoque diſco maculas aliquas, cæteris partibus multo obſcuriores, cernimus; quæ quidem non planè omni luce defectæ apparent, verùm ſi æquè procul ac Saturnus à Sole diſtarent, ubi tantum centeſimam partem ejus, quod nunc accipiunt, luminis ab illo mutuarentur, credibile eſt penitus nobis inviſibiles fore, niſi quatenus lucidioribus undique terminantur; præſertim ſi tenuem modo lineam, ut Saturnii annuli margo, conſtituerent. Alioqui vel illud forſitan dici poſſit, materiam quandam aquæ ſimilem, aut certè lævi & ſplendida ſuperficie præditam, extrema annuli præcingere, quæ unico tantum veluti puncto Solis radios reflectens, nequaquam nobis conſpicua erit, ut rationibus opticis clarum eſt.

Sed quæ ad rotundam phaſin attinent ulterius etiam expendamus, in qua plura animadvertenda ſuperſunt. Diximus paulò ante, tunc eam potiſſimum exiſtere, cum productum annuli planum inter nos Solemque medium tranſit. Hoc verò quando contingat, quo pacto cognoſcere poſſimus, atque ex Aſtronomicis tabulis definire, deinceps explicandum eſt. Sit itaque denuo Saturni orbita A B C, Telluris annua D E F, locus ſolis L. TAB. I. fig. 4.

Jam quia poſitum fuit, Saturni axem, qui ad annuli planum erectus eſt, ſemper ſibi parallelum ferri, ſequitur communem quoque planorum annuli & orbitæ interſectionem uni cuidam lineæ ſemper fore parallelam. Eſto ea linea per Solem ducta A C, quæ proinde in cælo locum Saturni æquinoctiorum deſignabit. Poſito igitur Saturno in H, Tellure verò in D, utroque ad partem eandem rectæ A C, verum ita ut minus ab ea Saturnus quam Tellus diſtet: neceſſario interſectionis linea planorum annuli & orbitæ Saturni H M, quæ nimirum ex H parallela ducitur A C inter Solem L, Terramque in D poſitam excurret, ac propterea annuli quoque planum manifeſtò inter utrumque medium incedet. Quod ubi contingit, rotundæ phaſi locum eſſe demonſtravimus. Contra verò, cum Saturnus quidem ac Tellus ad eandem partem rectæ A C conſiſtunt, verum ita

ut

ut illa propius ad eam accedat, ut cum ille eſt in N, hæc in F: vel cum diverſas partes reſpectu A C obtinent, velut cum Saturnus eſt in N, Tellus in *f*; utroque caſu linea interſectionis annuli atque orbitæ Saturni, ut hìc N Q, quæ nimirum ipſi A C æquidiſtans acta eſt, Terram Solemque ab eadem parte habebit. Unde intelligitur, utrovis poſitu eandem annuli ſuperficiem à Sole & nobis aſpici: quod requiri jam ſupra advertimus, ut brachia Saturni aut anſæ apparere poſſint. Quanquam ne ſic quidem ſemper cernuntur, uti poſtea manifeſtum fiet.

Saturnus quando neceſſario rotundus ſpectari debeat. Hi autem diverſi ſitus ut ex tabulis Aſtronomicis parvo negotio cognoſcantur, indeque rotunda phaſis, quatenus ab hac cauſa pendet, prædici poſſit, ſciendum eſt, quandocunque Saturni locus apparens locuſque ex Sole ſive eccentricus, diverſas partes obtinent ejus loci quem inter fixas deſignat recta A C, (quam in gr. 20½ ♍ & ♓ incidere poſt hæc oſtendemus) id ejuſmodi ſitum Saturni ac Telluris indicare qualis in H & D, ut nimirum ab eadem parte ambo reperiantur rectæ A C, atque propior huic Saturnus conſiſtat; eoque tunc rotundam phaſin conſpiciendam dari. Illo enim poſito, ſit Saturnus in H. Primùm itaque dico ab hac parte lineæ A C etiam Tellurem conſiſtere. Etenim ſi ad alteram partem ſita eſſe dicatur, velut in P; liquet rectam ex P ad H ductam & verſus fixas porro continuatam, quæ locum Saturni apparentem, itemque rectam L H, quæ producta locum ejus ex Sole demonſtrat, ab eadem parte puncti æquinoctiorum, quod L A producta inter fixas determinat, utraque ea loca exhibituras; contra quàm poſitum fuerat. Eſt ergo Tellus neceſſario ab eadem parte lineæ A C, qua Saturnus H. Eſto jam ea alicubi puta in D. Quoniam igitur D H ad fixas protracta locum Saturni apparentem deſignat, L H vero, uti diximus, locum ejus eccentricum, inter quæ loca intercedere ponitur locus æquinoctiorum quò tendit L A, neceſſe eſt rectam D H tandem ipſam L A interſecare, ideoque punctum D, locum videlicet Telluris, amplius diſtare à linea A C quam punctum H in quo Saturnus.

nus. Conſtat itaque quando locus Saturni apparens & eccentricus ad partes diverſas cadent loci æquinoctiorum, neceſſario tunc Tellurem cum Saturno ab eadem parte rectæ A C inventum iri, atque ita ut minus ab ea Saturnus removeatur. At vero quoties apparens locus Saturni itemque eccentricus ab eadem parte habentur rectæ A C, ſive loci æquinoctiorum Saturni, inde certo colligi ajo, Tellurem ac Saturnum ita poſitos eſſe uti in F & N. Nempe ut vel diverſas ad partes ipſius A C collocati ſint, vel ad eaſdem quidem, ſed ita ut Saturnus amplius ab ea quam Tellus diſtet. Ideoque, ſecundum ante demonſtrata, eandem annuli ſuperficiem quæ à Sole illuſtratur oculis quoque noſtris obverſam eſſe. Nam cum L N producta oſtendat inter fixas locum Saturni excentricum, F N vero locum ejus apparentem, ac uterque cadere ponatur in partem eandem loci illius quem inter fixas exhibet L C: manifeſtum eſt rectam F N ab N porrò productam neque ſecare debere neque parallelam eſſe rectæ L C, ſed ſemper ab ea magis recedere. Quare neceſſario punctum F vel propinquius erit rectæ A C quam punctum N, ſi ſint ambo ad eandem partem dictæ lineæ; vel N ad iſtam, F ad illam partem ſitum erit. Quod probandum erat.

Denique advertendum etiam, quando vel Saturni locus ex Sole, vel apparens locus incidit in alterutrum æquinoctiorum, quæ determinat producta A C, nempe in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ vel ♓, neceſſario quoque rotundam phaſin exoriri. Si enim locus ex Sole inibi reperiatur, hoc eſt, ſi Saturnus occupet punctum A vel C, tunc planum annuli protractum per Solem tranſire liquet: unde ſequitur neutram annuli ſuperficiem tunc luce aliqua perfundi. Rurſus vero cum locus ejus apparens incidit in dictos æquinoctii locos, hoc eſt, quando recta à Tellure ad Saturnum extenſa parallela incedit ipſi A C; velut cum Saturnus ſitus eſt in O, tellus in *f*, eo poſitu productum annuli planum oculo noſtro occurrere conſtat, quoniam communis ejus interſectio cum plano orbitæ Saturni ipſa eſt O*f* recta: Unde fit ut neutram ſuperfi-

ciem annuli, etiamſi altera jam illarum Solis radiis ſplendeat, conſpicere poſſimus.

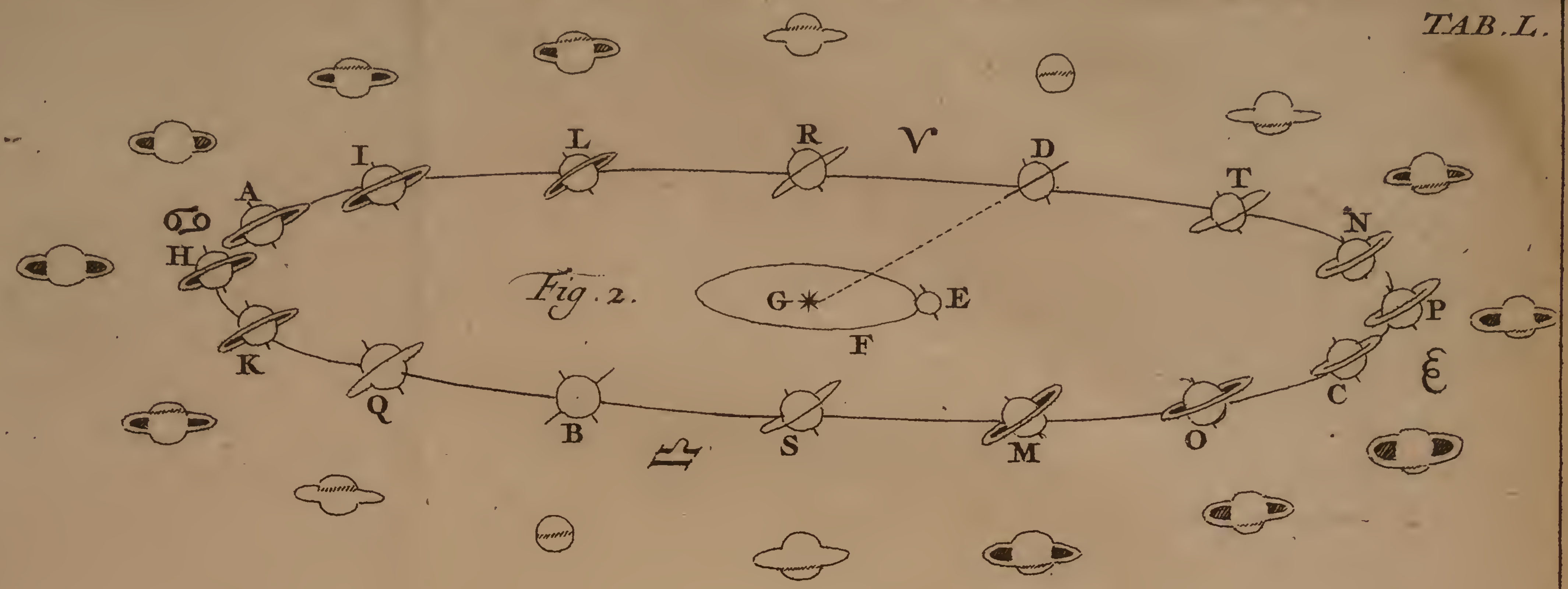
Quænam Saturnicolis ſint loca æquinoctiorum.

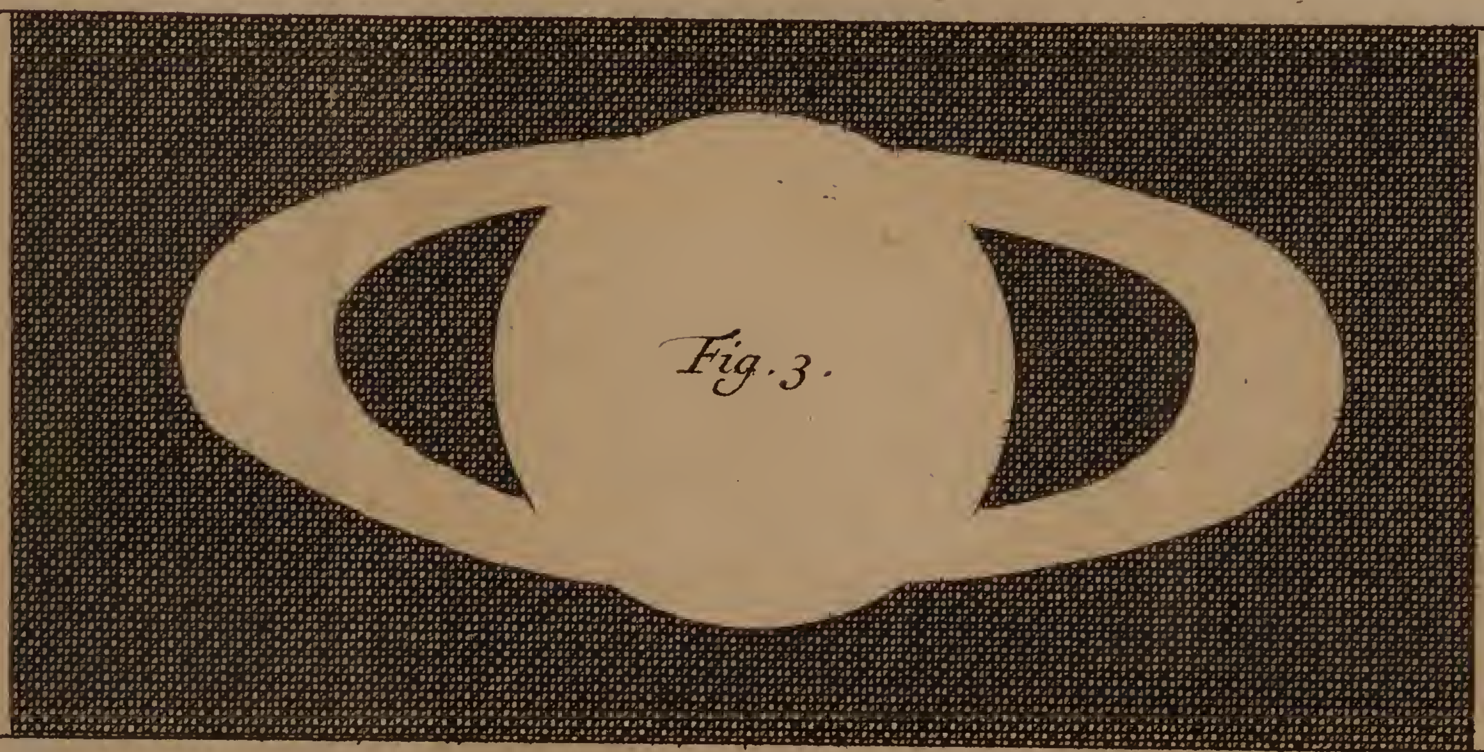
Nunc illud videamus, quemnam Eclipticæ locum teneat recta A C Saturni æquinoctiorum linea: quam quidem in ♍ & ♓ gr. 20½ cadere diximus, verum qua ratione id ex obſervationibus collegerimus declarandum eſt.

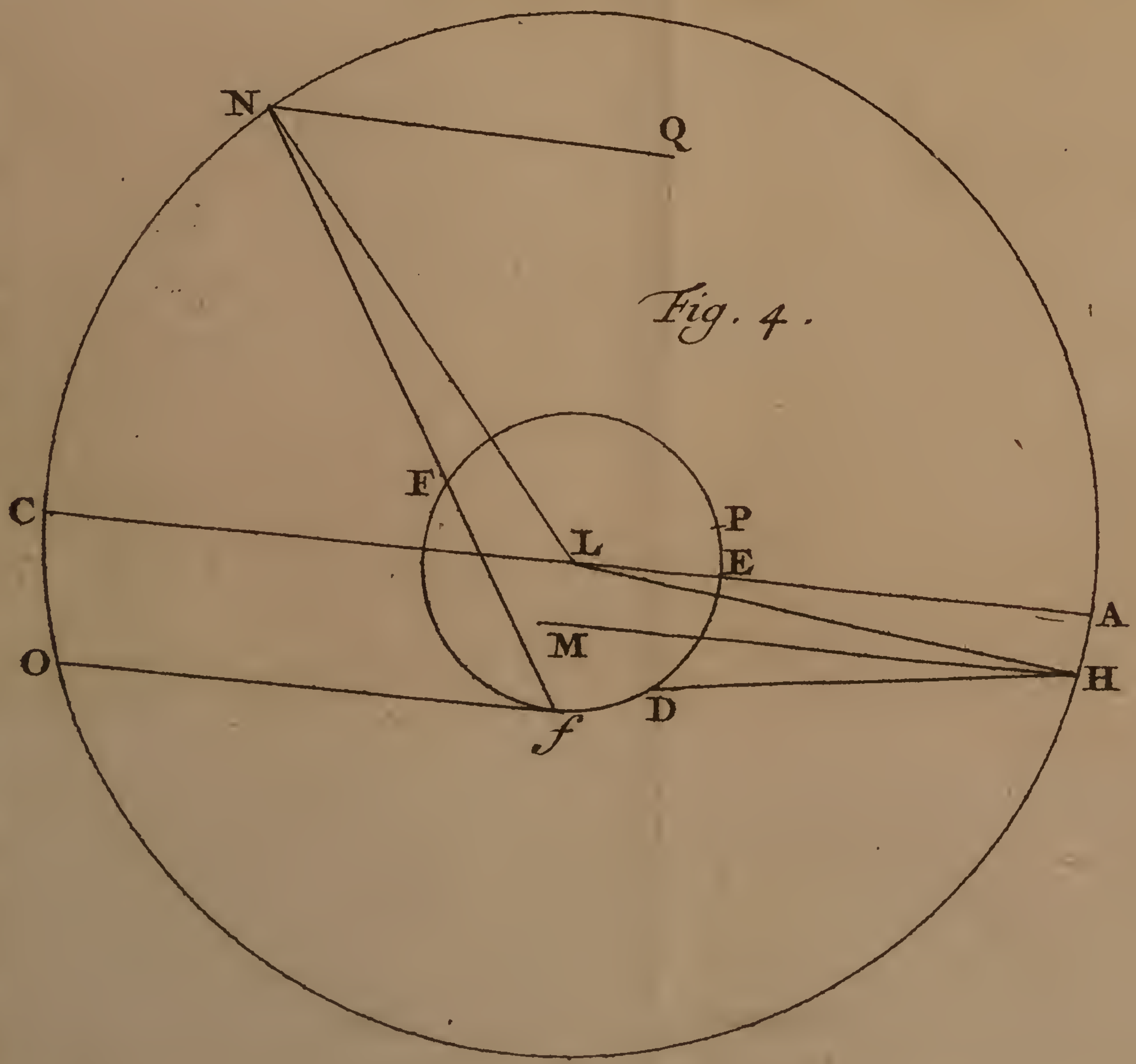
Saturnum brachiis carentem ac prorſus rotundum ſpectavimus à Menſe Decembri anni 1655, uſque in Jun. 1656. Quæ phaſis ex ea cauſa, quam modo retulimus, tanto tempore durare potuit, ſi linea A C eum ipſum locum obtinere ponatur quem & Saturnus tenebat tunc cum Soli eſſet oppoſitus, hoc eſt, ♍ gr. 20. Hinc enim fieri debuit ut toto illo tempore Saturnus ac Tellus ab eadem parte lineæ A C ſimul conſiſterent, atque ita quidem ut Saturnus ei vicinior eſſet; ſemel autem eodem momento, nempe oppoſitionis tempore, in ipſa A C reperirentur: unde non niſi rotunda phaſis potuit exiſtere, ſicut ex prædictis intelligitur.

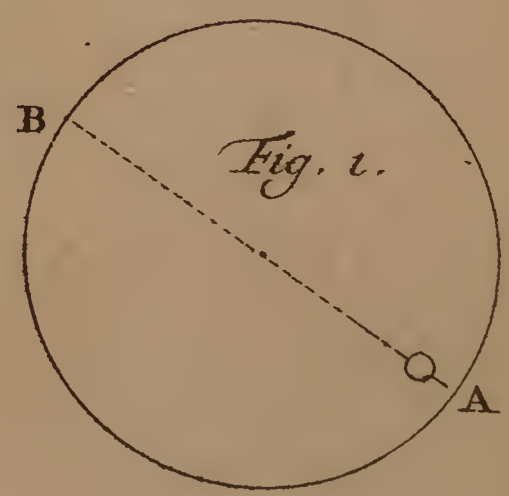
Cæterum uti non admodum verſimile eſt (etſi fieri potuerit) eo ipſo tempore oppoſitionem illam contigiſſe cum Saturnus in æquinoctii ſui linea A C ſitus eſſet, ita non verebimur hanc lineam dimidio gradu emovere loco illo, atque in gr. 20½ ♍ eam transferre; quum hoc poſitu melius ſatisfiat aliis rotundæ figuræ obſervationibus, anni 1642 & 1612, ac nihilo ſecius noſtra illa anni 1656 conciliari queat, ut ex ſequentibus liquebit. Poſita itaque A C in gr. 20½ ♍ & ♓ ſequitur rotundam phaſin, ab uſque principio Auguſti anno 1642, ad Febr. 1643, continuè perſeveraſſe, prorſus quemadmodum à Gaſſendo aliisque fuit adnotatum. Erat enim ineunte Auguſto locus Saturni eccentricus in 20 gr. ♓, hoc eſt, dimidio gradu præcedebat locum æquinoctii: at locus apparens in 24 gr. ♓, atque ita gr. 3½ eundem æquinoctii locum tranſierat. Quare ſuperficiem annuli illuminatam Gaſſendus nequaquam conſpicere potuit, ſed eam quæ tenebris tegebatur ſibi obverſam habuit. Et ſic quidem locus Saturni apparens eccentricuſque perpetuo diverſis in partibus loci æquinoctiorum perſtiterunt uſque ad initium fere

Febr.


Fig. 2.
I
L
R
D
T
N
A
H
P
K
Q
B
S
M
O
C
G
E
F


Fig. 3.


Fig. 4.
N
Q
F
C
L
P
E
A
M
O
H
f
D


Fig. 1.
B
A

Febr. 1643, unde non niſi rotunda forma prodire potuit, ut antea demonſtratum eſt.

Idem quoque phænomenon anno 1627, proculdubio ſeſe obtulit, ſed obſervatorum penuria an ſupinitate præteriit inobſervatum; cum nemo, quod ſciam, prodiderit, utrum Saturnus eo anno cum globulis apparuerit an ſecus.

Anno autem 1612, à Galilæo primo omnium rotunda facie animadverſus eſt. Scribit is ad Marc. Velſerum Epiſtola de Solaribus maculis 3. circa ſolſtitium quidem illius anni, tricorporem adhuc Saturnum ſibi viſum, inde verò, cum duobus menſibus atque amplius teleſcopio eum inſpicere omiſiſſet, ut qui nullam formæ mutationem animo præſagiret, poſtea nihil minus cogitanti ſolitarium oblatum, talemque deinceps in illam uſque diem, quæ prima Decembris erat, permanſiſſe. Quæ quidem obſervatio hactenus hypotheſi noſtræ conſentit, ut ſi eo tranſitu lineæ A C rotundus apparere Saturnus debuerit, id hoc anno neque alio accidere fuerit neceſſe. Sed cum per totum hunc annum Saturni locus, quà apparens, quà eccentricus, ab eadem parte manſerit loci æquinoctiorum, ſive ♓ gradus 20½; videbatur ex præcedentibus colligendum, ſalvis brachiis ſuis eum præterlabi potuiſſe, quod tamen contra evenit. Et ſexto quidem Septembr. dicti anni 1612, quo tempore jam rotundum Galilæus reperit, erat ejus locus ex Sole ſimul & apparens, in gr. 14, 44′ ♓. Hoc eſt g. 5. 46′ citra locum æquinoctii ſui. Adeo ut ſolares radii atque ii qui à viſu terricolarum fluebant in eandem annuli Saturnii ſuperficiem inciderent: non tamen angulo g. 5. 46′ deſuper in planum ejus directi, ſed gr. 2. 15′ duntaxat. Hic enim elevationis angulus, ut hoc obiter adnotemus, ſic ſe habet ad illum gr. 5. 46′, quo Planetæ locus diſtat ab æquinoctio ſuo, quemadmodum apud nos declinatio Solis ad ejuſdem ab æquinoctio diſtantiam. Quandoquidem non aliud reſpectu Saturni eſt planum annuli ſui, atque nobis eſt planum æquatoris, ſimilique etiam angulo ad eclipticæ planum inclinatur. Proinde cum cognita eſt diſtantia loci Saturni eccentrici ab æquinoctio ſuo,

ſi ſcire libeat quali angulo Solis radii in ſuperficiem annuli deferantur; quærendum in tabula declinationis Eclipticæ, qualis apud Aſtronomos in uſu eſt, quanta ſit declinatio loci alicujus qui tantundem à princ. Arietis abſit. Ea enim eſt ipſe angulus quæſitus. Ac ſimili quoque ratione cum data erit diſtantia loci Saturni apparentis ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ aut ♓, invenire licebit quonam angulo deſuper planum annuli nos inſpectemus; qualemque propterea ellipſin ille nobis exhibere debeat. Ex eadem nimirum tabula capiendo declinationem huic diſtantiæ à pr. Arietis reſpondentem, quæ declinatio rurſus hîc quæſitum angulum æquat. Quorum demonſtrationem adferre operæ pretium non eſt, quippe quam Aſtronimiæ periti facile perſpicient.

Illud verò videndum, qui evenerit ut viſu noſtro ac Sole ſimul ſupra planum annuli plus quam 2 gr. altis, nullum tamen brachiorum apud Saturnum veſtigium apparuerit. Anne hæc fortaſſe cauſa fuit quod ellipſis annuli, tam obliquè inſpecta ut magis tenuiſſimæ lineæ ſimilitudinem præferret, exiliorem lucem emittebat quam quæ Galilæi tubo percipi poſſet. Hoc quidem non improbabile videri queat, niſi eodem tubo, circa ſolſtitium ejuſdem anni 1612, brachia Saturni ſive bini illi, ut tum putabant, ſatellites Galilæo animadverſi fuiſſent, quo tempore Saturnus obſervabatur circa gr. 18, ♓. hoc eſt gr. 2½ ab æquinoctio ſuo remotus, ideoque viſus noſter vix uno gradu plano annuli ſuperior. Etenim ſi hoc poſitu brachia cerni potuere, multo clarius cerni debuiſſent tunc cum gr. 2. 15′ ſupra idem planum viſus extolleretur, initio nimirum Septembr. magiſque etiam 14 Nov. ejuſdem anni 1612, tempore ſtationis Saturni; quia tunc gr. 11. 10′ ♓ tenebat, eoque gr. 9. 20′ ab æquinoctio ſuo aberat; adeo ut angulo gr. 3. 42′ radii viſus in planum annuli deſcenderent. Atqui hîc, vel certe circa hæc loca brachiorum expers manſit, quum ſatis utique diligentem ac intentum obſervationibus Galilæum fuiſſe per eos dies credibile ſit, qui rotundæ phaſeos miraculo nuper eſſet excitatus.

Itaque in tenuitatem brachiorum, cur ea penitus latuerint cauſa conferri non poteſt. At neque transponendo amplius Saturni æquinoctiorum locum, quicquam proficimus; ne quidem ſi mobilem ſtatuamus lento quodam progreſſu, ad ſimilitudinem noſtrorum æquinoctiorum, quæ ſenſim in præcedentia referuntur. Quamobrem non aliam hujus rei cauſam eſſe crediderim quam quæ nunc dicetur.

Certum eſt cognitæque experientiæ, ſuperficiem quamlibet ab eodem lumine plus minuſve illuſtrari, prout directis vel obliquis radiis expoſita eſt: quod & à Galilæo, dialogo 1. de Mundi ſyſtemate, optimè eſt demonſtratum. Quamobrem cum exiguo admodum angulo ſupra annuli Saturnii planum Sol attollitur, puta gradus unius vel duorum vel etiam duorum cum dimidio, hoc eſt, cum Saturni locus eccentricus non ultra gr. 6. ab æquinoctio ſuo aberit, etiam prætenui tantum luce annuli ſuperficies à Sole impertietur. Hanc autem, ita leviter ſplendentem, veriſimile eſt à meris tenebris nos diſcernere non poſſe, præſertim Saturnii globi vicino fulgore præpeditos; eoque anſas tunc nullas animadverti. Qua tamen in re illud ante omnia ſtatuere neceſſe eſt, ſuperficiem annuli non eſſe aſperam montibuſque obſitam, veluti maxima ex parte Lunæ noſtræ eſt ſuperficies: ſed æqualem planamque velut in iis Lunæ regionibus, quas nonnulli maria eſſe ob inſignem planiciem arbitrati ſunt.

Alioqui enim, ſicut Luna plena circa diſci ſui extrema, ubi tamen obliquos Solis radios excipit, nihilo languidiori lumine quam verſus medias partes cernitur, ſcilicet quia illic tota montoſa atque aſpera eſt, ita annuli quoque ſuperficies ſi ſimili natura prædita foret, non ſecus obliquè incidentibus radiis quam directis ſplendeſceret. Quamobrem neceſſario plana, uti diximus, cenſenda eſt. Atque hinc jam intelligere licet cur Galilæo à Menſe Septembri anni 1612 uſque in Febr. 1613, quoad nempe Heliacè Saturnus occideret, nullæ circa eum anſæ conſpicerentur. Quia nempe inde à Septembri continuè locus Saturni eccentricus ad æquinoctii locum appropinquavit, eoque altitudo Solis ſupra an-

nuli planum, quam initio Sept. tantum gr. 2. 15′, fuiſſe diximus, ſimul imminuta eſt. Pari ratione nec Gaſſendus brachia ulla percipere potuit menſe Febr. anni 1643. etſi tunc quoque Sol oculuſque obſervantis eandem annuli ſuperficiem intuebantur; ſcilicet quia Saturni locus eccentricus in gr. 26. ♓ inveniebatur, hoc eſt 5½ gr. à loco æquinoctii, eoque altitudo Solis ſupra annuli ſuperficiem tantum g. 2. 11′. Denique & anno 1656, menſis Martii diebus aliquot, quibus ſimiliter eadem annuli ſuperficies ad nos Solemque ſpectabat, multo minus brachiorum ullum veſtigium apparere debuit, quod nunquam dimidio gr. ſupra planum annuli Sol attolleretur. Nam reliquo tempore fulſionis illius, diverſas partes loci æquinoctiorum locus Saturni ex Sole atque obſervatus locus obtinebant, unde ex ſuperius allata cauſa brachiorum expertem cerni oportuit.

Neque verò magis conſpicuum nobis annulum fieri credendum eſt, ſi altius ſupra planum ejus oculus attollatur, Sole tamen ex obliquo tantum radiis ſuis eum perſtringente, quemadmodum contigit dicta Saturni ſtatione ad 14 Nov. 1612; quippe quo tempore Sol gradu 1. 36′ ſupra planum annuli aſcenderat, viſus autem noſter gr. 3. 53′. Idem enim in quacunqne plana ſuperficie experiri licet, in quam ſi à latere radii luminis incidant, non apparebit illuſtrior quocunque in loco viſus ſtatuatur, ſed tum demum, ſi radios à lumine rectiores accipiat. Uti contra quoque ſi amplius ad lumen obverſa directiuſque illuminata fuerit, non refert quàm obliquè in eam radii viſus incidant, ſed undecunque ſpectata æque lucida apparebit. Atque ita fit ut cum Sol paulo altius ſupra planum annuli ſeſe extulit, tribus puta gradibus aut paulo amplius; viſu licet noſtro non niſi uno gradu extante; ſplendere jam nunc annulus incipiat, Saturnoque brachia adnaſcantur. Sicut anno 1612. circa ſolſtitium accidit, Saturno ex Sole circa gr. 12. ♓, hoc eſt, gr. 8½ ab æquinoctio ſuo agente, ac proinde Solis altitudine ſupra planum annuli graduum 3. 23′: Galilæi verò oculo vix uno gr. ſupra idem planum elevato. Videbatur enim Saturnus

nus in gr. 18. ♓, hoc eſt 2½ gr. à loco æquinoctii, quæ diſtantia dat declinationem gr. unius.

Ut igitur ſecundum hæc de rotunda phaſi judicium feratur, illud in primis reſpicere oportet, quod gradibus ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ vel ♓, Saturni locus eccentricus abſit. Ac mihi quidem phænomena antecedentia expendenti, videtur ita ſtatuendum, ut quoties non amplius quam 6 gr. circiter in alterutram partem, à dictis locis Saturni locus ex Sole diſtabit, nunquam brachia ejus conſpici queant, quicunque demum oculi noſtri ſitus fuerit; hoc eſt, nulla ducta ratione Saturni loci apparentis. Quod tamen ita accipiendum eſt, ſi perſpicillis non melioribus quam quibus Galilæus & Gaſſendus uſi ſunt Saturnus inſpiciatur. Nam ſi noſtris ſimilia adhibeantur, forſitan jam in illa 6 graduum diſtantia tenue quoddam brachiorum exordium percipi poſſit. Certè anno 1656, 13. Oct. renata illa vidimus, cum Saturni locus ex Sole tantum gradibus 6. 46′. æquinoctii ſui punctum prætergreſſus eſſet. Erant autem æquè conſpicua ferè atque ante phaſin rotundam, anno 1655. At ii qui minoribus teleſcopiis eum tunc obſervitabant, ut Joh. Hodierna, penè adhuc rotundum repererunt: ait enim is, tantum tenuiſſimos quoſdam veluti radios utrinque è lateribus Saturnum vibrare viſum. Quamobrem noſtris teleſcopiis fortaſſe arctiores paulò prædicti limites ſumendi ſint; quod tamen minimum quid erit, ſequentiumque annorum experientiâ definiendum.

Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.

Rurſus cum amplius 9. gradib. vel forſan ſupra 8. gr. ſolum, ab æquinoctiis ſuis ſive 20½ gr. ♍ aut ♓ locus Saturni eccentricus diſtare invenietur, jam inde brachiis anſiſve præditum dicemus: nullâ ne hic quidem apparentis loci conſideratione, quoniam hinc jam apparens locus & eccentricus ab eadem parte loci æquinoctialis habentur; ac propterea eadem annuli ſuperficies, per ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, Soli & viſui noſtro obverſa eſt, idque ita ut Sol plus tribus gr. ſupra ipſam elevatus ſit, viſus vero noſter ut minimum gr. uno: quo fit ut brachia ſaltem tenuia animadverti debeant.

At

At cum nondum gr. 8 aut 9, plus verò quam ſenis, eccentricus locus Saturni à $20\frac{1}{2}$ gr. ♍ aut ♓ aberit, videtur etiam apparens locus expendendus eſſe, nempe circa quadratum quem vocant Saturni cum Sole aſpectum. Fieri enim poterit ut non ultra gradus unius ſemiſſem locus apparens ab æquinoctii loco remotus ſit, ideoque viſus noſter tantum 12′ ſuper annuli ſuperficiem exurgat; quæ cum à Sole ſimul debiliter illuminetur, vix puto ſe videndam præbebit. Quum autem duo contingant quadrati aſpectus ſingulis Saturni fulſionibus, priori eorum ita demum illud quod diximus perpendere opus erit, ſi locus planetæ ex Sole præcedat gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ aut ♓, poſteriori verò non niſi ſequatur. Nam ſi ſecus fuerit jam certo brachiis auctus cernetur.

Et ſic quidem quod maximè perplexum in toto hoc negotio inerat, nulla diſſimulata difficultate, pertractavimus. Illud enim inquirere voluimus an certis locis rotunda phaſis alligari poſſet, ita ut omnibus huc uſque obſervatis fieret ſatis. Quod & præſtitimus tandem, etſi arctis adeo limitibus circumſcripti, ut ne minimum quidem ultra citrave ab iis diſcedere ſalvis apparentiis licuerit. Simul verò hoc operæ pretium fecimus, quod de futuris Saturni phaſibus haud dubia prænuntiare in poſterum licebit. Etenim ſi modo tabularum Aſtronomicarum ope inveniatur, quo tempore Saturni locus ex ſole ſive eccentricus, cadat in gr. 20, 30′ ♍ vel ♓; ſenis menſibus qui id tempus præcedunt totidemque ſequentibus brachia nulla percipi poſſe manifeſtum erit; quoniam ſcilicet in menſes ſingulos gradu uno Planetæ locus ex Sole promovetur. Præterquam quod aliquando uno etiam atque altero menſe citius rotunda phaſis exiſtet, aliquando tanto diutius videri perſeverabit; ſi nempe quadrante cæli per id tempus Saturnum à Sole diſtare contingat, locuſque Planetæ eccentricus, ea qua diximus lege, præcedat vel ſequatur ♍ aut ♓ gr. 20. 30′.

Secundùm hæc igitur, quoniam in gr. 20, 30′ ♓ incidit locus eccentricus die 12. Jan. 1672″, exiſtimo anno 1671 & 1672 Saturnum brachiis cariturum; non toto utriuſque anni

tem-

tempore, ſed hoc pacto, ut menſibus quidem Aprili, Majo, Junioque anni 1671, nondum iis ſpoliatus cernatur, ſed tenuia etiamnum utrinque extent qualia ſub finem anni 1656 obſervavimus. Julio autem aut Auguſto gracileſcant prorſus tandemque diſpareant & rotundum Saturnum relinquant. Quo vultu non tantum ad Heliacum occaſum uſque conſpiciendus erit, hoc eſt uſque ad finem Februarii anni 1672; ſed eundem quoque exoriens rurſus menſe Aprili referet, nec amittet niſi Julio menſe aut Auguſto. Circa hoc enim tempus adcreſcere denuo brachia cernentur, ac paulatim evidentiora fieri; tandemque etiam ſingula prope medium Saturni orbem bifida evadent, quemadmodum ab anno 1656 deinceps augeri ea vidimus.

Quibus temporibus rotunda phaſis reverſura ſit prædicitur.

Manebunt autem ad annum uſque 1685, quando rurſus evaneſcentia ſpectare continget, nempe circa Martii initium. Inde rotundus planeta obſervabitur per annum integrum, excepto eo tempore quo propter Solem deliteſcit. Adeo ut menſe Martio ſequentis anni 1686 brachia demum recuperaturus ſit, ſed tenui tantum incremento quandiu illa vice viſendus erit. Locum Saturni ex Sole reperio in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ die ſecunda Sept. anni 1685, unde prædictas viciſſitudines conſequi neceſſe erat.

Rurſus verò anno 1701, 15 Jun. redit Saturni locus ex Sole ad ♓ gr. 20, 30′. Unde circa finem anni 1700, principiumque 1701, priuſquam Heliace occidat, rotundus lucebit, ac porro quoque ubi jam ex Solis radiis emerſerit, ea facie permanebit ad initium uſque anni 1702: à quo tempore ad occaſum uſque Heliacum tenuia fortaſſe brachia cerni poterunt. Abſque dubio autem, menſe Majo ejuſdem anni, cum denuo obſervari cœperit, reſtituta invenientur.

Atque ita porro ſingulis quatuordecim aut quindecim annis, nimirum bis ad ſingulas Saturni in ſua orbita revolutiones, rotunda forma conſpicienda dabitur; neque enim unquam æquinoctii ſui locos tranſire quin brachia amittat poteſt. Ac facile quidem accurata mutationum ejuſmodi tempora veſtigiis noſtris inſiſtendo, quilibet inpoſterum præfi-

niet, certiuſque etiam ubi renaſcentes Saturni anſas conſpexerit.

Cæterum ad eos obſervandos, quos hic adnotavimus, alatæ formæ ad rotundam tranſitus, Aſtronomos omnes intentos eſſe cupimus. In quorum prædictione ſi à veritate aut nihil aut pauxillum tantum aberraſſe nos invenient, tum procul dubio cauſas quoque horum phænomenôn germanas qualeſque revera ſunt ſibi explicitas credant. Sin longè hallucinati fuerimus, adeo ut brachiis præditus planeta cernatur, quo tempore ex ſententia noſtra vel maximè iis carere deberet; indicio id erit, quædam circa rotundam phaſin accidere nobis nondum ſatis perſpecta, nec ulli mortalium forſitan pervidenda. Nec tamen annuli propterea hypotheſin rejiciendam exiſtiment, quandiu reliquis quæ circa anſas animadvertentur ad amuſſim, uti hactenus, conſentiet.

Quando latiſſimæ omnium anſæ apparituræ ſint.

Porro in hiſce anſatis Saturni phaſibus, cum nulla adeo ſubita mutatio locum habeat, ideo nec tempora ſingularum tam accuratè ut in rotunda diſtinguere neceſſe fuit; ſed in univerſum ſcire ſufficit, phaſin anſatarum latiſſimam medio tempore inter duas rotundas incidere; ut proinde circa annum 1663 & 1664 illa reverſura ſit; iterumque anno 1678 & 1679; ac poſtea anno 1693. Reliquis enim inter iſtos intercedentibus annis, tanto anguſtior annuli ellipſis cernetur, quanto magis rotundæ phaſeos tempus imminebit. Et hactenus quidem eorum quæ circa Saturnum obſervantur cauſas ac tempora digeſſimus.

Nunc fortaſſe haud alienum propoſito videatur, ſi quemadmodum ex noſtra hac ſtatione hucuſque ſyſtema ejus contemplati ſumus, ita ad ipſius Saturni globum deinceps cogitationem transferamus, atque illud diſpiciamus, qualis inde univerſi facies, quænam futura ſint intervalla annorum menſium ac dierum, quæve æſtatis hyemiſque viciſſitudo; ac præſertim qualia ob annulum planetæ circundatum contingere eum inhabitantibus neceſſe ſit: ut nonnunquam longo tempore aliquos conſpectu Solis privet, aliàs rurſum nocturnas tenebras imminuat, arcus lucidi ſpecie horizonti il-

lo-

lorum ſuperſtans. Verum eo labore ſuperſedere rectius arbitror, tum quod Aſtronomiæ gnaris ſingula hæc expendere, ſibique ob oculos ponere, non ſit difficilè futurum; tum quod in his ipſis multi ſint, (ut alios mittam) quibus otioſa & inanis ejuſmodi diſquiſitio videretur; ac tanto quidem magis, quanto abſurdius putant ut animantia aliqua ratione prædita Saturnum ac reliquos Planetarum incolere credamus.

De Saturni magnitudine & à terris diſtantia.

De magnitudine autem Saturni ejuſque à terris diſtantia operæ pretium videtur ut ſententiam noſtram his ſubjiciamus, ſiquidem & alio modo illas inquiſivimus quam quo fieri ſolet, & aliquanto aliter de utraque ſtatuimus. Nempe ſphærulam illam annulo cinctam quam ſub exiguis modo lineamentis ſpectavimus, diametrum quindecies circiter majorem habere, quam noſtra hæc in qua degimus terra, putandum eſt; abeſſe autem à nobis, cum poxima eſt, terræ diametris 100344; cum longiſſimè diſtat, 122000. Quæ quidem ſequenti ratiocinio nituntur.

Docuit nos novo ſuo ac divinitus invento ſyſtemate Copernicus, quamnam inter ſe proportionem ſervent ſingulorum à Sole Planetarum diſtantiæ, apparentes vero eorundem diametri quanto aliæ aliis majores ſint teleſcopii ope innoteſcit. Collatis ergo invicem rationibus utriſque, tum diſtantiæ tum magnitudinis apparentis, vera inde planetarum ad ſe mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoſcitur. Et ad Saturnum quod attinet, primùm annuli ejus diameter quum in minima à nobis diſtantia comprehendatur angulo ſexaginta & octo ſcrupulorum ſecundorum; talem enim ad ſummum reperimus; cumque minima hæc Saturni diſtantia ad mediocrem Solis diſtantiam ſit fere octupla; ſequitur, ſi tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in diſtantia mediocri, apparituram tunc annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc eſt 9′, 4″. Solis autem diameter in media diſtantia eſt 30′, 30″. Ergo revera ea erit proportio diametri annuli Saturnii ad diametrum Solis quæ 9′, 4″, ad 30′, 30″, hoc eſt, fere quæ 11 ad 37. Diameter verò Sa-

Quanta appareat major Saturni diameter.

turni ipſius, quam ſuperius diximus ad annuli diametrum ſe habere ut 4 ad 9, hoc eſt fere ut 5 ad 11, ad diametrum Solis erit paulo minor quam 5 ad 37.

Quanta vero ſit Saturni diameter ad Telluris diametrum collata haud æque certo definiri poteſt. Aſtronomi ita hoc inveſtigant, ut primò intervallum inter terram ac Solem ad certum terreſtrium diametrorum numerum revocent, inde quæſitam magnitudinum rationem eliciant. At in illo Solis terræque taxando intervallo nimium quantum inter ſe diſſentiunt; nec mirum, quum nulla adhuc tolerabilis methodus ad dimetiendum hoc ſpatium reperta ſit. Nam ſive per Eclipſes ſive per Lunæ dichotomias id deprehendere conentur, facile oſtendi queat inanem operam ſumi. Quare mihi quidem unica illa, quam dicam, ratio reliqua eſſe videtur, qua ſaltem veriſimiliter de Planetarum omnium ad terram magnitudine ac diſtantia ſtatui poſſit. Teleſcopio diametri Planetarum apparentes explorentur; ex his ſingulorum deinceps ad Solem comparata magnitudo inveſtigetur, ut de Saturno modo exemplum dedimus; omnibuſque perpenſis, ea Telluris ad cæteros aſſumatur magnitudo, quæ totius ſyſtematis ordini aptæque diſpoſitioni quàm maxime congruere videbitur. Ita cum proportio diametrorum Telluris ac reliquorum Planetarum ad Solis diametrum conſtituta fuerit, conſtetque inſuper quot ſuis diametris Sol à nobis diſtet, ex angulo videlicet quem ſubtendit diameter ejus apparens, jam terræ quoque ad Solem magnitudo nota erit; atque unà Solis diſtantia, tum à terra tum à cæteris Planetis, Terræ diametris æſtimabitur. Hanc itaque nunc viam ingredi placet, ideoque ſicut Saturnum cum Sole modo comparavimus, ita de reliquis quoque ſimile examen inſtituemus.

Jovis terris proximi diameter apparens quanta obſervetur.

Jovis diameter, cum proximè nobis adeſt, ſexaginta quatuor ſecunda ſcrupula comprehendere mihi videtur; quumque hæc ejus diſtantia ad mediam Solis diſtantiam ſit ut 26 ad 5, hinc ſi fiat ut 5 ad 26 ita 64″ ad aliud, invenientur 5′, 35″, amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter ſi tam propinquus nobis fieri intelligatur atque Sol in diſtantia me-

mediocri. Sol autem hîc apparet diametro 30′, 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem hæc proportio erit quæ 5′, 35″ ad 30′, 30″, hoc eſt paulo major quam 1 ad 5½.

Accuratè etiam diametrum Veneris dimenſus ſum, ea quam poſtmodum exponam methodo, invenique cum terris proxima eſt, non majorem fore quam octoginta quinque ſecundorum ſcrupulorum. Eſt autem diſtantia hæc Veneris perigææ ad mediam Solis à Tellure diſtantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo ſi apud Solem Venus conſiſteret appareret ejus diameter duntaxat 21″, 46‴. Unde conſtat ita eſſe diametrum Veneris ad Solis diametrum ut 21″, 46‴ ad 30′, 30″, hoc eſt ut 1 ad 84. *Veneris diameter apparens.*

At Martis diametrum terris proximi non excedere 30″ deprehendi, etſi obſervatione non tam exacta quam qua in Saturno, Jove & Venere uſus ſum, quippe cujus rationem noviſſimo Martis ad Tellurem acceſſu nondum inveneram. Unde quum diſtantia Martis minima ſit ad mediocrem Solis ut 15 ad 41; colligitur ratio diametri Martis ad diametrum Solis ea circiter quæ 1 ad 166. Mars itaque duplo minor Venere ſecundum diametrum hac ratione efficitur. Atque adeo manifeſtum eſt in Planetis non ubique eum ſervari ordinem, ut qui remotiores à Sole ſunt iidem quoque majori ſint mole: nam & Jovis ſphæra Saturno ſine annulo major inventa eſt. Quo fit ut minus liquido de Terræ ad cæteros Planetas proportione æſtimatio iniri poſſit. Nam ſi pro ratione ordinis magnitudines eſſent attributæ, ut Saturnus Jove major eſſet, Jupiter Marte, hic Venere, hæc Mercurio; inde quidem penè certo colligere liceret, Telluris magnitudinem eſſe inter Martem Veneremque mediam. Cum verò in aliquibus contrarium deprehendatur, non æquè quid ſequendum ſit apparet. Veruntamen ut quatenus fieri poteſt totius ſyſtematis concinnitas obſervetur, id nunc quoque maximè conſentaneum videtur, ut ſicut loco media Terra eſt inter Martem & Venerem, ita quoque ſit magnitudine. Martis diametrum diximus diametri Solis eſſe $\frac{1}{166}$; Veneris vero diametrum $\frac{1}{84}$. Inter utramque mediam igitur terræ dia- *Martis diameter.*

metrum ponendo fiet ea $\frac{1}{111}$ diametri Solis. Hujus autem $\frac{5}{37}$ diametro Saturni æquales repertæ ſunt; ergo Saturni diameter Telluris diametrum continebit quindecies, diameter vero annuli Saturnii eandem Telluris diametrum circiter trigeſies & quater. Unde eximia horum corporum magnitudo cognoſcitur; quæ ſane omnem ab aliis hactenus traditam facile exuperat.

Hinc verò & intervallum inter Terram ac Solem neceſſario omnium exiſtimatione majus conflabitur. Si enim diameter terræ diametri Solis $\frac{1}{111}$ continet; Solis autem diameter ſuæ à nobis mediæ diſtantiæ $\frac{1}{117}$ æquat, uti ſequitur ex eo quod diameter ejus obſervetur 30′, 30″; erit certè Terræ diameter $\frac{1}{12543}$ diſtantiæ quæ eſt inter ipſam ac Solem. Deinde cum Saturni minima diſtantia ſit ad mediam Solis diſtantiam ferme octupla, hinc Saturni, cum Terræ proximus eſt, diſtantia habebitur diametrorum terreſtrium 100344; cum verò plurimum aberit, circiter 122000.

Fateor equidem lubrica eatenus ratione hæc niti, quatenus nimirum Terræ magnitudinem inter Martem Veneremque mediam adſumſimus, nullo niſi veriſimilitudinis argumento: adeoque vel millenis aliquot Terræ diametris facile à veritate aberrari potuiſſe. Verùm ut jam duplo majora minorave quam reipſa ſunt intervalla iſta definiverimus, aut triplo etiam; non tamen parum videri debet hactenus ſaltem menſuram eorum comprehendiſſe, quum alia nulla ratio ſuppetat qua non vel decuplo major error timendus ſit. Ita enim omnino exiſtimo. Ad reliquum verò calculum quod attinet, quo Planetarum diametros Solis diametro comparavimus, ſciendum eſt nihil in eo conjecturæ tribui, ſed ex iis quæ data ſunt certa ratione illum procedere. Atque adeo poſitis iis Planetarum diametris apparentibus quas à nobis obſervatas diximus, non poſſe non Solis diametrum ad diametrum annuli Saturno circumdati ſeſe habere ut 37 ad 11; ad diametrum vero Saturni ipſius, ut 37 ad 5; ad Jovis diametrum ut 11 ad 2; ad Martis ut 166 ad 1; ad Veneris ut 84 ad 1. De Mercurio non definiam priuſquam ritè eum dimen-

Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.

menſus fuero; quod hactenus non ſucceſſit, cum ob exilitatem ſideris, tum quod horizonti plerumque vicinum inveniatur, ubi vapores è Terra ſurgentes tremula quadam refractione figuram ejus præciſo ambitu terminari non ſinunt. Patet autem & Saturnii globi diametrum ad diametrum Jovis rationem habere quam 55 ad 74: diametrum vero Martis continere amplius quam vicies & bis, ad Veneris diametrum eſſe ut 34 ad 3. Jovis item diametrum diametri Martis amplius quam trigecuplam eſſe; diametri vero Veneris amplius quam quindecuplam; ac denique Martis diam. ad diametrum Veneris circiter ſubduplam. Quæ omnes proportiones ratæ fixæque permanent, quantacunque diſtantia Solem inter ac Tellurem ſtatuatur, ſi modo apparentes diametri quales tradidimus retineantur. Haſce autem quo modo obſervaverimus denique dicendum eſt, atque eo magis quod longè ab aliorum ſententia alicubi recedamus: veluti cum Veneris diametrum triplo minorem aſſerimus quam à Ricciolo definita eſt, qui tamen ſumma cura circa hæc verſatus videtur. Noſtrum igitur artificium eſt hujuſmodi.

Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima.

Locus quidam eſt intra tubos qui Solis convexis vitris inſtructi ſunt, circiter altero tanto amplius quàm convexum oculare ab oculo diſtans; quo in loco ſi quid intra tubi cavitatem viſui objiciatur, quantumvis ſubtile aut exiguum, id diſtinctè prorſus ambituque exquiſitè terminato conſpicitur, atque ita pro ratione latitudinis ſuæ partem aliquam rei lucidæ, velut Lunæ per teleſcopium ſpectatæ, viſui ſubducit. Exacta loci determinatio, his quibus nullo vitio viſus laborat, in focum convexi ocularis cadit; myopi aliquanto propinquius punctum accipiendum eſt, contraque, qui tantum à longinquo clare vident, paulo remotius; quod experientia protinus docere poteſt. Hìc igitur ſi primò annulus ſtatuatur cum foramine paulo anguſtiore quam ſit vitrum ipſum oculo proximum, eo tota tubi apertura, ſive ſpatium circulare quod uno obtutu in cælo detegitur, præciſâ circumferentiâ deſcriptum habetur. Cujus ſpatii diameter, quot ſcrupula comprehendat, aliquo pacto inquirendum eſt, atque optimè qui-

quidem ex tranſitu ſideris alicujus, cujus tempus numeretur vibrationibus perpendiculi, vel ope Horologii noſtri oſcillatorii nuper inventi, teleſcopio interim immoto manente. Scimus enim 4 ſcrupulis horariis unum cæli gradum & exiguum quid amplius tranſire: ideoque ſi verbi gratia numerentur ſcrupula ſecunda 69 interea dum ſtella quædam fixa totam teleſcopii capacitatem emetitur, argumento id erit $17\frac{1}{4}$ ſcrupula prima, teleſcopii hujuſmodi apertura comprehendi, ſicut noſtro evenit. Quo invento virgulam unam atque alteram ex ære aliave materia parare oportet, decreſcente paulatim latitudine, tubumque perforare utrinque circa locum illum paulo ante memoratum, quo poſſint in ipſo ejus puncto virgulæ tranſverſæ ante oculum obtendi. Cum igitur Planetæ alicujus diametrum metiri cupimus, adhibitâ eo quo diximus loco virgulâ, notandum eſt quænam hujus latitudo totum Planetam contegere poſſit. Eâ enim latitudine acuto deinde circino acceptâ, atque ad totius foraminis amplitudinem collatâ, Planetæ diameter apparens facili ratiocinio innoteſcet. Sic die 29 Dec. 1658 diametro Veneris invenimus convenire virgulam cujus latitudo æquabat $\frac{1}{20}$ totius foraminis: eſt autem hoc, uti diximus, 17′, 15″. Ergo Veneris diameter erat 51″, 45‴. Diſtantia autem Planetæ ad minimam ſuam à Terris diſtantiam ſe habebat circiter ut 27 ad 16, ergo diameter ejus terris proximæ efficitur 87″, 20‴. Rurſus anno 1659, 8 Mart. hora 6 mat. Veneris diametrum obſervavimus quæ æquabat $\frac{4}{67}$ aperturæ teleſcopii. Ideoque erat 61″, 30‴. Diſtantia autem eo tempore ad minimam Veneris à terris diſtantiam ſe habebat ut 430 ad 316, ergo diameter ejus maxima fit 83″, 40‴. Sed & alias eadem methodo ſemper tantum paulo majorem minoremve invenimus, nam ſæpius examen hoc repetivimus, atque ex omnibus medium quid ſumentes, 85″ pro maxima Veneris diametro ſupra ſtatuimus. Hanc autem Ricciolus 4′, 8″, taxavit, atque adeo triplo quam nos majorem exiſtimat, ſed procul dubio nuda illa oculi æſtimatione, qua hîc uſus eſt, in tantum deceptus fuit. Nam Saturni Joviſque diametros, quas methodo cer-

Diameter Veneris obſervata.

tio-

tiori, appulſu nimirum ad fixas inveſtigavit, eadem fere qua & nos amplitudine definiit, paullum tantum excedens: Saturni enim maximam 72″ continere aſſerit, Jovis item maximam 68″, quæ mihi ſunt 68″ & 64″. Certum autem eſt non magis in Venere, quam in Jove aut Saturno dimetiendis, errori obnoxiam eſſe rationem noſtram. Et Veneris quidem diametrum Hevelius quoque, ad Lunæ maculas inſtituta comparatione, tantum 82″ ſe inveniſſe teſtatur cum circa perigæum verſaretur, unde diameter ejus maxima non multum ſanè noſtram ſuperabit. Porro illud in methodo à nobis tradita commodiſſimum accidit, quod nec Lunæ, nec ſideris cujuſquam conjunctionem, cum eo quem metiri volumus planeta, opperiri neceſſe eſt, ſed omni tempore ejus uſus conceditur. Nec ad planetarum tantum diametros pertinet, ſed ad lunares quoque maculas accuratè deſcribendas, comitumque Jovialium diſtantias accipiendas rectiſſimè adhibebitur. Ad planetarum autem diametros longis atque optimæ notæ teleſcopiis opus eſſe ſciendum eſt. Nec negligendum in Venere ac Mercurio, ut fuligine leviter inficiatur lens oculo proxima, quo perfectius planetæ ambitus circùm terminetur.

FINIS.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO

IN

SYSTEMA SATURNIUM

CHRISTIANI HUGENII.

AD

SERENISSIMUM PRINCIPEM

L E O P O L D U M

Magni Ducis HETRVRIÆ Fratrem.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO
IN
SYSTEMA SATURNIUM
CRISTIANI HUGENII.

SERENISSIME PRINCEPS

NOn ita pridem Chriſtiani Hugenii liber de Saturnio ſyſtemate Celſitudini tuæ Sereniſſimæ inſcriptus in meas manus incidit, in quo, & de me unum quidpiam, & de reipſa nonnulla eſſe comperi, quæ cum veritate minùs conſentiant. Nollem literatos homines, quibus teleſcopii majoris copia non eſt, in errorem induci; cum jam alioquin ſatis proclives ſint ad excipiendam credulis auribus, vel oculis eam rerum cœleſtium novitatem, quæ hactenus incompertæ orbi fuerunt: Accedit, quod libelli auctor eam diligentiam à ſe adhibitam eſſe atteſtatur, qua certè quiſpiam majorem in illo non deſideret; quod revera non parvi ponderis eſt, ad captandam hominum credulitatem, erroremque in eorum animos inſinuandum. Itaque meum eſſe duxi, tum ea, quæ mihi affictа ſunt, tum ea, quæ cœteris omnibus errandi occaſionem facilè præbere poſſent, brevi hoc & publico ſcripto refellere; brevi quidem, ne plus æquo legentibus moleſtum ſit; publico verò, ne privati Hugenii errores publici fiant; aut ſi jam publici facti ſunt, ne quid

inde reſpublica literaria detrimenti capiat, ut publicè à me configantur. Quia vero Hugenius tuis auſpiciis libellum ſuum vulgavit, iiſdem ego potiori jure brevem hanc diſcuſſionem in publicam lucem prodire volui, qui tot nominibus Celſitudini tuæ Sereniſſimæ, totique pluſquam regiæ Mediceorum familiæ obſtrictus ſum.

Tria igitur in hac ſcriptione præſtabo; primò enim affictam mihi fraudem amoliar; aliquot deinde Auctoris errores indicabo, ea tamen ſtyli moderatione, quæ & Chriſtianum, & ingenuum, ne dicam, EUGENIUM, hominem deceat: cum demum Auctor ſcripſerit pag. 1. phænomeni Saturni rationem & cauſam nec Galilæo, nec Aſtronomorum cuiquam compertam fuiſſe, eamque dumtaxat explicari poſſe, inſerta Saturnio globo ſplendentis annuli corona, ne Jovi, quem aſtra Medicea jure coronant, detrahi corona & jam olim exauctorato Saturno reſtitui videatur, Fabriani ſyſtematis rudimentum quoddam breviter exponam, in quo, adducta Saturni phænomena ea facilitate explicantur, qua, neſcio, an major excogitari poſſit; in ea ſcilicet terræ quieſcentis hypotheſi; quam catholici Aſtronomi amplecti dumtaxat & contra Heterodoxos Ariſtarchos tueri debent. Cæterùm illa omnia, quæ à me ſcribentur, æquiſſimæ tuæ cenſuræ, ac recto judicio ſubjecta eſſe velim; nec abs re, opinor, cùm te literati omnes, ut Mecænatem; & politiorum operum artifices, ut ſingularem patronum colant; ſed ad rem venio.

Primo igitur loco Hugenius, antequam ſyſtema Saturnium aggrediatur, præmittit ſui teleſcopii deſcriptionem; cum enim, ut ipſe ait, alia perſpicilla non eſſent, niſi quinque aut ſex pedes longa, ſeriò & maximo ſtudio ad longiora fabricanda animum & manum applicuit: ſed advertere potuit ac debuit, in illa obſervatione mea Saturni, quam ipſe refert, mentionem à me factam fuiſſe teleſcopiorum variæ longitudinis, quæ ad prædictas obſervationes adhibueram, ſcilicet 15. 24. & 36. palmorum; multa autem hujuſmodi fabricavi; Illuſtriſſimus Eques Dighby, vir ut nobili genere, ita ingenio perſpicaciſſimo & omni doctrinæ genere conſpicuus ſex, cum Ro-

Roma diſceſſit, ſecum detulit; unum Thomas Paggi nobilis Anglus; Taurinum alterum miſſum eſt; Fabritius Guaſtaferrus Romanus, vir conſuetudine & amicitia mihi conjunctiſſimus, rerumque optimarum ſtudioſiſſimus, unum habuit; Bononiam unum miſi ad Illuſtriſſimum Comitem Carolum Antonium Manzinum, virum ſanè rerum iſtarum peritiſſimum, doctorem eximium, cujus Dioptricam in dies expectamus, in qua haud dubiè ea legemus, quæ multi hactenus deſiderarunt: Unum etiam fabricavi Illuſtriſſimo D. Caramuel Campaniæ Epiſcopo; omitto alia; nihil enim aliud jam à multis annis ago.

Tum deſcribit teleſcopium à ſe fabricatum, longum pedes Rhenolandicos 23. qui ſi reducantur ad palmos Romanos, quos adhibent architecti, faciunt palmos 31. uncias 4. Vitri objectivi (ſic vulgò vocant) orbis apertus diametrum habet pollicum 2. cum triente: ſeu palmi Romani unc. 3. ſcrupul. 1. Vitrum oculare ex duobus invicem unitis conſtans, lenti æquivalet, & radios, parallelos colligit, ac projicit in focum, diſtantem pollic. 3. prædicti pedis, id eſt, uncias 4. ſcrup. 2. palmi Romani: inde porrò deducit Hugenius, vitrum ſuum objectivum exquiſitum eſſe, cum ſit patiens lentis adeo acutæ, ut vocant, & ad veras Saturni obſervationes, ejuſmodi tubos, & vitra adhiberi vult.

Hæc facilè omittere Hugenius potuiſſet; nec enim his regulis opus erat, cum longè ante fabricata fuerint teleſcopia, quæ tum longitudine, tum vitrorum figura, tum operis perfectione Hugenianis minimè cedunt; adhibui aliquando tubum 36. palmos longum, ac proinde longiorem Hugeniano palmis 4. unc. 8. orbis autem aperti diameter fuit unc. 4. ſcrup. 2. ſed ſublatis 2. illis ſcrup. propter longitudinis differentiam 4. ſcilicet palm. unc. 8. reſtat diameter orbis mei vitri, major diametro orbis vitri Hugeniani unc. 1. ac proinde vel hoc nomine, meum teleſcopium Hugeniano præferendum, ex vulgari & ab omnibus accepta regula; cum ſcilicet majoris aperturæ, ut ſic loquar, vitrum objectivum patiens ſit.

Præ-

Præterea fruſtra omnino duo vitra in vitrum oculare utrinque convexum conjunxit; cùm unica lens ſufficiat: Ego lentem in prædictis obſervationibus adhibui, radios parallelos colligentem, & projicientem in focum diſtantem unc. 3. ſcrup. 2. ſed hæc diſtantia minor eſt diſtantia projectionis Hugenianæ unc. 1. igitur lens mea acutior: licet tubi mei longitudo major ſit; & cum ex hoc teleſcopia cenſeantur, ut optimè ipſe obſervat; inde certè pari jure deduco, meum teleſcopium præſtantius eſſe, idque triplici nomine. Primò, quia longius eſt. Secundò, quia vitrum objectivum habet majoris aperturæ patiens. Tertiò quia lentem acutiorem ſuſtinet.

Hugenius pagina libelli 37. de me ita ſcribit. *Tales autem* (Saturni ſcilicet anſas) *Euſtachius de Divinis notavit annis* 1646. 1647. 1648. *à quo editum Schema ad numerum* TAB. LII. fig. 10. 10. *hic exhibuimus; iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt, omnium emendatiſſimè Saturni faciem deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas, quæ in ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.* Eſt ſanè, quod multas illi gratias habeam, pro iis laudibus, quas mihi ignoto homini ac minimè cogitanti aſperſit; ſed quid hoc eſt, *de meo adjeciſſe*, niſi hominibus impoſuiſſe? Si enim de meo eſt, fictum eſt, nec reipſa talem Saturnum exhibui, qualem obſervavi; quia de meo umbras illas adjeci, quas in Saturno non vidi, nec videre potui, cùm revera in Saturno non ſint; fabula igitur eſt, fictio eſt; immo in re tanta pro luculenta fraude haberi debet, cum inde homines in errorem facilè inducantur. At ſi umbras de meo adjeci, Hugenius ejuſdem criminis reus eſt, qui paſſim, ut ſuum annulum Saturno injectum meliùs exprimeret, longe majores umbras adjecit: ſed profecto neuter adjecit de ſuo; ut enim globus, corpus ſcilicet ſolidum, in plano deſcribatur, aliquid umbræ accerſendum eſt, quo figura ſolida exprimatur & appareat, alioquin merus circulus evadet: Quis vel tyro in arte graphica hoc neſcit? Umbras ſcilicet accerſendas eſſe ad figuras ſolidas deſignandas. Umbram igitur de meo

meo non adjeci, ſed globum in plano deſcripſi, qui tamen ſine umbræ beneficio deſcribi non potuit; Umbra enim facit, ut reliquum figuræ quaſi extare, ac prominere videatur; in quo uno ſtereometria ab ichnographia diſcrepat: aut fortè dicere voluit, cavitatem anſulæ Saturniæ nigriore, quàm par ſit, umbra, à me fuiſſe fœdatam: cum tamen ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe videatur; ſed pace illiùs dixerim; quotquot anſarum cavitates vidimus, nigriores reliquo cælo, & magis atras aſpeximus, neque hoc teleſcopii vitio quiſquam tribuat; nempe ſi revera anſæ illæ vacuæ ſunt, & ad ipſum cælum radii viſorii per illas trajecti terminantur, ejuſdem cum cælo coloris erunt, quocumque tandem teleſcopio aſpiciantur. Itaque, quod mihi Hugenius pro ſua humanitate, præſtantiſſimi artificis elogium attribuit, ut me præſtantiſſimum eſſe non admitto, ita pro iis laudibus, quæ in me non quadrant, gratias, ut jam dixi, habeo; quia tamen unde altiùs extollit, inde profundiùs deprimit, dum fabricacati à me teleſcopii fidelem uſum deſiderat, utpote quod Saturnios ſatellites ea forma, eoque vultu non exhibeat, quo revera exhibendi eſſent, ad alterum caput venio, in quo luculenter oſtendam, Hugenium in nonnullis hallucinatum eſſe, quod an perſpicillis ab eo fabrefactis tribuendum ſit, an verò auctoris fictioni, alius fortè dubitaret; ego ſanè doctiſſimi hominis candori nihil detractum velim, quare haud dubiè teleſcopii vitio, quidquid erroris admiſit, tribuendum eſſe judico: leges porro, quas vitris ſuis pag. 3. & 4. præſcripſit, ſufficiat ſupra indicaſſe.

Conſtat verò auctorem duobus teleſcopiis uſum fuiſſe, in traditis obſervationibus; primum fuit 12. pedum, vel palmorum 16. more Romano paulò plus, duobus convexis inſtructum; alterum 23. pedum, de quo ſupra; In hoc, ejus dictis ſtandum eſſe puto: Ego tamen, ut dixi, longius teleſcopium adhibui, ſcilicet triginta ſex palmorum; quare non dubitarim, quin Saturnum mihi æquè perſpicuè exhibeat; præſertim cum vitra ſatis accuratè, & diligenter elaborari, tornari, formari, lævigari à me ſoleant: ſi Hugeniani tele-

ſcopii mihi copia fieret, facilis comparatio inſtitui poſſet, quam certè ab ipſo Hugenio inſtitui poſſe, nihil vetat; cum enim per totam Europam perſpicilla à me fabrefacta, diſtracta jam & quaſi diſſeminata fuerint, in ejus manus facilè venire potuerunt: rem narro, quæ mihi ante aliquot dies, accidit; Jam unus, vel alter annus elapſus eſt, ex quo R. P. Antonius Maria de Reitha Bononiam veniens, teleſcopium, quod ſecum habebat, 24. palmorum, mirificè prædicabat, aſſerebatque, nullum ejuſdem longitudinis in Italia eſſe, quod ſuo non cederet; hujus rei certior factus ab Illuſtriſſimo Comite Car. Ant. Manzino viro, ut dicam iterum, rerum iſtarum peritiſſimo, & curioſiſſimo, ad eum miſi, ut ipſe petierat, teleſcopium ejuſdem longitudinis, utrumque æqualium virium, & ejuſdem bonitatis repertum eſt; hæc jam penè mihi exciderant, cùm ecce Illuſtriſſimus Dominus de Monconis, nobilis Lugdunenſis, vir, tum ingenio, tum genere pleriſque notus, incogitanti mihi, poſtridie cinerum adfuit; poſt ſolita urbanitatis officia, cùm inter colloquendum, de perſpicillis mentio facta eſſet, non habeo ampliùs, inquit, tuum illud teleſcopum 24. palmorum, illudque ſanè optimum, quod ante aliquot annos Lugdunum ad me ignotum licèt hominem miſeras; illud enim bonus P. Reitha ſuis precibus à me extorſit; mecum igitur, inquam, pugnavi, ejuſdemque parentis liberos quaſi hoſtes inter ſe commiſi; in riſum prorupimus ambo; non tamen eſt, quod aliquis hoc vitio vertat Patri Reithæ, qui pro ſuo candore ultro fatebatur, præfatum teleſcopium non à ſe, ſed ab alio elaboratum fuiſſe: Scripſi hæc, ut vel inde conſtet, fieri potuiſſe, ut aliquod ex meis teleſcopiis in manus Hugenii veniret, ad comparationem inſtituendam; dum id fiat, facilè mihi perſuadebo, nihil eſſe, cur mea Hugenianis primas deferant; ac proinde ſuppoſita eadem longitudine, æquè clare, & fideliter Saturnios ſatellites exhiberi à meis, ac ab Hugenianis.

His præmiſſis; conſtanter aſſerit Hugenius, pag. 547. & 556. Saturni ſatellites nunquam ab eo ſejunctos figura ſphærica videri, quales prima figura ab eo excuſa, & à me recuſa

ſa exhibet; quod tamen falſum eſſe, omni aſſeveratione affirmo, cùm anno 1657. cœptis obſervationibus die 30 Junii, & ſepties, vel octies, ad vigeſimum uſque Julii repetitis, adhibito ad hunc finem teleſcopio triginta ſex palmorum, accuratiſſimè fabrefacto, prædictos ſatellites figura ſphærica tornatos à Saturni globo omnino ſejunctos obſervarim, quales prima figura Hugenii illos repræſentat, & quales jam antè Galilæus viderat, idem obſervavi anno proximè ſequenti, teleſcopio 24. palmorum uſus; adfuerunt teſtes omni exceptione majores; præ cæteris, vir clariſſimus Alphonſus Borrelli, Magni Etruriæ Ducis inſignis Mathematicus, & Geometra, typorum gloria orbi ſatis notus: neque hæc contradicendi ſtudio à me adſtrui, quiſquam ſibi perſuadeat; quo enim tempore, hos ſatellites ſphæricos à Saturni globo, modico quidem, ſed quod ſenſu, adhibita teleſcopii opera, percipi poterat, intervallo disjunctos vidi, nunquam mihi perſuadere potuiſſem, aliquem fore, qui ſejunctos unquam videri poſſe negaret; Dico igitur, disjunctos à me viſos fuiſſe; negat Hugenius disjunctos videri poſſe; produco teſtes omni exceptione majores, qui una mecum viderunt; Utri quæſo habenda fides? Sejunctos videri poſſe contendo, cùm reipſa ſejunctos viderim, adductis teſtibus omni exceptione majoribus; negat Hugenius, videri poſſe; quia ſcilicet nunquam ipſe vidit; ſed alii viderunt; negat tamen videri poſſe; adſunt & jurant teſtes; illos ejurat, & fidem alienis teleſcopiis detrahit; perperam quidem, meo judicio; nempe breviore teleſcopio diſcerni non poterant, licèt revera disjuncti eſſent: igitur cùm eos ſejunctos viderim meo teleſcopio, ideo neceſſaria conſecutionis vi deduco, hoc perfectius, & melius eſſe; nec enim longitudo æqualis, immo, nec major defuit; nec accurata operantis manus vel artificis diligentia deſiderata eſt. Teleſcopium igitur Hugenii, longiùs licet, breviorum vitio laboravit, cum illius opera, ſejunctos diſtinctè videre non potuerit, quo vitio, ut dixi, breviora perſpicilla laborant; falſum enim eſt, quod habet pag. 35. breviore teleſcopio 8. circiter palmorum ſejunctos, longiore

TAB. LII. fig. 1.

verò 16. palmorum conjunctos videri, nempe, ut dixi, potiore jure, ſejuncti, majore teleſcopio, conjuncti verò, minore viderentur; cùm verò ſuo minore ſejunctos viderit, majore verò ad inſtar brachiorum, hinc inde adnatorum extantes, perſpicuum majoris teleſcopii vitium eſt, cujus operâ radii minùs accuratè projiciuntur, & ut vulgò dicimus, inepta fit terminatio. Teleſcopium igitur Hugenianum meo primas deferat, oportet; quo ſcilicet ea diſtinctè vidi, quæ ille ſuo diſtinctè videre non potuit.

At non me latet cauſa qua fiat, ut Hugenius obſtinatè neget, ſejunctos videri poſſe; commentus eſt ipſe hypotheſim annuli Saturni globum cingentis, cujus operâ, illas phaſes explicare conatur, quæ in hoc planeta obſervatæ fuere: ut autem ſuæ opinioni, vel ſuo commento conſulat, illud profectò ipſi negandum fuit, quo ſemel admiſſo commentitia illa hypotheſis penitùs corruebat; ſi enim annulus Saturnum ambit, nunquam ſejuncti ſatellites videri queunt: pari modo fingit, præfatas anſarum vacuitates ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe, ut ſuæ hypotheſi conſulat; ſuppoſito enim illo annulo in iis vacuitatibus, nihil niſi cælum videtur; at revera, ut jam ſuprà dixi, nigriores illæ apparent, ex quo Hugeniana hypotheſis corruit. Ut igitur ſuam illam opinionem indemnem ſervaret, ea removenda eſſe putavit, quæ ſi adeſſent, illius opinionis falſitas manifeſta evaderet: & hæc ſibi perſuaſit, nobis tamen minimè perſuaſurus, qui rem ſecus eſſe, oculari demonſtratione prorſus evicimus.

Alterum eſt quod Hugenius vel finxit, vel leviter ſibi perſuaſit, quod tamen ejuſdem furfuris eſt; dicit enim, faſciam quandam nigricantem in Saturni globo videri, quæ quidem ex æquo medium diſcum ſecat, quando ſolus Saturni globus ſuo ſatellitio deſtitutus apparet; ubi verò ſatellites adſunt, modò ſuprà, modò infra brachiorum lineam faſcia videtur; ſed hoc etiam merum figmentum eſt ab auctore excogitatum, ut annulo ſuo conſuleret; nam cùm ipſi opponeretur, admiſſo ſemel hoc annulo nunquam Saturnum videri poſſe, vel anſulis, vel brachiis deſtitutum, quod tamen omnibus ob-
ſer-

ſervationibus repugnat; nempe ubi planum annuli directè in oculos incidit, annulus appareret ad inſtar zonæ rectæ, æqualis diametro annuli, ac proinde majoris diametro Saturni; igitur ad inſtar brachiorum duæ appendices hinc inde Saturnio globo adhærerent: cum igitur hac difficultate, & hoc nodo inſolubili annularis illa hypotheſis laboraret; finxit illius auctor, extimam annuli ſuperficiem ineptam eſſe ad luminis repercuſſionem, ac proinde faſciam illam nigricantem inde ortum ducere, & ob penuriam luminis repercuſſi, extantes illas appendices ſub aſpectum noſtrum non cadere: Hæc habet pag. 542. 545. 576. Aliam cauſam ſubnectit pag. 585. ab obliquitate radiorum illapſorum petitam, quæ fiat ut pars annuli ad nos obverſa obliquè dumtaxat illuminata non videatur; immo hoc alterum addit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam minimè à Sole illuminari; ac proinde mirum non eſſe, quod minimè videri poſſit; omiſeram, quæ habet pag. 551. de Saturnicolis.

Cuncta hæc facilè difflantur; nunquam enim faſciam illam nigricantem, quamvis exquiſito teleſcopio uſus videre potui; nemo unquam præter illum obſervavit; nec tamen teleſcopia noſtra Hugenianis deteriora eſſe crediderim; fictitia igitur cenſenda eſt illa faſcia, aut certè vitrorum vitio tribuenda: quod autem dicit, extimam illam annuli ſuperficiem ad lumen reflectendum ineptam eſſe; vel ex eo falſum eſſe conſtat, quòd in Saturni diſco partes omnes æquali lumine perfuſæ videantur: Nulla igitur pars ad nos obverſa ad luminis reflexionem inepta eſt. Præterea demus ita eſſe, & faſciam illam paulò obſcuriorem in Saturni diſco videri; nihil tamen obſtaret, quin brachia eodem lumine perſpicua eſſent; id eſt extrema ſegmenta apparentis zonæ, in quam annulus hoc ſitu aſpectus projicitur, extantia, & excurrentia hinc inde extra Saturnium globum, viderentur, eodem licèt nigricante colore diluta. Ad obliquitatem illapſorum radiorum perperam confugit; alioquin in cæteris planetis eadem ratio militaret; nempe fieri non poteſt, quin major pars ſuperficiei convexæ, obliquum radiorum ſolarium illa-

pſum excipiat. Id demum, quod ſubnectit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam à ſole aliquando non illuminari, ex regulis opticis omnino refellitur; ſuppoſita ſcilicet maxima illa Saturni diſtantia, nec non ſolis diametro longè majore, quo fiat, ut ſuperficies Saturni ad nos obverſa ſemper illuminetur; hinc totus Saturni diſcus ſemper apparet. De Saturnicolis nihil eſt, quod dicam, riſu potiùs, quàm argumentis hoc commentum refellitur; accedit, quòd catholicis dogmatis adverſatur, quæ homines tantùm illos agnoſcunt, qui ab Adamo duxerunt ortum.

Nonnulla etiam falſa admiſcuit, ut pag. 539. ubi dicit faſcias Jovis lucidiores eſſe reliquo diſco; cùm tamen obſcuriores certò videantur: Item globo Martis latiorem faſciam ſub obſcuram obduci; nihil tale unquam obſervatum eſt; deinde nunquam Saturnum vidimus ea forma, quam illi tribuit pag. 542. 545. tractum illum cæli circa Oriona, illuſtriorem eſſe vidimus, cum iis ſtellis ſplendentibus, quas ipſe recenſet. Multa etiam de Saturni phaſibus ſtatuit, ex paucorum annorum obſervationibus, quæ pro certis habere non poſſum, donec ſubſequentium annorum obſervationibus congruant; nempe ipſe obſervationes ſuas primum cœpit 25. Martii anno 1655. eaſque ad 19. Februarii anni 1656. breviore tamen teleſcopio uſus, 12. pedes longo perduxit; ac proinde minùs fideles cenſendas, ut ipſe ultrò fatetur. Standum igitur obſervationibus deinceps ab eo factis, ac repetitis identidem, adhibito longiore tubo, 23. circiter pedum, perductiſque ad 26. Martii anno 1659. Si aliquæ eſſent ab eo notatæ à 30. Junii ad 20. Julii anno 1657. viderem utrùm meis conſentirent; ſed nullas toto illo tempore factas invenio; an fortè paucæ illæ obſervationes ſufficient ad certum quid ſtatuendum? præſertim cum toto illo, quo factæ ſunt, temporis intervallo, vix Saturnus 38. gradus confecerit, traductus ſcilicet à 20 grad. Virginis ad 28. Libræ; an fortè inquam modicus ille arcus decurſus ſufficiet ad certam & indubitatam hypotheſim ſtatuendam? Statuit autem, anſas magis apertas, & patentes videri, Saturno exiſtente

in

in grad. 20, 36. Gemin. & in oppoſito 20. 36. Sagitt. Sphæricum verò ſine anſis, & ſatellitio in grad. 20. 36. Piſc. Itemque in 20. 36. Virg. quod ſanè utrùm futurum ſit, ſequentes anni docebunt. Ipſe hactenus in 20. Virg. obſervavit, in aliis punctis non vidit, nec eſt, quod aliorum obſervationes adducat, quibus fidem omnem detraxit, ac proinde illi ſuffragari non debent. Unum, quod habet, omittere ſtatueram; ſed quandoquidem in mentem venit, ſaltem indicabo; dicit enim, Saturni globum circumagi quodam vertiginis motu; ſed hoc tantummodo divinat, non probat; licèt enim Sol hoc vertiginis motu gaudeat, quod probari ſolet ex maculis: inde tamen nemo rectè deducat, hunc motum reliquis planetis competere. Hoc ii præſertim inſinuare & inculcare non ceſſant, qui globo terraqueo motum adſtruunt; ſed fruſtra, cùm Lunam hoc vertiginis motu non agi, certiſſimum ſit: quod certe non dico, quaſi hic vertiginis motus in Saturno alicujus momenti ſit, quod ad rem hanc pertineat, ultrò enim fateor fieri poſſe ut prædicto motu agatur: dico tamen, ex obſervationibus huc uſque factis haberi non poſſe.

Quia verò nemini ſuam laudem ereptam velim, admitto & oſculor alia multa ab Hugenio tradita, cum veritati apprimè conſentiant. 1. planum illud, in quo videntur eſſe ſatellites, æquatoris plano parallelum rectè judicat: hoc jam indicarat cum aliis Galilæus; & facilè crediderim, licèt autor nullam hujus rei rationem adducat. 2. Anſas illas hinc inde ſemper æquales eſſe contendit; jure quidem: licèt enim fortè aliquando altera longior viſa ſit, alterius tamen cujuſpiam per accidens adjuncti extrinſecus, acceſſio illa facta eſt. 3. vult, Lunam quandam eſſe Saturniam, (ſic enim vocat, licèt propriè loquendo Luna non ſit, cùm circa Saturnum ſuum orbem non agat) ſupremum ſcilicet omnium ſatellitem, ad inſtar ſtellulæ ſæpe à ſe obſervatum, modò ad ortum, modò ad occaſum, modò conjunctum Saturno, cujus primus ille inſpector fuit, in quo ſanè maximam laudem meretur: ego quidem cùm jam anno 1657. de hoc aliquid inau-

diiſ-

diiſſem à clariſſimo viro Michaele Angelo Riccio, eodemque nobiliſſimo hujus temporis Geometra: Eundem ſæpe obſervavi à 30. Junii ad 20. Julii, ſcilicet die 30. Junii hora 2. noctis juxta horologium Italicum, id eſt 2. horis cum dimidia poſt ſolis occaſum, illum obſervavi ad ortum Saturni; item 2. Julii, 4. 9. 12. eadem hora, die 14. non apparuit; die 20 ad occaſum viſus eſt. Ad prædictas obſervationes adhibui teleſcopium 36. palmorum. Cur verò ab aliis Luna illa Saturnia obſervata non fuerit ante Hugenium, non quidem teleſcopiorum vitio, ſed vel inadvertentiæ, vel nimiæ ejuſdem à Saturno diſtantiæ, vel parvitati, vel conjunctioni tribuendum eſt. 4. Anſæ Saturni nunquam mihi viſæ ſunt una vice acutiores, alia obtuſiores; majores tamen ſeu latiores aliquando eſſe comperi. Quod autem ſæpè ac ſæpius inculcat, prædicta omnia explicari non poſſe, niſi annulus ab eo excogitatus Saturni globum circumdet, pace illius dixerim, à veritate alienum eſt; non deſunt alii modi, quibus res iſta facili deſignatione exponatur: præ cæteris, mihi ſatis arridet illa ſyſtematis Saturnii ratio, quam P. Honoratus Fabri Societatis Jeſu vir mihi maxima familiaritate conjunctus excogitavit, cujus breve ſchema ſubjicio.

Supponit. I. terram immobilem in centro mundi, circa quam cæleſtes globi ſuos gyros agunt; hanc enim ſententiam mordicus defendit, ut catholicis decretis, ſacris literis, obſervatis phænomenis, ac rectæ rationi probè conſentientem. II. Motum realem Saturni æqualem eſſe, apparentem verò inæqualem; abhorret enim hominis intellectus, ut vel ipſe Copernicus prudenter monet, à reali motuum inæqualitate. III. Supponit, motu æquali, æqualibus temporibus, æqualia ſpatia decurri, reali ſcilicet, ſeu recta, ſeu curva; ac proinde majorem orbem tardiùs, minorem citius, eodem motu deſcribi. IV. Supponit, motum circularem diurnum ab ortu ad occaſum. V. motum rectum ab apogæo verſus perigæum, & viciſſim; acceleratum quidem, ab utroque termino ad mediocrem diſtantiam, quæ lineam apogæum, & perigæum connectentem bifariam ſecat; retardatum verò à mediocri diſtantia

tia ad utrumque terminum; hunc autem primum motum rectum vocat. VI. Supponit alium motum rectum, ſecundum ſcilicet, ac declinationis ab Auſtro ad Boream, & viciſſim; fines porrò diverſi ſunt in diverſis planetis, pro diverſa declinatione maxima cujuſlibet planetæ; eſt etiam hic motus eodem modo acceleratus, & retardatus, quo prior; & mediocris diſtantia eſt in æquatore: ex his tribus motibus, Saturni motus componitur; vel potiùs eſt motus quidam ſimplex circulari affinis, prædictis duabus determinationibus inſtructus; vel, ut ajunt Scholaſtici, modificatus; primus motus brevior eſt; ſecundus diuturnior; cujus ſanè diſcriminis cauſam affert. Sed ut rude aliquod ſchema exhibeam, omiſſo ſecundo motu recto, ſit centrum mundi B. hic terram collocat immobilem. Sit G B diſtantia Saturni apogæi; B O diſtantia perigæi; B P diſtantia mediocris, Saturnus circulum, vel orbem radio G B tardius percurrit, quàm Stella vel punctum primi mobilis, cui reſpondet; citius verò percurrit orbem radio B O, & æquè citò radio B A minore mediocri diſtantia B P. His præmiſſis, ſit Saturnus in apogæo G, reſpondens puncto C primi mobilis, vel initio arietis v. g. & ſupponatur punctum C per S deſcribere ſuum circulum, motu diurno; item Saturnus in G ſuum, per R, ſcilicet versùs occaſum; punctum C citiùs abſolvit ſuum gyrum, quàm Saturnus; igitur Saturnum à tergo relinquit, versùs ortum, ſcilicet in aliquo puncto curvæ G H; nempe primo motu recto, à circulo apogæi L R ſenſim deſcendit ad circulum perigæi Z X, donec tandem multis orbibus actis, perveniat in H, & reſpondeat puncto E primi mobilis, v. g. 20. gradui Arietis: toto illo tempore, moveri dicitur in conſequentia; id eſt, juxta ſeriem ſignorum, initio quidem, motu accelerato; & ſub finem, retardato; in H ſtare videtur: hîc enim æquè citò ac punctum E ſuum gyrum agit: Quia verò adhuc deſcendit versùs perigæum, decurrit deinceps ſuos orbes citiùs, quàm puncta primi mobilis, quibus reſpondet; ac proinde illa relinquit à tergo, versùs ortum ab H quidem, ad perigæum I: ab I verò, ad K; hinc videtur regredi ab E ad D,

TAB. LI. fig. I.

D, quæ ſunt puncta primi mobilis; idque motu retardato, circa H & K, id eſt, circa puncta ſtationum, accelerato verò, hinc inde circa I. hinc duplex ſtatio, in punctis ſcilicet E & D. hinc regreſſio, vel motus retrogradus brevior directo; quia radius circuli æquè diuturni (ſic eum vocat, quem planeta æquè citò conficit, ac punctum primi mobilis ſuum) eſt brevior, radio mediocris diſtantiæ B P. ex his ſequitur latitudinis mutatio ſingulis ferè diebus: ſed hæc rudi Minerva deſcripſiſſe ſufficiat; ex quibus omnia Saturni phænomena, nullo ferè negotio, per cauſas phyſicas explicat. Jam ad ſatellites Saturni orationem converto. Quinque Fabrius agnoſcit; minimus & ſupremus omnium eſt quem Hugenius, primus opinor, ſub aſpectum hominum adduxit, quemque, ut dixi, ab illuſtriſſimo, & doctiſſimo Riccio certior factus, adhibito 36. palmorum teleſcopio, an. 1657. per multos dies, menſe Julio conſpexi, ortivum modò, mox occiduum; dicta autem die non comparuit, quia conjunctus Saturno erat. Hic ergo ſupra Saturnum eſt, & dum in perigæo verſatur, citiùs ſuum orbem abſolvit, quàm Saturnus ſuum, quando eſt in apogæo, tardiùs; & æquè citò in mediocri diſtantia, æquè ab utroque termino diſtante: hinc aliquando Saturnus illum à tergo relinquit, aliquando ille Saturnum; hinc aliquando ortivus, aliquando occiduus, aliquando latet in conjunctione; à conjunctione apogæi, ſemper ortivus; à conjunctione perigæi, ſemper occiduus; quid plura? in Mediceis appoſitam analogiam habemus.

TAB. LI. fig. 2. Alii quatuor inferiores ſunt, Saturno licèt ſuperiores, quorum ſyſtema ſic Fabrius explicat: Sit centrum terræ, & mundi A, Saturni diameter G C, centrum B, ducta cenſeatur recta A B P; ſint duo N H, S D, in maxima digreſſione N H ortiva; S D occidua, hinc inde æquali; in qua ſit illorum ſtatio; & mediocris diſtantia A I; hoc loco, diametros dumtaxat pro globis exhibeo: tendat autem N H versùs perigæum; & S D, versùs apogæum, pari greſſu, & paribus intervallis, ita ut hic apogæum, & ille perigæum ſimul attingant; iſtud eſt inter B I, illud verò inter I O. tunc uter-

uterque ſimul erit in cunjunctione, alter perigæi, alter apogæi, ſed paulò poſt N H à perigæo aſcendit ad maximam digreſſionem occiduam S D, & S D ab apogæo deſcendit ad maximam digreſſionem ortivam N H; atque ità deinceps, repetitis ac reciprocis recurſibus: idem prorſus dictum ſit de duobus K L, K E, quorum mediocris diſtantia communis eſt in O; perigæum commune inter O I; apogæum ſupra O, æquè diſtans; maxima digreſſio ortiva K L, occidua R E; eſt autem digreſſio iſtorum, qui ſuperiores ſunt, major digreſſione illorum, quos inferiores eſſe ſupponit; ſuperiores appellat lucidos, inferiores obſcuros; lucidi conſtant ex materia aptiſſima ad repercuſſionem luminis; obſcuri verò, ex ineptiſſima, ad eundem finem; nec difficile fuit auctori naturæ, hujuſmodi materiam invenire, cùm etiam in hoc ſublunari tractu hujuſmodi habeamus: mediocris diſtantia in utriſque ab apogæo, & perigæo æquè diſtat: vult etiam idem Fabrius, quinque ſatellites ejuſdem eſſe cum Saturno declinationis, ac proinde ſemper in eodem plano eſſe æquatori parallelo: quod facilè obtinetur, modò ab initio eandem declinationem habuerint, eundemque ſimul inierint declinationis motum, in eodem ſempèr plano æquatori parallelo ſiti: nec eſt, quod quiſquam miretur, quinque ſatellites Saturno adeſſe, cum Jovi quatuor adſint, Soli duo, Terræ unus, Marti fortè tres, quis ſcit, nondum explorati; quia à Martis globo longius digrediuntur, quàm Medicei à Jove; non tamen tam longè, quàm Venus aut Mercurius à Sole; vult demum, obſcuros citiùs ſuam revolutionem abſolvere, & lucidos tardiùs; cujus rei analogiam habemus in Venere, & Mercurio.

His poſitis, omnes Saturni phaſes, omnia phænomena facilè omnino explicantur. Solus Saturni globus ſuis ſatellitibus aliquando deſtitutus apparet, ſcilicet figura ſphærica; nec enim alia cæleſtibus corporibus indita eſt: hujus phænomeni ratio ex eo petitur, quòd duo lucidi (de primo enim omnium ſupremo hoc loco non agitur) vel ſint conjuncti, id

 eſt,

eſt, alter in apogæo, alter in perigæo, vel ab obſcuris penitùs tecti, etiam extra conjunctionem:

II. Duo lucidi aliquando videntur à globo Saturni omnino ſejuncti, & figuramſ phæricam præferentes; hoc ipſum toties accidit, quoties duo obſcuri in conjunctione verſantur, alter ſcilicet in apogæo, alter in perigæo, & lucidi hinc inde digreſſi.

III. Aliquando lucidi apparent, quaſi lucidæ anſulæ eſſent, vel Lunæ falcatæ; hoc evenit quando obſcuri ſunt quidem interpoſiti, non tamen integrum lucidorum diſcum tegunt.

TAB. LII. IV. Hinc modò plus, modò minùs diſci lucidi ab obſcuris tegitur; unde diverſa phaſis, & diverſa figura; neque hoc teleſcopii vitio Hugenius tribuere debuit, cùm alioqui optima ab authoribus, quos citat, adhibita fuerint; Galilæo ſcilicet, Scheinero, Ricciolo, Hevelio, Gaſſendo, quorum figuræ ab Hugenio excuſæ, in hac hypotheſi, nullo negotio demonſtrari poſſunt; undecima tamen inter alias Fontanæ fabulas referenda eſt; decima tertia, quæ caret auctore, modò tantulùm reformetur, fortè ſuo modo explicari poſſet, in aliquo caſu; ſeptima Hevelii fictitia eſt; ſphæroidem eſſe putavit, ſed hæc figura cæleſtibus globis minimè competit; niſi fortè dicamus Saturnum ellipticum videri, quando obſcuris in conjunctione ſtatutis, lucidi tantulum à conjunctione recedunt, tunc autem anſulæ non apparent.

V. Veriſimile eſt, obſcuros æquales eſſe lucidis; nihil enim probat, vel majores, vel minores eſſe, æquales igitur cenſendi ſunt, dum aliquid probet inæqualitatem; immò potiùs æqualitas ex ipſis phaſibus perſuadetur, quartæ ſcilicet figuræ, quintæ, ſextæ, octavæ &c. Arcus enim falcis lucidæ, cavus ſcilicet, & convexus æqualium circulorum eſſe videntur.

VI. Linea, vel diameter anſas lucidas connectens, quæ per medium globi Saturnii centrum duci videtur, eſt ſemper

per in plano parallelo plano æquatoris; quia cùm ſatellites Saturni ejuſdem ſemper ſint cum eo declinationis & motu ſemper æquali in aliquo parallelo moveantur, motus enim diurnus ab ortu ad occaſum in aliquo parallelo fieri cenſetur, quid mirum, ſi linea eorum centra connectens in eo plano ſit, quod plano æquatoris parallelum eſt; dixi, *quæ per centrum Saturni duci videtur*, quia revera licèt Saturno ſuperiores ſint, oculus tamen judicat, ejuſdem altitudinis eſſe; ac proinde in eadem linea cum Saturno.

VII. Licèt ſupremi ſatellitis motus ab Hugenio definitus ſit, utpote qui 16. circiter dierum ſpatio abſolvatur, quanquam obſervationes à me factæ tantulùm refragantur; non tamen huc uſque quatuor inferiorum motus, vel ab eo, vel ab alio quopiam definitus eſt, qui tamen ex futuris obſervationibus haberi poſſet.

VIII. Turbinatio Saturni, vel illius annuli fictitii nulla obſervatione probatur, ut jam indicavi; licèt enim ſol hoc vertiginis motu agatur circa ſuum centrum, ut evincitur ex illius maculis; aliis tamen planetis nulla hujuſmodi, vel alia quæpiam probatio ſuffragatur.

IX. Illa brachia oblonga quæ Hugenius Saturno annexa obſervavit annis 1655. & 1656. ſunt omnino fictitia, & vitio teleſcopii tribuenda: cur enim alii non obſervaſſent? præſertim cùm teleſcopium ad hunc finem ab eo adhibitum brevius eſſet, ac proinde non melioris conditionis quàm alia.

X. Figuræ ab illo excuſæ, & rejectæ facilè explicari poſſunt in hac Fabriana hypotheſi: 1ª quidem lucidis in maxima digreſſione, & obſcuris in conjunctione exiſtentibus; 2ª verò, lucidis tangentibus Saturni globum, & obſcuris in conjunctione poſitis; 4ª lucidis in maxima digreſſione poſitis, & obſcuris tantulùm extantibus; ita ut modicam lucidorum portionem tegant; 3ª. eadem eſt cum 4ª. ſed teleſcopii vitio, in mucronem ivit, cùm in con-

vexum ire debuiſſet; 5ª, & 6ª. lucidis non totis extantibus, & majori ex parte tectis ab obſcuris, tunc enim reſtat quaſi falcula, differt autem 5ª à 6ª ſecundùm plùs, & minùs; 7ª, ut dixi, fictitia eſt; cùm Saturnus ſphærois non ſit, niſi fortè eo modo, quem ſupra num. 4. expoſui; 8ª lucidis inter maximam digreſſionem, & Saturni globum exiſtentibus, tectiſque ex parte, à minore portione obſcurorum; tunc enim falces majores ſunt; latiores quidem, quò propiùs ad maximam digreſſionem accedunt; anguſtiores verò, quo Saturnio globo propiores fiunt; 9ª & 10ª ab octava tantummodo differunt, ſecundùm plus, & minùs; ſunt enim multæ combinationes; quas habes in duobus circulis ſeſe invicem ſecantibus; tres ultimas fictitias reputo; niſi fortè 12ª ad 10, reducatur itemque 13ª de qua infra.

XI. Anſa una non longiùs extenditur, quàm alia; hinc æqualis eſt utriuſque lucidi digreſſio; quia uterque communi apogæo & perigæo gaudet, & æquali motu movetur; item obſcuri eodem apogæo & perigæo gaudent; ex his, perfecta anſarum & brachiorum æqualitas neceſſariò ſequitur.

XII. Anſulæ videntur, quando portio lucidorum ab obſcuris tegitur; nempe ſunt quædam quaſi aperturæ nigræ, quas lucida corona cingit; hæ ſunt anſulæ; brachia verò, quando lucidi tangunt globum Saturni, obſcuris in conjunctione exiſtentibus.

XIII. Anſulæ eò longiùs porriguntur quo propiùs lucidi ad maximam digreſſionem accedunt; obſcuris ſcilicet lucidorum partem tegentibus.

XIV. Anſulæ eò patentiores ſunt, quò major obſcurorum portio extra Saturnum extat, lucidis in maxima digreſſione conſtitutis; anguſtiores verò, cum minor obſcurorum portio extat.

XV. Anſulæ latiores ſunt, quando minor obſcurorum portio tegit lucidos, in maxima digreſſione poſitos.

XVI.

XVI. Anſularum brachia ad ipſum uſque Saturni globum excurrunt, quando minor obſcurorum portio lucidos tegit.

XVII. Anſulæ à Saturni globo ſunt prorſus avulſæ atque ſejunctæ, quando major obſcurorum portio lucidos tegit.

XVIII. Anſulæ ſenſim contrahuntur, quando à digreſſione lucidi recedunt, & obſcuri ad digreſſionem accedunt.

XIX. Quando anſulæ latiores & majores ſunt, ipſe Saturni globus illuſtrior apparet, quia lumina quaſi communi quodam niſu & illapſu oculum feriunt; ſic multi ignes ſeorſim poſiti, actione quadam communi, plus calefaciunt, ac proinde majoris lucis vim diffundunt.

XX. Anſulæ ſenſim dilatantur & augentur, quando lucidi ad maximam digreſſionem accedunt, & ab illa obſcuri recedunt.

XXI. Primus ille Saturni comes ſub Saturno aliquando ponitur ab Hugenio, qui vult, illum circa Saturnum moveri; hoc tamen veritati repugnat; ſi enim ſub Saturno eſſet, prædictas anſularum phaſes omnino turbaret: Idem dico de Mediceis, ſeu Jovialibus; igitur & Jovialia ſupra Jovem, & Saturnia ſupra Saturnum collocata fuere.

XXII. Si quando accidat, ut primus ille Saturni comes extremitati alterius anſulæ adhærere videatur; nihil enim obſtat, talem illius poſitionem eſſe poſſe; hæc anſula paulò alterâ longior eſſe videbitur.

XXIII. Immo ſi caſu aliquo ſtellula quæpiam alterius anſæ extremitati adhæreat. Figuræ 13ª. phaſis aliquo modo ſalvabitur, modò anſarum forma emendetur; hæc enim trigona non eſt, ſed convexa; ut jam dixi, de 3ª. figura: omitto alia, quæ ex his facilè deducentur.

HÆC ſunt, Sereniſſime Princeps, quæ de Hugeniano Syſtemate tibi inſcripto ad te ſcribenda, & ne probandi mo-

modum deſiderares, teleſcopium triginta ſex palmos longum, unâ mittendum eſſe putavi; ut & rationes noſtras, ingenii, quo ad ſtuporem polles, & obſervationes, oculorum acie, accedente teleſcopii operâ, explorare valeas: facilè, ni fallor, judicabis, utri potiùs habenda fides ſit; & an noſtra teleſcopia Hugenianis deteriora ſint: quidquid ſit, ſi hæc opella mea tibi grata acciderit, faciam aliquando ut aliquid majoris momenti ad perennem obſervantiæ meæ teſtificationem Sereniſſimo tuo nomini inſcribatur.

FINIS.

Christiani Hugenii Zulichemii

BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII

BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

SERENISSIME PRINCEPS,

Vidiſti quæ adverſus ſyſtema meum Saturnium Romæ ſunt edita, utque ſub uno nomine gemini mihi adverſarii exorti ſint. Etſi enim Euſtachius de Divinis libelli iſtius Annotationum autor inſcribitur, eum tamen adjutum fuiſſe opera P. Honorati Fabrii nec Celſ. T. ignorat, & ego, hoc agi, jam pridem ab amicis fueram admonitus. Crediderام hoc ipſo futurum ut ſubtiliora quædam, non mihi prævifa, éque profundiore Aſtronomiæ ſinu depromta, objicerentur; tum vero ea civilitate & verecundia, quæ viro humanioribus ſtudiis dedito conveniret. Sed omnino ſpe deceptus ſum, cum nihil aliud quam obſervationes meas temere impugnari videam, quas pleraſque in dubium vocant, præterque veritatem mihi confictas eſſe ſa-

tis apertè criminantur. Facile autem, ut ſpero, tam indignam à me ſuſpicionem repellam, nec multis ad hoc opus eſſe, coram C. T. cauſam agenti, exiſtimo; cujus ſumma æquitas cum pari judicii perſpicacitate conjuncta eſt.

Primus præcipuuſque adverſariorum conatus eſt, ut vitra ſua tuboſque opticos nihilo meis inferiores eſſe demonſtrent; quod ubi egregiè ſe confeciſſe arbitrantur, inde porro, nihil me in cælo deprehendere potuiſſe, quod non & ipſi viderint, concludunt. Quod ſi autem phænomena ipſa Saturni, quæ adduxi, vera non ſunt, vana utique & Hypotheſis erit, qua viſorum eorum quæ nuſquam ſunt cauſas exponere ſuſcepi.

Teleſcopiorum ſuorum comparationem cum noſtris inſtituere aliquatenus ut poſſent effeci, tradita accuratiſſima meorum deſcriptione; veruntamen quod præcipuum eſt omnium, præſtantia vitrorum quæ ab exacta formatione proficiſcitur, hanc ſcire debent nulla deſcriptione, ſed effectu demum ipſo probari poſſe: Ideoque etſi & longiores paulo noſtris tubos, & vitra amplius patentia fabricarint, non idcirco meliora ex his teleſcopia ſeſe compoſuiſſe exiſtiment. Oportet nempe, quæ pari bonitate cum noſtris futura ſunt, ut & longitudine illis æquentur, & vitrorum non minore apertura gaudeant; at non ideo quæcunque ſic ſe habuerint, eâdem virtute pollent, aut illis æquiparanda ſunt.

Ut igitur reipſa & effectu concedere noſtris Diviniana teleſcopia comprobem, certiſſimum argumentum mihi petere poſſe videor à Saturnio illo comite ſive luna, quæ ſexdecim dierum ſpatio circa eum revolvitur. Hanc primum omnium mihi conſpectam eſſe liquet, neque id Euſtachius cum ſibi ſuccenturiato P. Fabrio denegat. Quod autem nec aliis nec ſibi antea animadverſa fuerit, in cauſa fuiſſe ait *vel inadvertentiam, vel nimiam comitis à Saturno diſtantiam, vel parvitatem, vel conjunctionem.* Sed vana effugia hæc eſſe quis non videt? Cum enim jam ab anno 1646 & ultra fortè Saturni phaſes deligenter reſpicere cœperit, teleſcopio è convexis vitris compoſito, quo ſemper Saturnum ſimul & comi-

mitem hunc, licet triplo longius recederet comprehendi neceſſe erat, quænam illa fuit *inadvertentia* qua fiebat ut nunquam ei in oculos incurreret? cur non eadem mihi quoque illum ſubducebat, nihilo magis admonito? Quin etiam hinc patet non bene prætexi magnam à Saturno diſtantiam, cum quoties ad hunc reſpiceret, ſimul ante oculos ſeſe ſiſteret comes ejus. Et ſanè diſtantia illa vix tria prima ſcrupula excedit, cum Medicei planetæ omnes longius à Jove evagentur, extimus etiam ſcrupulis quatuordecim. Parvitas ergo illum occuluit. At hoc idem eſt quaſi fateatur ſuis illum organis detegi nequiiſſe: certe enim nimium exilis erat, at mihi nequaquam.

Poſtea tamen edita obſervatione mea, cum à Clariſſimo Viro Mich. Angelo Riccio eſſet admonitus, vidiſſe ſe ſtellulam hanc affirmat, indicans etiam quo ad Saturnum ſitu, & quoties illam obſervaverit. Verum cum diligentius haſce obſervationes examino, invenio profecto non optima fide eas commemorari; ſed adeo miſere vereri Euſtachium ne bonitatem noſtrorum teleſcopiorum non aſſecutus putetur, ut quæ nunquam in cælo vidit, aut per rerum naturam videre potuit, tamen ſibi viſa incogitanter aſſerat. Quod ut appareat, periodus primò Saturnii comitis expendatur, quam 16. circiter dierum eſſe, ex obſervationibus meis, toto triennio continuatis (niſi & has confixiſſe dicar) manifeſtum feci: ſed eſto tantùm ea veræ proxima ſit, quoniam ſuas obſervationes *tantulum refragari* Euſtachius ſcribit. Die igitur 30. Junii, anno 1657. horis $2\frac{1}{2}$, poſt ſolis occaſum, item ſequentibus diebus 2, 4, 9, 12, Julii, ad partem orientalem Saturni animadverſum ſibi comitem ait; 14° non apparuiſſe. Die 20 ad occaſum fuiſſe ſitum; utrum in maxima, mediocri, an minima diſtantia apparuerit nuſquam addit. Certe equidem tribus prioribus harum obſervationum, ad occaſum revera poſitus erat, ut ex tabulis colligo. Sed putemus inverſionis teleſcopii rationem non habuiſſe Euſtachium, atque ita ſicut ei videbatur, ſi tamen viſus eſt, orientem ſpectaſſe comitem rectè dixerit. At die 9 & 12 Julii, quibus

ſibi orientalem itidem apparuiſſe aſſerit, omnino ad occaſum tranſierat, ac rurſus 20. Jul. ad ſatus orientale, cum Euſtachius ab occiduo ſibi repertum ſcribat.

TAB. LI. fig. 3. In figura appoſita clarius hoc liquebit; in qua circulus A B orbitam Lunæ Saturniæ exhibet, in 16 partes diviſam, ipſaque A B rectam ad nos obverſam. Die igitur 30 Jun. 1657, hora 10 veſp. invenio locum comitis grad. 207. 16′ ab apogæo A, methodo ſcilicet ea quam in Syſtemate Saturnio tradidi. unde prope num. 10 conſtitiſſe debuit, paulo tantum citerior. Atque hinc porro in ſingulos dies ſingulas circuli partes numerando, ſequitur die 2 Jul. ad num. 12. progreſſum eſſe. Item 4. Jul. ad num. 14. Inde poſt dies 5, nempe 9 Jul. ad num. 3. Ac porro 12 Jul. ad num. 6. Et denique 14 Jul. ad num. 8. qua die recte divinavit conjunctum Saturno fuiſſe. Reliquis verò plane infeliciter. Si enim ad num. 10, 12, 14, orientalis ſpectatus fuit, neceſſario ad num. 3 & 6 occidentalis factus eſt. Nec quidem ulla ratione ad num. 14 & 6, qui è diametro ſibi oppoſiti ſunt, idem latus Saturni obtinere poterat, uti Euſtachii obſervationes poſtulant. Denique cum 20 Jul. ad num. 14 reverterit, ubi & die 4 Jul. inveniebatur, quomodo evenit quæſo, ut, qui tunc ad orientem, idem nunc, quamvis eodem loco, ad occidentem comparuerit? Etiamſi mea periodus vera non eſſet, quænam tamen illa Euſtachii fuerit oſtendi mihi velim, paululum diſcrepans, qua ſua hæc viſa tueatur. Debuerat ſane hîc, ſi uſquam, Fabrius illi opem tuliſſe; ſaltemque perpendiſſe an ſtare ullo modo iſtæ obſervationes poſſent: aut, ſi nobis imponere vellet, quotlibet duntaxat novas è tabulis meis concinnaſſe. Nam quas nunc adferunt, facile nimis deprehenditur, ideo tantum productas fuiſſe, ne nihil vidiſſe exiſtimentur.

Credo & faſciam nigricantem in Saturni diſco, liquido ſibi conſpici dixiſſet Euſtachius, ni Fabrio viſum fuiſſet eam nimium hypotheſi meæ annulari favere. Cum autem ne optimis quidem ſuis perſpicillis eam cerni affirmet, hinc quoque quanto illa meis deteriora ſint perſpicuum fit. Nam ne mihi

mihi phænomenon illud confictum credatur, idem & in Anglia pridem obſervari cœpiſſe ſciendum eſt; ut liquet ex literis Viri Clar. Joh. Walliſii, Oxonia ad me datis 22. Dec. 1658. quibus inter alia hæc ſcribit. *Monebam etiam eiſdem literis* (nempe datis 29 Maji, 1656) *de Saturni faſcia quam jam ante obſervaverat D. Ball, & ſciſcitabar num tu eandem conſpexeras*, &c. Eam porro faſciam à 5 Febr. 1656 ad 2 Jul. quo tempore rotundus Saturnus abſque anſis apparuit, medium Planetæ diſcum ſecare D. Ball. adnotavit, ut in ſchemate ad me miſſo expreſſa eſt. Atque ita mihi quoque fuerat eo tempore obſervata, ut cernitur pag. 544 ſyſtematis Saturnii, quam figuram hîc repeto. Poſtmodum TAB. LI. fig. 4. tamen renatis Saturni anſis cum difficillimè conſpici eadem faſcia cœpiſſet, minus rectè quoque à D. Ball, quantum ad ſitum attinet, depicta eſt. At in mearum obſervationum adverſariis, die 26 Nov. 1656, & alias adſcriptum invenio, lineam obſcuram fuiſſe evidentiſſimam, eo nempe poſitu qui pag. 545, Syſtem. Saturnii memoratur. Neque id monere neglexiſſem, obſervationes eas recenſens, ſi quicquam profuturum putaſſem apud illos qui me data opera lectores fallere voluiſſe ſuſpicarentur. Difficillime autem, ut dixi, tractus hic obſcurus deinceps cerni cœpit, imo vix jam amplius animadverti poteſt; quod & ſyſtemati meo conſentaneum eſt, quippe magnâ jam annuli Saturnii inclinatione; ad quam accedit, quod & anſarum ſplendor, duplo quam alias lucdiorem Saturnum efficiens, oculorum aciem nunc magis impedit.

Qualia igitur ſint Diviniana teleſcopia cum noſtris collata, ex his quæ dicta ſunt, cuilibet manifeſtum opinor. Eadem verò & Anglicanis viliora eſſe alia præterea ratione oſtendam, quo minus dubitetur phænomena ea vera eſſe, quæ pariter cum Anglis ego obſervavi. Nam & illa quæ ad anſatas Saturni phaſes attinent, teſtimonio illorum confirmaturus ſum. Vir quidam nobilis ex Gallia, eruditus, acerrimique ingenii, qui Romæ teleſcopia apud artificem iſtum viderat, hoc ipſo anno 1660, ſuper iis hæc ad me ſcribit. *Il*

me

me monſtra les plus beaux de ſes teleſcopes, qui paſſent au de la de 30 pieds; & nous les comparames avec un de ceux de la methode du Chevalier Neal, qu' on a envoyé au Cardinal Ghiſi; il n' a garde de ne tirer l' avantage de ſon coſté, mais ſans mentir il ſe trompe lourdement.

Et meliora igitur Romanis eſſe, illa quæ ex Anglia deportata erant, judicat is qui coram comparationem utrorumque inſtituit, & Euſtachium tamen obſtinate hoc pernegare teſtatur, adeo ut ſi jam mea Romam deferam, nihil apud illum quidem ſim profecturus. Quid autem huic homini facias, aut quis hæc videns non merito exiſtimet, uſque adeo privati compendii cura eum duci, ut quid verum ſit diſcernere aut non poſſit aut nolit?

Non ægre nunc fidem habitum iri ſpero, tum mihi tum Anglis ſimul obſervatoribus, qui anno 1657 oblonga Saturni brachia diſco utrinque conjuncta ſpectavimus, qualia exhibet figura Syſtematis mei pag. 545. quam hîc repono; non autem binorum orbiculorum formâ à medio diſco disjunctorum, ut Euſtachius ſe illa eodem tempore vidiſſe dejerat.

TAB. LI. fig. 5.

Adderem hîc ſchema quod mihi à D. Ball, ſuprà memorato, advenit, niſi planè ſimile eſſet huic noſtro, hoc uno tantillum duntaxat abludens, quod brachia illa ubique paulo craſſiora ille referat.

Eam vero formam à 5 Nov. 1656, ad 9 Jul. 1657 ſibi apparuiſſe ſcribit. Apertis autem brachiis, qualis pag. 547. Syſtematis mei & hîc repræſentatur, talem à 9. Nov. 1657 ad 7 Jun. 1658, idem obſervator depingit, ſimillima prorſus figura, niſi quod ad poſitum zonæ obſcuræ attinet, de quo dixi ſuprà. Ac denique à 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejuſdem anni, anſis paulo latius adhuc apertis. Et hæc quidem ille, ignarus adhuc meæ hypotheſeos, ne ob præconceptam opinionem aliquid indulſiſſe ſibi exiſtimetur. Neque ego aliter iſta quam ſe revera habent referre auderem, cum redarguere me, ſi fallam, autori obſervationum in promptu ſit.

TAB. LI. fig. 6.

Quænam igitur illa ſunt Euſtachii perſpicilla palmorum 24, quibus rotundi globuli rectorum loco brachiorum cernebantur?

TAB. LI.

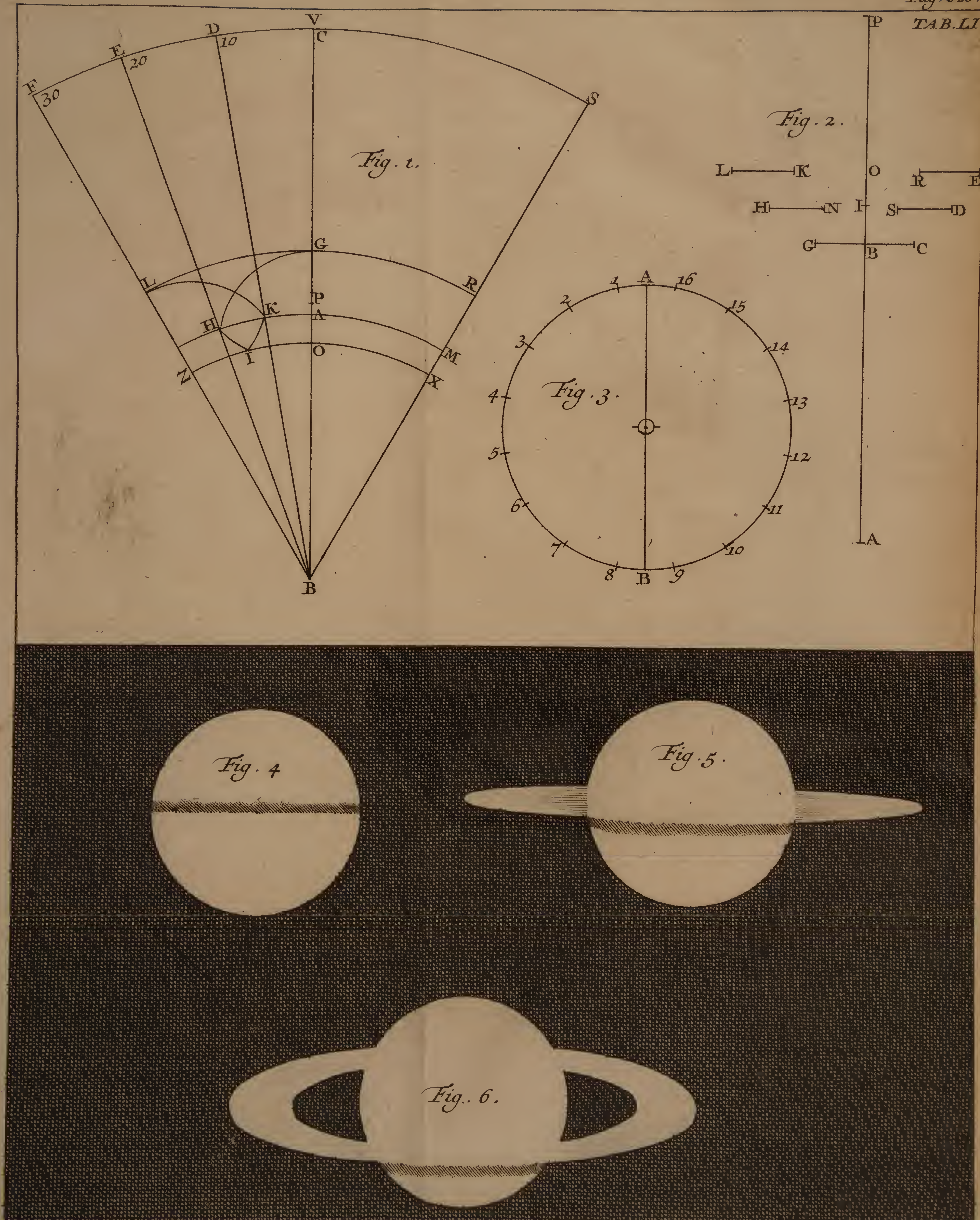


Fig. 1.
V C D E F S G L R P K H A I O M Z X B
10
20
30
Fig. 2.
P O L K R E H N I S D G B C A
Fig. 3.
A B
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.

tur? Imo etiam loco anſarum jam adapertarum, quales in ſyſtemate meo pag. 546. Etenim & anno 1658 globulos tantum ſibi viſos ait, quales in Fig. 1. iſtarum tredecim tabellæ LII. Quid teſtes citat qui ſecum iſta obſervaverint? Quos equidem fide digniſſimos eſſe cenſeo, quæque viderint ingenuè faſſuros, ſed eo ipſo mihi videntur de teleſcopiorum illius vitio & ineptitudine teſtimonium perhibere. Mallem aliquos adduxiſſet qui ſecum Saturni comitem obſervaſſent.

Globulorum formâ mihi quoque brachia apparuiſſe dixeram, quoties 5 aut 6 pedum tubos adhibuiſſem. Hiſce igitur rectiſſime ea, atque uti debent, mihi cerni arbitratur; cum vero oblonga ac Saturni diſco affixa, tubo 23 pedum referuntur, falſa imagine me deludi, idque teleſcopii culpa contingere. Nimirum perſuadere mihi vult exigua illa omnium maximis præferenda eſſe, quaſi ne hoc quidem diſcernere adhuc didicerim. Sed jam ſatis ſuperque, quid de meis teleſcopiis obſervationibuſque, quidque de Euſtachianis exiſtimandum ſit, me oſtendiſſe arbitror. Nec tamen quæ dixi in damnum illius cedere velim, ſed potius ſtimulos addere, quò magis magiſque incumbens, ſua ipſius primo, deinde & noſtra teleſcopia ſuperet. Adeo enim non invideo his qui artem adeo egregiam promovere nituntur, ut decreverim etiam cuncta quæ circa eam mihi comperta ſunt, ſed & præcipue quæ ad theoriam Dioptrices ſpectant, propediem in lucem emittere: quod vel ideo mihi faciendum video, ut de veritate obſervatorum quæ in Saturni ſyſtemate protuli, plures inquirere poſſint, monſtrata arte qua ſibi paria noſtris perſpicilla parent.

Cæterum unicum etiamnum diſcutiendum reſtat Euſtachii phænomenon, quo vel ſolo Syſtema meum univerſum corruere dicitur. Eſt autem rurſus de genere eorum quæ non tantum non extant, ſed ne quidem per rerum naturam apparere ullo modo poſſunt: quod, ſi non vitrarius artifex, at P. Fabrius certè animadvertere debuerat. Ajunt ſpatia illa bina, cavitate anſarum intercepta, nigriora reliquo cælo in-

veniri; cum contra, ex hypotheſi mea, cælum ipſum ſit quod trans aperturas eas conſpicitur. Ego vero quæram ex Fabrio, qui fiat ut cælum omne, cum vel interdiu vel noctu aſpicitur, non planè tenebroſum nigerrimumque appareat. Fateri cogetur in cauſſa eſſe vapores illos ſive atmoſphæram Terræ circumfuſam, quæ interdiu quidem à Sole, noctu verò à Luna aut ſtellis illuſtretur. Atque adeo ſi vapores ii auferantur, planè nigrum appariturum eſſe cælum, æquè ac ſpatia illa, Saturni anſis incluſa. Atqui tota atmoſphæræ illuſtratæ craſſitudo tam inter nos ac Saturnum, quam inter nos nigrumque cæli convexum interjecta eſt; ergo illius interpoſitu æque multum de Saturniarum macularum nigredine, atque de illa quæ cælum obtinet decedere neceſſe eſt; ac proinde eæ maculæ nihilo obſcuriores reliquo æthere apparere poſſunt. Quod ſi igitur nihilominus hoc ſibi videri pertendant, fateantur oportet viſus quadam fallacia id contingere, vicino forſitan ſplendore Saturni, anſarumque ſuarum, paulo obſcuriora ſpatia illa reddente, quam abſque eo appritura eſſent. Quanquam mihi nunquam id evenit: quinimo ejus contrarium quodammodo fieri animadverti. Dum enim anſæ exigua tantum adhuc rima paterent, veluti circa 26. Nov. 1656, contigiſſe nullus dubito, nondum nigræ lacunæ diſtincte cerni poterant, ſed tantum tenuiori luce, illa brachiorum pars, quæ diſco Saturni proxima erat, perfuſa videbatur. Qua eadem ratione & faſcia in Saturno, de qua ſuprà, paulò tantum obſcurior reliquo ejus diſco cernitur, quia nempe licèt revera nigra ſatis vel etiam nigerrima ſit, eſt tamen tenuiſſima, unde & latior ſimul juſto & dilutior ſpectatur.

Atque hinc apparet, fruſtra etiam adverſus hypotheſin meam objici, quod per eam nunquam Saturnus rotundus ſine brachiis videri poſſit; quia nempe exiguam ſaltem lucem in extrema annuli ora reliquiſſe videbar, qua futurum ſit ut non penitus viſum effugiat annulus, quanquam à latere inſpectus nec brachia proinde in totum aboleantur. Nunc enim ſciant nihil obſtare quo minus omnem lucem margini annulari adimam, neque hoc abſurdum in rerum natura ſtatui Fabrius

brius contendet, eſſe nimirum materiam aliquam quæ radios ſolares omnino non reflectat, quippe qui de quatuor novis, quos fingit, Saturni ſatellitibus, duos atros, ac per ſe inviſibiles, nulliſque ſolis radiis illuſtrandos, reliquos vero ſplendidos eſſe imaginetur. Verum hypotheſim illam jucundiſſimam poſtea videbimus; ſunt enim alia etiam prius ventilanda quibus noſtra oppugnatur.

Dixi planam annuli ſuperficiem, eam quæ nobis obverſa eſt, aliquando à Sole averſam non illuminari, unde nimirum nec cerni nobis tunc poſſit, ac proinde nullas Saturno anſulas præſtet. Quod cum certiſſima ratione fieri demonſtraverim, adverſarii mei breviter atque uno verbo negant, opticiſque regulis refelli dicunt. Quomodo tamen? Ponendo ſcilicet & Saturni diſtantiam & Solis diametrum longe quam ego majores, quo fiat ut ſuperficies dicti annuli, ad nos ſpectans, ſemper quoque à Sole lumen accipiat. Atqui ego & diſtantiam illam & diametrum (nam una alia expendet) multo majores exhibui in Syſtemate meo quam alius quiſquam omnium Aſtronomorum. Nam cum Ptolemæus & Copernicus diametrum Solis, tantum 5 Terræ diametris taxent; Ariſtarchus & Bullialdus 7; Ricciolus 33; Wendelinus, quo pluribus nemo, 64; ipſe 111 dedi, nec ſine ratione ut puto. Et Fabrio tamen parcus fuiſſe videor, qui Solem longe majorem etiam fieri vult, ne ſtare hypotheſis mea poſſit, utque merito hanc Optices ignorantiam mihi impegiſſe videatur. Cum ipſe interim vel Optices vel Aſtronomiæ uſque adeo imperitus ſit, ut non advertat, licet centies millies majorem quam ego Solis diametrum ſtatuat, ac ſimul planetariorum orbium amplitudinem eadem proportione adaugeat, tamen diametrum illam, ex Saturno conſpectam, non niſi 3 circiter ſcrupulorum fore; atque etiamſi tanta illinc appareret quanta nobis in Terra poſitis, tamen illa quam dedi demonſtratione evinci, ſuperficiem annuli ad nos verſam, aliquando Solis lumine non illuſtrari, propterea quod planum annuli productum, inter nos Solemque tranſeat. Nam ſi hoc fieri quandoque neget, oportet ſtatuat diametrum Solis, (quod ridiculum eſt) ipſius

magni orbis diametri, in quo circa Solem Tellus defertur, ſaltem duabus quintis partibus æqualem eſſe. Hoc enim ita eſſe facile oſtendere poſſem, ſed Aſtronomi ex demonſtratione mea pag. 570 haud ægre deducent. Nam ſi planum annuli plano eclipticæ foret ad rectos angulos, non duas quintas ſed integram orbis magni diametrum dicerem; duæ quintæ autem oriuntur ex inclinatione graduum $23\frac{1}{2}$ quanta eſt dictorum planorum.

Invenio vero & Graphices inſcitiam mihi objici, quia nempe umbras quaſdam, quas in ſchemate Saturni num. 10. Euſtachius depinxit, alioqui non fuerim reprehenſurus. Eum enim accerſiviſſe quidem illas, ſed neceſſario, contendunt, ut ſphæræ formam exprimeret; quia videlicet incertum abſque iis futurum fuerit, an convexus Saturnus, an planus eſſet. Atque ego proinde ineptus, qui *de ſuo* eas umbras Euſtachium addidiſſe dixerim, quas ille ex arte, atque ita flagitante rei natura deſcripſerit. Sed enim jocari hîc libet. Nempe cum temere citra ullam demonſtrationem me ſtatuiſſe arguant, Saturnum circa axem ſuum converti, rogo nunc illos unde tam certo compererint, Saturni medium corpus globoſum eſſe? Non enim obſervatio ulla puto hoc docuit, ſed colligunt tantum ex analogia quadam inter hunc & alia quædam cæleſtia corpora, ſicut & ego de converſione circa axem. Quid igitur neceſſario umbras ad globum repræſentandum accerſere opus erat? Verum diſſimulare mihi videntur, quaſi non advertant, non adeo me de medii corporis umbra ſenſiſſe, quàm de illa quam ellipticæ figuræ, binas anſas efficienti, tribuit. Huic enim ea lege umbras adjecit, ut annulum ellipticum, non planum ſed rotundum, ſimilemque ſerpenti caudam devoranti, exprimat; neſcio enim quomodo melius formam eam deſignem. Deinde & hoc umbræ ſuæ artificio præſtitit, ut totus iſte annulus poſt globum Saturni poſitus videatur. Qua ex re ſibi ipſi forte Euſtachius abſurdam aliquam Saturni formam commentus eſt, vel aliis certe comminiſcendi anſam præbere potuit. Mihi autem, de umbra illa temere addita, neceſſario admonendi erant lecto-

ctores; quia ſi vera eſſet, refellebat hypotheſin meam, cum alioqui ſchema Euſtachianum, ſi ſine umbris conſideraretur, plurimum illam confirmaret. Sed & me ejuſdem criminis teneri ajunt, quod paſſim umbras majores quam revera ſint adjiciam. Neſcio equidem quas dicant; ſemel enim Saturni globo annuloque umbras addidi, at non tanquam ita obſervaſſem, ſed explicandæ hypotheſeos cauſa, ut nempe appareret quo pacto annulum Saturno circumdediſſem.

Quod ſi faſciam in diſco ejus obſervatam, uti & illas quas in Jove & Marte exhibui, nigriores quàm in cælo ſpectantur, ob oculos poni dixiſſent, non iviſſem inficias. Fateor enim ultro cælatoris culpa hoc accidiſſe; ac in Marte præſertim zonam longe dilutiorem, imprimis circa margines, pingendam fuiſſe. Quam neque perpetuo ibi ſpectari opinor, ſed, ut Joviales faſciæ, mutabilem formam habere, ſicut poſtremis in Marte obſervationibus didici; de quibus alias fortaſſe plura. Nihil autem ejuſmodi mihi viſum in utroque hoc planeta, Euſtachius non alio argumento probat quàm cætera omnia, nempe quia ipſe non viderit.

Quod Syſtemati Copernicano Syſtema meum Saturnium adaptaverim, nemo, ut opinor, jure me reprehenderit. Attamen cum Catholicis omnibus Fabrius illo interdicat, miror quod non vel hoc ſolo nomine rejicienda eſſe omnia commenta mea pronuntiet. Sed videbat, credo, facile in locum Copernicani Syſtematis Tychonicum me ſubſtituere poſſe. Utrum enim adhibeam parum admodum intereſt ad phænomena quod attinet. Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum ſequendo explicatur; cujus ſententiam non parum quoque noſtrum Saturni Syſtema commendat.

Non intelligo autem qui tam confidenter, hanc de Terra mota opinionem, tantùm ab hetorodoxis Ariſtarchis tenendam Fabrius aſſeveret. Quoties enim de ea cum Catholicis (Romanis nempe) ſermones confero, profitentur illi ſe nequaquam decretis in contrarium latis teneri, ſive ea à Cardinalibus, ſive ab ipſo ſummo Pontifice profecta fuerint. Quibus videlicet non tantum tribuunt in explicando ſacra-

rum literarum ſenſu, ut etiam de controverſiis quæ, ut vocant, facti ſunt, neceſſario iis ſtandum ſit: ac plane, quietem Telluris rationibus potius adſtruendam, quàm diplomatis ſanciendam, exiſtimant. Quin etiam in Gallia paſſim Syſtema Copernici non tanquam hypotheſin, ſed ut liquidam veritatem propugnari certum eſt, idque ab ipſis Eccleſiaſticis, & Sacerdotibus, qui voluminibus totis publice doctrinam eam tradunt, nihil, quod ſciam, Roma contradicente. Quæ omnia perpendens, pridem credidi præter Aſtronomiæ ignaros, imperitamque multitudinem, tantùm adhuc Cleanthes aliquos, in quibus & Fabrius, antiquo errori adhæreſcere, vique irrita Telluris motui obniti.

Cæterum cum mordicus, ut ait, hoc propoſitum teneat, ac planetas reliquos proinde nullo modo Terræ aſſimilandos putet, nihil mirum eſt, nec ferre eum potuiſſe Saturnicolarum ullam mentionem fieri. Ubi tamen injuria me culpat. Nam non ita de illis diſſerui, ut eſſe aliquos affirmarem, aut, rationibus adductis, veriſimile id eſſe evincerem. Quin imo abſtinere me dixi plura ſcribere de Aſtronomia, qualis incolentibus Saturnum futura eſſet, eo quod abſurdum nimis plerique arbitrentur homines in planetis degere; qui proinde fruſtra me inveſtigare dicturi eſſent, quid ii obſervent, qui in rerum natura non ſunt. Cum autem, in periodo Lunæ Saturniæ computanda, menſes Saturnicolarum nominavi, nihil novum aut inſolitum Aſtronomis feci, quibus nihil frequentius eſt, quam ut in Sole aut Luna aliquem exiſtere imaginentur, qui inde aſtrorum motus ſpeculetur. Non erat itaque quod commentum hoc de Saturnicolis me ibi propoſuiſſe Fabrius culparet. Quanquam etſi ſecus foret, neque primus ego hoc prodidiſſem, neque ridiculum adeo, apud Philoſophos quidem, quam ille exiſtimat. Verum præter inſtitutum ad iſta non digrediar. Vocat me Fabriani Syſtematis contemplatio, illius nempe quo, poſtquam meum diruit, phænomena circa Saturnum commodè exponi poſſe confidit. Nam priora illa, quibus Saturni ipſius motum novis legibus ordinare aggreditur, nihil huc pertinent, neque examinare

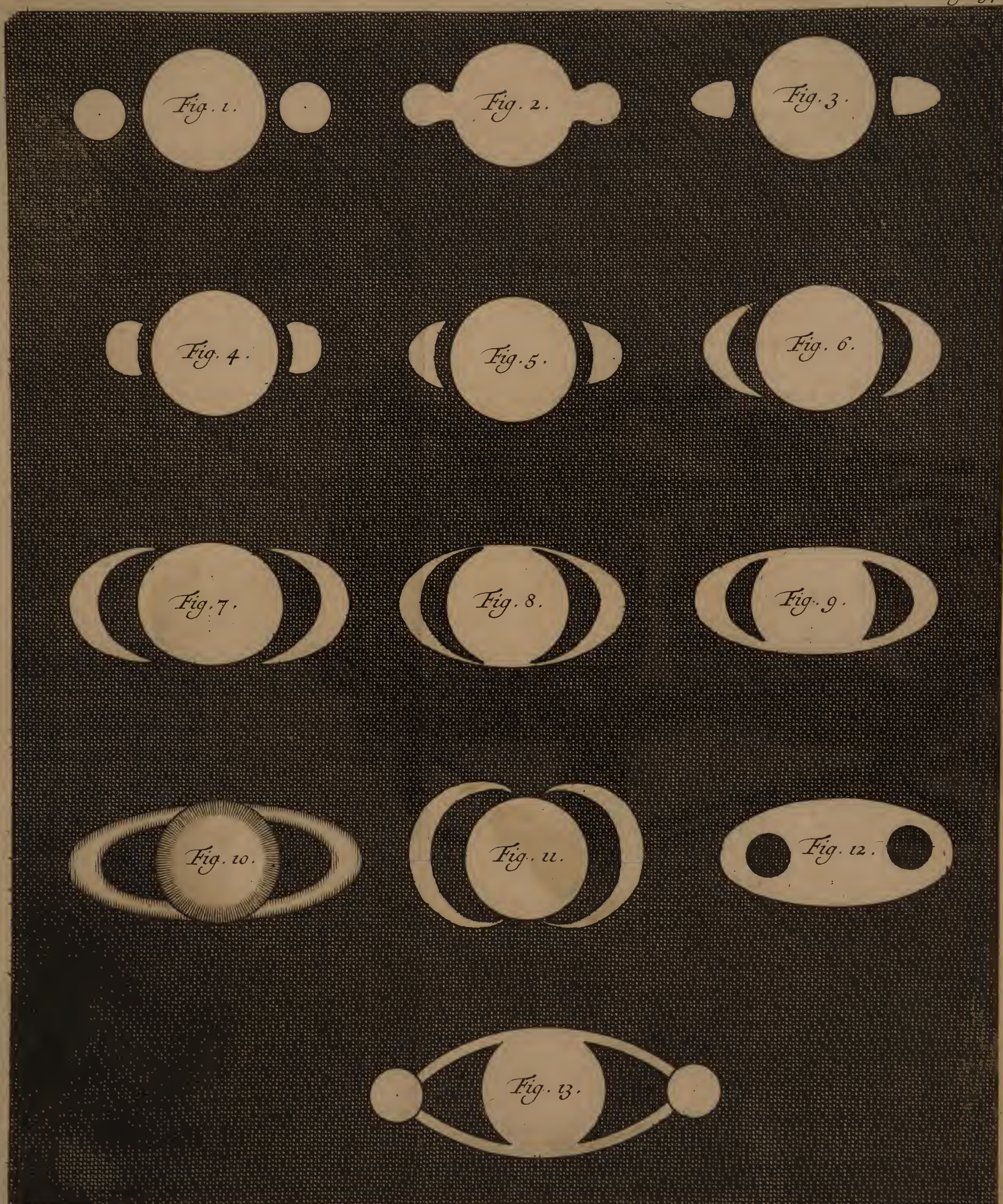
ea

ea operæ pretium fuerit. Miror tamen quid in Tychonica hypotheſi illi diſplicuerit, ut novam à fundamentis extruere in animum induceret: quam quidem vereor ut Aſtronomi ſatis percipere, nedum probare queant.

At nec illa quæ ad phaſes Saturni pertinet, ullo modo clarior eſt, prætereaque ab omni ratione & veriſimilitudine tam longè remota, ut neſciam an refutari à me opus habeat. Cui enim imponet quæſo bellum iſtud commentum de quatuor globulis Saturno proximis, quorum bini lumine ſolis ſplendent, bini alii radios prorſus non reflectunt, ſed natura ſua ſunt obſcuriſſimi. Videor mihi circulatorium quendam calculorum ludum videre, alios ibi albos, alios nigros eſſe, nunc hos, nunc illos oſtendi abſcondique viciſſim. Tale quid enim præ ſe fert mirabilis illa hypotheſis. Quidni verò circulos ſaltem in ſchemate ſuo expreſſit, quos nova hæc Planetarum ſoboles obeunt? Quos circulos non Saturnum in centro habere cerneremus, nec quidem minorem à majore includi, ſed poſt tergum Planetæ binos ex ordine jacere, in quorum utroque duo iſtorum ſatellitum ita currerent, ut nunquam alter alterum aſſequeretur, ſed è diametro ſemper diſtarent. Rectè, ni fallor, mentem Fabrii intellexi, ſin minus, admoneri cupio, fuit enim nonnihil divinandum. Quum autem, his poſitis, phaſin 1, 4, 8, 9, tabellæ ſuæ, facile explicari dicat, TAB. LII. ſcire velim quo pacto Planetæ novi ex minimis maximi fiant. Nam in 1 & 4 Figura, diametrum ne quidem dimidiam habent medii Saturnii corporis, cum in Figura 8, & 9, vel æquales huic, vel majores etiam eſſe neceſſe ſit. Deinde ipſius Euſtachii obſervata phaſis in Figura 10, quomodo ex hac hypotheſi deducetur? Cum neque rotunda corpora ellipticos arcus facere poſſint, & nigri Planetæ minores candidis hîc eſſe debeant, contra quam poſitum fuit: æquales enim inter ſe, poſt aliquantam deliberationem, ſtatuuntur: Quænam porro ſit novorum Planetarum periodus non jam exigam, nondum enim repertam eſſe ait. Sed vereor ut aliqua eſſe poſſit. Nam trium quidem annorum ſpatio, quorum primus 1646, unam illam Figuram 10 ſibi apparuiſſe Euſtachius affirmat, in tabel-

bella quadam, Sereniſſimo Magno Duci Hetruriæ, Fratri T. C. dicata; unde oportet nihil motos fuiſſe interea ſatellites, quod quidem animadverti poſſet. Poſtea vero aliis tribus annis, 1655 nempe, cum duobus inſequentibus, in tantum progreſſi fuere, ut medio horum annorum rotundus Saturnus ſpectatus ſit, extremis vero utriſque cum binis ad latera orbibus, interſtitio aliquo à medio corpore disjunctis. Utinam ridiculi Syſtematis inventori pœna conſtituta ſit, ut motuum iſtorum anomalias inveſtigare teneatur. Piget vero me ultra in his immorari: ſed tamen pauca pro meo illo Saturni comite dicere cogor. Hunc, quia videbatur aliquid in Syſtemate ſuo turbaturus, ſupra Saturnum Fabrius relegavit, ita nimirum ut totus quem percurrit circulus, Planetâ ſuperior jaceat. Sed immerito prorſus; ego enim cautionem me dabo, nihil eum anſatis illis phaſibus occurſu ſuo nociturum, cum puſillus adeo ſit, ut ne quidem, cum prope ad Saturnum accedit, conſpici queat: raro etiam, nec niſi cum rotundus eſt Saturnus, inter diſcum ejus & nos tranſeat, idque ſemidiurno ſpatio. Sinat itaque in ſua illum manere orbita, unáque Mediceos Planetas in vias ſuas, à Magno olim Galilæo circa Jovem attributas, reſtituat, quos nullam omnino ob cauſam, quam quidem aut ipſe adducit, aut ego animadvertere poſſum, loco ſuo ſimiliter expulit.

Jamque percenſui, ni fallor, Princeps Sereniſſime, omnia quæ adverſus me Euſtachius de Divinis, ſeu potius P. Fabrius conquiſivit, quæve ad ſuam hypotheſin ſtabiliendam commentus eſt, quæ quum animo reputo, nulla ſane invenio, quibus non pro me ſibi eruditi reſponſuri fuerint, aut venturi temporis experientia. Interim pauca hæc repoſuiſſe non me pœnitet, quia, licet artificem illum merito neglexiſſe tacendo videri poteram, non idem fortaſſe contra alterum, quem ferunt alicujus nominis eſſe adverſarium, valiturum erat ſilentium; utique quum ſatis omnibus conſtet pleraque ab hoc fuiſſe ſuppeditata, multique, non tam quid, quam à quo ſit objectum, reſpiciant. De cætero rogo C. T. ut, qua uſus ſum in diſputando, libertatem boni conſulat: Idque ita, ſi & provocatus in arenam hanc deſcendi, & juſtæ defenſionis terminos nuſquam tamen exceſſi. F I N I S.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI ANNULO

OBSERVATIONES.

CHRISTIANI HUGENII DE SATURNI ANNULO OBSERVATIONES.

I.

Obſervationes in Saturnum Pariſiis habitæ in Bibliotheca Regia.

ANno 1668, 17 Aug., hora 11 veſpertinâ Dni Hugenius & Picart obſervarunt Planetam Saturnum ope teleſcopiorum 21 pedum & invenerunt figuram ejus talem qualem hic exhibemus, globo in medio manifeſte excedente ſupra & infra ovalem quod vix dum anno præcedenti erat conſpicuum. TAB. LI. fig. 2.

Menſurarunt diverſimode inclinationem magnæ diametri Ovalis ad æquatorem, quæ inventa eſt circiter 9 graduum, licet eo empore tantum debuerit eſſe 4 graduum, ſecundum illa, quæ D. Hugenius dixit in Syſtemate Saturni, planum annuli, qui circumdat globum Planetæ cum plano Eclipticæ tantum efficere angulum 23. gr. 36′; ſed cum ultima hæc obſervatio, & ſimiles aliæ hujus anni & præcedentis, magis exactæ ſint & habitæ tempore magis opportuno ad menſurandam obliquitatem, illis, quæ fundamentum fuere memoratæ detereminationis, Dus Hugenius invenit, loco 23 gr. 36′ angulum plani Annularis & Eclipticæ eſſe circiter 31 graduum; & hoc poſito, non ſolum formam, quam jam ha- *Vera annuli inclinatio.*

bet Saturnus, ſed & omnes illas, quas obſervarunt Aſtronomi ab illo tempore a quo veras obſervare potuere, congruere perfecte cum hypotheſi annuli, & peculiariter obſervationem D^{ni} Campani, Anni 1664 initio Julii, quam ipſe publici juris fecit, in quo magna Ovalis diameter duplicatæ minori diametro æqualis eſt.

Phaſis rotunda. Quod autem ad rotundam Saturni Phaſin attinet, non poteſt niſi parum admodum tempus hujus mutari, ex memorata mutata inclinatione ita ut D^{us} Hugenius adhuc dum phaſin hanc rotundam expectet anno 1671, in quo æſtate anſas amittere inchoabit, quas niſi poſt annum circiter recuperabit, juxta illa quæ tradidit in Syſtemate Saturni.

II.

Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum ſocii, ad auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni.

Brachia Saturno renata. CUm Saturnus abdicaverit figuram ſuam rotundam poſtquam hoc anno 1672 ex radiis ſolaribus emerſit, uti anno præcedenti prædixeram, & cum illi brachia ſint renata; ultima mutatio non minus meretur, ut in Diariis veſtris notetur, quam quædam aliæ præcedentes, quarum ibidem mentionem feciſti.

Ultimum in conjunctione cum Sole fuit Planeta hic 12 Martii præterito, in 22 gr. 35 min. Piſcium; magna autem obliquitas hujus loci Zodiaci ad noſtrum horizontem, quando oritur, in cauſa fuit quo minus tribus menſibus, aurora prohibende, videretur; nam 5 Junii tantum D^{us} Caſſini primum illum potuit obſervare, cum brachia Saturni jam facta eſſent adeo clara & ampla, ut inde colligi debuerit, jam à longo tempore fuiſſe inſtaurata; Obſervabat etiam in diſco Saturni *Umbra in diſco Saturni.* parvam umbram ad latus ſeptentrionale brachiorum, pari-

riter ac exhibui in Syſtemate Saturni Tab. XLIX. *fig.* 6:; quod, æque ac inſtaurata brachia, congruit cum iis quæ ſtatui in illo Syſtemate de annulo, quo cingitur Saturnus. Sed quoniam hæc hypotheſis præcipue confirmatur obſervationibus, quas ultimo anno fecimus, quarum quædam nondum cum publico communicatæ fuere, ut mihi veniam concedas rogo has nunc memorare, cum annotationibus, quas ad eas feci.

Anno 1671 Saturnus apparuit rotundus ſine brachiis aut anſis uti prædixi ante annos 14, quum publici juris feci meum Syſtema, licet id acciderit duobus menſibus prius quam expectaveram, ſcilicet in fine menſis Maji. Percepta deinde eſt quædam interruptio figuræ rotundæ, quam non prævidi, & quam difficulter admodum prævidere potuiſſem, quia Saturnum tantum obſervaram per unicum annum, cum hæc vaticinarer. Sed noſti, quam primum intellexerim, brachia rediiſſe, quod D^us^ Caſſini obſervavit 11 & 14 Auguſti, me affirmaſſe illa certo certius brevi iterum peritura, quod quoque verum repertum eſt; nam 4 Novembris brachia Saturni erant adeo obſcura, ut dubitarem an quidem iterum apparerent, licet D^us^ Caſſini affirmet ſe illa percepiſſe ultimâ vice 13 menſis ſequentis Decembris, poſt quod tempus figura rotunda duravit, donec Saturnus in radios Solares ſe abſcondit.

Hæc ultima brachiorum Eclipſis præcipue veritatem meæ hypotheſeos probat; facile enim patet quam difficile fuiſſet ſecundam prævidere mutationem, priori adeo vicinam, niſi illius veram cauſam perſpectam habuiſſem; præterquam quod modus, quo brachia ſecunda vice ablata fuere is ipſe ſit, quem ſtatui in meo Syſtemate. Vidimus enim illa pedetentim deficere à claritate ſuâ, licet ſemper manſerint ſatis ampla; quod erat certum indicium, radios ſolis valde oblique illuſtrare ſuperficiem annuli Saturni, quæ ad nos converſa erat, quam tandem non amplius illuſtrarunt ſed quidem oppoſitam. In præcedenti apparitione figuræ rotundæ, à fine Maji uſque ad 14 Auguſti, brachia latebant, non quia non illuſtrabantur, ſed quia viſus noſter, parum admodum *Saturnus rotundus.*

 vel

vel omnino nihil elevatus erat ſupra ſuperficiem annuli, quem Sol intuebatur.

Hæc omnia tantum illis ſcripta ſunt, qui cum cura examinarunt, quæ tradidi in Syſtemate Saturni: & pro iis adhuc addo, quantum attinet ad lineam æquinoctialem vel rotundæ apparitionis Saturni, quæ linea formatur interſectione annuli & plani orbitæ planetæ, me nullis cogi obſervationibus, ad ſitum illius mutandum quem in Syſtemate Saturni præſcripſi in 20½ gr. Piſcium & Libræ. Quoties Saturnus è Sole viſus perveniet ad illa Zodiaci loca, rotundus apparebit, etiam quando ab hiſce tantum duobus gradibus removetur; nam ex obſervationibus anni ultimi percepi ita reſtringendos eſſe limites quos 6 graduum ſtatueram, ut ſatis facerem quibuſdam Galilæi & Gaſſendi obſervationibus, quorum Teleſcopia minoris notæ fuerant, quam credere auſus eram. Juxta ultimas haſce limitationes minus apparitiones formæ rotundæ Saturni durabunt quam ipſe olim prædixi; ita ut anno 1685 non initio menſis Martii, ſed menſe Julio, brachia amittet Saturnus prope finem apparitionis ſuæ, & illa recuperabit ſequenti menſe Novembri; pariter 1701 non poterit videri rotundus, niſi menſe Junio, initio ſuæ apparitionis, & menſe Augusto brachia ejus incipient renaſci.

Linea æquinoctialis annuli.

Antequam finem huic ſcripto imponam, hic addam, Tabulam, quam dedi pro motu parvæ Lunæ, vel ſtellæ, quæ comitatur Saturnum, & circa illum volvitur 47 minutis minus quam 16 diebus, huc uſque repertam eſſe adeo obſervationibus congruam, ut nondum videre queam, ſitne quidpiam addendum vel detrahendum.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ,
SIVE
De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu,
CONJECTURÆ
AD
CONTANTINUM HUGENIUM,
Fratrem:
GULIELMO III. MAGNÆ BRITANNIÆ REGI,
A SECRETIS.

Horat. Epiſt. 6. lib. I.

Hunc ſolem, & ſtellas, & decedentia certis
Tempora momentis, ſunt qui formidine nulla
Imbuti ſpectent: quid cenſes munera terræ
Quid maris extremos Arabas ditantis & Indos?
Ludicra quid, plauſus, & amici dona Quiritis,
Quo ſpectanda modo, quo ſenſu credis & ore?

BENEVOLO LECTORI SALUTEM.

Libellus hicce jam ad umbilicum deductus, & prælo deſtinatus erat, cum maximo rei literariæ damno Illuſtrem ejus Auctorem primum morbus, dein mors occupavit. Qui tamen ut in lucem prodiret, cavit, ultima voluntate fratrem, ad quem ſcriptus eſt, rogitans, hujus ut edendi curam ſuſcipere vellet. Cui rei Nobiliſſimo Viro innumeris occupationibus & peregrinationibus, utpote qui Magnæ Britanniæ Regi ad res Batavas à ſecretis eſſet, diſtracto vacare non licuit, niſi anno ferme poſt Auctoris obitum. Qua re, intercedente deinde etiam Typothetarum mora, factum eſt, ut cum editioni jam omnia pararentur, & hic Vir fato ceſſerit, adeoque & Parente & eo, qui poſt parentis obitum ejus vicem gerebat, & ad quem deſtinatus erat, deſtitutus fuerit hic Libellus. Eadem tamen, qua ab Auctore conſcriptus erat, ratione, eademque ad fratrem, licet jam defunctum, inſcriptione, (Re-

ligio enim fuit quidquam immutare) prodit in publicum, non dubia ſpe, fore, ut eruditi, ſicut reliqua omnia Auctoris, ſic & ultimum hunc ejus fœtum benigne accipiant. Demonſtrationes equidem Mathematicas non invenient ubique, neque enim res patitur, ſed, quo in his rebus nihil ultra deſiderari jure poſſe videtur, veriſimiles & ingenioſas conjecturas. Quæ ex cœlorum notitia depromi potuerunt, ea hic videbunt ratione demonſtrata; quæ ex iis non patent, ex cœleſtium corporum cum tellure noſtra affinitate ſolerter conjecta. Verum hujus quid ſit, ex ipſo Auctore commodius perſpicies. Vale.

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,
SIVE
De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD
CONSTANTINUM HUGENIUM,
Fratrem.

LIBER I.

Fieri vix poteſt, Frater optime, ſi quis cum Copernico ſentiat, Terramque, quam incolimus, è Planetarum numero unum eſſe exiſtimet; qui circa Solem circumferantur, ab eoque lucem omnem accipiant; quin interdum cogitet haud a ratione alienum eſſe ut, quemadmodum noſter hic Globus, ita cæteri quoque iſti, cultu ornatuque, ac fortaſſe habitatoribus non vacent. Præſertim ſi ad ea quoque reſpiciat quæ poſt Copernici tempora in cœlo deprehenſa ſunt; Comites nempe ſtellarum Jovis & Saturni, Lunæ montes campoſque, & alia multa; quibus non ſolum veritas inventi ab illo ſyſtematis, ſed & ſimilitudo ac cognatio, Terram inter & Planetarum corpora, magnopere confirmatur. Itaque & nobis, cum prælongis Teleſcopiis ſidera unà ſpecularemur; quod jam per multos annos, propter occupationes tuas & continuam fere abſen-

tiam, non licuit; ſæpius ea de re ſermones habitos memini. Qualia vero eſſent, quæ in iſtis regionibus extarent Naturæ opera, id ne ſperandum quidem eſſe ut unquam ſciri poſſit, fruſtraque proinde quæri, certo credebamus. Neque vero aut a priſcis Philoſophis, aut a recentioribus quidquam ejuſmodi tentatum fuiſſe comperi. Nam inter illos quidem, jam ab ipſo Aſtronomiæ exortu, cum primum Sphæricam eſſe Terræ formam intellectum eſt, eamque undique æthere cingi, fuere qui auderent alios eſſe in ſideribus mundos, imo innumerabiles dicere. Poſteriores vero, ut Cardinalis Cuſanus, Brunus, Keplerus, qui & Tychonem Braheum idem ſenſiſſe ſcribit, Planetis quidem incolas ſuos tribuerunt; Cuſanus & Brunus etiam Soli, & ſtellis inerrantibus: nihil tamen ulterius aut hi aut illi quæſiviſſe inveniuntur; neque etiam nuperus auctor Gallicus dialogi ingenioſi de Mundorum multitudine. Tantum fabulas quaſdam de Lunæ populis nonnulli contexuerunt, animi causâ, Lucianicis, quas noſti, haud multo veriſimiliores. Nam & Keplerianas his annumero, quibus ille in ſomnio Aſtronomico ludere voluit. Mihi vero, qui tot viris egregiis nequaquam me perſpicaciorem eſſe exiſtimo, ſed eo feliciorem, quòd poſt illos tantùm non omnes, natus ſim; cum ab aliquo tempore diligentius iſta meditari cœpiſſem, viſum eſt non prorſus obſeptas eſſe, de rebus tam procul diſſitis, inquirendi vias, ſed veriſimilibus conjecturis abunde materiam præberi. Quas conjecturas meas, prout ſeſe ſubinde obtulerunt, in adverſariis annotatas, nunc in ordinem redigere, tibique exponere volui; atque aliquid etiam adjicere de Sole, Stelliſque inerrantibus, & mundi magnitudine, cujus particula quædam minima eſt totius Syſtematis noſtri complexus. Et hæc quidem, pro ſolito tuo res ſuperas cognoſcendi ſtudio, libenter te lecturum arbitror. Mihi certe ſcribere ea jucundum fuit; utque ſæpe aliàs, ita nunc, velut in re ipſa, verum eſſe expertus ſum illud Archytæ; *Si quis in cælum aſcendiſſet, naturamque mundi & pluchritudinem ſiderum perſpexiſſet, inſuavem illam admirationem ei futuram,* (*quæ*

Fuiſſe qui Planetis incolas tribuerint, ſed nihil præterea de iis inquiſiviſſe.

(*quæ alioqui jucundiſſima fuiſſet*) *niſi aliquem cui narraret habuiſſet*. Utinam vero hæc noſtra narrare non omnibus poſſem, ſed præter te lectores arbitratu meo deligere liceret, qui nec Aſtronomicæ ſcientiæ, nec Philoſophiæ melioris rudes eſſent; quibus facile conatus hoſce probatum iri, nec, propter novitatem, defenſione opus habituros confiderem. Quia vero & in imperitiorum manus venturos provideo, & fortaſſe quorumdam ſeveriora judicia ſubituros, puto non abs re fore ut utrorumque reprehenſiones jam hinc repellere coner.

Occurritur objectionibus imperitorum.

Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, aut nequaquam adhuc probatum eſſe. Quare nihil mirum, ſi, quæ talibus fundamentis exſtruuntur, pro ſomniis nugiſque ſint habituri. Quid vero his dicemus, niſi aliter ſenſuros ſi diſciplinis iſtis, naturæque rerum contemplandæ, operam dediſſent. Hoc vero longe plurimis non licuiſſe ſcimus, vel quod ad ea parum ingenio comparati eſſent, vel quod unde diſcerent non haberent, vel denique quod ſuis, aut reipublicæ curandis negotiis, alio vocarentur. Itaque nihil eos reprehendimus; ſed, ſi diligentiam in his rebus noſtram condemnandam putabunt, ad magis idoneos judices provocamus.

Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari.

Erunt alii qui ea, quæ veriſimilia eſſe oſtendere conati ſumus, Sacris Literis adverſari prædicent, cum de Terris animalibuſque, atque etiam ratione præditis, nos diſſerere animadvertent; de quorum origine, aut quod omnino in rerum natura extent, nihil illic traditum ſit, ſed ea potius ex quibus contrarium ſequatur. Tantum enim de Tellure hac, cum ſuis animantibus, herbiſque, & homine omnium domino commemorari. Quibus reſpondeo, quod & ante me alii, ſatis apparere non de omnibus iis, quæ Deus creavit, particulatim nos edoceri eum voluiſſe. Itaque cum vel

Siderum vel Terræ nomine, in prima Geneſi, etiam Planetæ, qui præter Solem Lunamque ſunt, comprehendantur; atque etiam Jovis & Saturni Comites; poſſe non tantum plures alios utriuſque generis includi, ſed & res innumeras quas in ſuperficie eorum ſummo opifici collocare placuerit. Porro non neſcire eos quo pacto interpretandum ſit, quod dicitur omnia propter hominem condita eſſe; neque eo ſignificari, ut a pluribus jam eſt animadverſum, tot ingentia corpora ſtellarum, quas partim videmus, partim nec vidiſſemus quidem unquam, ſi Teleſcopiorum auxilium defuiſſet, noſtræ utilitatis aut contemplationis gratia fuiſſe condita; quia id abſurde diceretur. Quare cum operum Dei magna pars extra conſpectum hominum ſit poſita, neque ad eos pertinere videatur, haud alienum eſſe opinari, aliquos extare, qui illa propius aſpiciant & admirentur.

Inquiſitionem horum ut nimis curioſam reprehendi non debere.

Sed dicent fortaſſe, cum de his ipſe ſupremus auctor nihil amplius docuerit aut revelarit, credendum eſſe ſibi ſcientiam eorum reſervaſſe, ac proinde temere, & curioſe nimis de iis inquiri. At nimium ipſos ſibi ſumere ajo, ſi definire velint, quouſque homines inveſtigando progredi debeant, diligentiæque eorum modum ſtatuere; ac ſi terminos, quos hic Deus præſcripſit, certo cognitos haberent; aut in hominum poteſtate eſſet illos prætergredi. Et ſane, ſi talibus ſcrupulis retenti fuiſſent qui ante nos vixerunt, adhuc ignorari potuiſſet quænam Telluris eſſet figura, aut quæ magnitudo, & num aliqua Americæ regio. Item an Solis radiis Luna illuſtraretur, quibuſve ex cauſis aut hæc aut ille deficerent; ac pleraque alia, quæ Aſtronomorum laboribus repertiſque accepta referimus. Quid enim tam abſconditum & inacceſſum videbatur, quam quæ de rebus cœleſtibus in aperta luce nunc poſita ſunt? Ex quo intelligitur induſtriam mentiſque acumen hominibus data eſſe, quibus paulatim rerum naturalium cognitionem conſequerentur, neque eſſe cur conari deſinamus & ulteriora inquirere. Attamen reconditiora illa, quibus hic præcipue inſiſtimus, ſcimus non eſſe ejuſmodi, ut quærendo penitus inveſtigari poſſint. Itaque nihil veluti cer-

certum affirmamus, (quî poſſimus enim?) ſed conjecturis tantum agimus, quarum de veriſimilitudine ſuo cuique arbitratu judicare liberum ſit. Quod ſi quis irritam igitur, & inanem in his operam nos ponere dicat, de rebus iis conjecturas prodendo, de quibus ipſi fateamur nihil certi unquam comprehendi poſſe: reſpondebo totum Phyſices ſtudium, quatenus in cauſis rerum eruendis verſatur, eadem ratione fore improbandum; *ubi veriſimilia inveniſſe laus ſumma eſt, & indagatio ipſa rerum, tum maximarum, tum occultisſimarum, habet oblectationem.* Sed veriſimilium multi ſunt gradus, alii aliis veritati propiores, in quo diligenter æſtimando præcipuus judicii uſus vertitur. *Conjecturas non eſſe vanas, quia non plane certa.*

Ut vero mihi videtur, non tantum res ad cognitionem maximas hic indagamus, ſed quarum contemplatio ſtudiis quoque ſapientiæ multum conducat. Expedit nimirum ut, velut extra Tellurem hanc poſiti, procul eam intueamur, quæramuſque, an ſola ſit in quam omnem ornatum natura contulerit. Ita enim rectius quid ſit, quoque loco habenda, intelligere poterimus: quemadmodum qui longinquas regiones obeunt, de patriæ ſuæ rebus verius judicare ſolent, quam qui nunquam inde ſe moverunt. Nec ſane ille magnopere admirabitur quæcunque hic vulgo maxima habentur, qui, rationibus noſtris aliquid tribuens, multitudinem Terrarum noſtræ ſimilium, ſimiliterque incolis ſuis frequentatarum, ſibi propoſuerit. Deum vero, tantarum rerum effectorem, quî poterit idem non valde ſuſpicere & venerari? cujus providentiam, ſapientiamque mirabilem, paſſim hic aſſertam inveniet, contra falſas opiniones eorum, qui vel ex fortuito corpuſculorum concurſu ortam eſſe Terram, vel omni principio eam carere dixerunt. Sed jam ad propoſitum. *Ad ſapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.*

Et quoniam maximum ſumetur argumentum, ad ea quæ inſtituimus probanda, ex ordinatione Planetarum Copernicea, quodque inter eos Tellus hæc haud dubie numeratur; bina ſchemata hic initio deſcribo, quorum alterum orbes eorum, circa Solem diſpoſitos, continet, veris proportioni- TAB. LIV. fig. 1.

nibus expreſſos; ſimile illi quod in Automato noſtro ſæpius conſpexiſti: alterum rationes magnitudinum oſtendit, quibus corpora Planetarum inter ſe, & ad Solem, comparantur; quod in eodem Automato adjectum eſt. In priore punctum medium Sol eſt; à quo deinceps, noto omnibus ordine, ſunt orbitæ Mercurii, Veneris, Telluris, cum ſuperaddita via Lunæ; tum Martis, Jovis, & Saturni: ac circa Jovem, Saturnumque circelli Comitum; illius quatuor, hujus quinque. Quos circellos, cum eo, qui Lunæ noſtræ dicatus eſt, longe majores hic poni ſciendum, quam pro ratione ad Planetarum primariorum orbitas; ne, ob parvitatem, penitus viſum effugerent. Orbitarum vero quanta reipſa ſit vaſtitas inde intelligere licet, quod diſtantia a Sole ad Terram, decem vel duodecim millia Terræ diametrorum continet: de qua menſura pluribus poſtea agetur. Omnes porro in eodem fere plano ſitæ ſunt; ut proinde non multum diſcedant ab eo in quo Tellus circumit, quod Eclipticæ planum vocatur. Hoc vero oblique ſecatur ab axe Telluris, in quo illa volvitur horis viginti quatuor, reſpectu Solis: iſque axis, niſi quod mutationem lentiſſimam ſubit, quam norunt Aſtronomi, ſibi ipſi parallelus manet, dum ipſa circa Solem defertur; ex quo dierum noctiumque oriuntur vices, itemque temporum anni commutationes, ut paſſim docent eorum libri. Unde & tempora periodorum, quibus circuitus ſuos Planeta quiſque peragit, huc tranſcribo. Nempe Saturni, annorum 29, dierum 174, horarum 5. Jovis annorum 11, dierum 317, horarum 15. Martis proxime dierum 687. Telluris dierum $365\frac{1}{4}$. Veneris dierum 224, hor. 18. Mercurii dierum 88.

TAB. LV. fig. 1.

Copernici ſyſtema exponitur.

TAB. LIV. fig. 1.

Hic eſt ille, notiſſimus jam, cæleſtium corporum ordo, a Copernico repertus, idemque naturæ ſimplicitati convenientiſſimus. Hunc ſi quis convellere aut improbare contendat; is diſcat primum, ex demonſtrationibus Aſtronomorum, quanto in hac deſcriptione melius faciliuſque omnium eorum, quæ circa motum ſiderum animadvertuntur, ratio reddatur, quam in Ptolemaico aut Tychonis ſyſtemate. Cogno-

Copernici doctrinam quæ rationes confirment.

noſcat etiam, ex ſingulari Kepleri obſervatione, quomodo Planetarum, interque eos Telluris, a Sole diſtantiæ temporibus periodorum; quas retuli, certa quadam proportione reſpondeant; quam poſtea Jovis quoque & Saturni Comites, horum reſpectu, ſervare deprehenſum eſt. Intelligat quam contra motus naturam quiddam comminiſcendum ſit, quo demonſtretur cur ſtella Polaris, in extrema cauda minoris Urſæ, exiguo nunc circulo moveatur, duobus gradibus & tertia parte à Polo diſtans; cum ante annos mille octingentos viginti, ætate nempe Hipparchi, duodecim gradibus, 24 ſcrupulis, ab eodem Polo abfuerit: poſt aliquot vero ſæcula, ad 45 gradus inde receſſura ſit, & poſt annorum viginti quinque millia, eodem quo nunc eſt, reverſura. Ut proinde cælum totum, ſi circumrotari dicatur, ſuper alio atque alio axe id faciat neceſſe ſit, quod eſt abſurdiſſimum; cum in Copernici hypotheſi nihil ſit explicatu facilius. Denique expendat omnia illa, quibus, ad argumenta Copernico objici ſolita, Galilæus, Gaſſendus, Keplerus, aliique plurimi reſponderunt. Quorum rationibus ita ſublati ſunt qui ſupererant ſcrupuli, ut omnes nunc Aſtronomi, niſi tardiore ſint ingenio, aut hominum imperio obnoxiam credulitatem habeant, motum Telluri, locumque inter Planetas, abſque dubitatione decernant.

Planetarum magnitudinis inter ſe & ad Solem ratio. TAB. LV. fig. 1.

In altero, quod dixi, ſchemate, ita horum globi cum Sole oculis ſubjiciuntur, ac ſi juxta ſe poſiti eſſent. Atque hic rationem diametrorum, ad Solis diametrum, eam ſecutus ſum, quam tradidi in libro de Saturni Phænomenis. Nempe Annuli Saturnii eam quæ 11. ad 37; Globi incluſi, ad eandem Solis diametrum fere, quæ 5 ad 37; Jovis, quæ 2 ad 11; Martis, quæ 1 ad 166; Telluris, quæ 1 ad 111; Veneris, quæ 1 ad 84; quibus nunc addo Mercurii, quæ eſt 1 ad 290 ex Hevelii obſervatione Anno 1661 habita; cum in Solis diſco Mercurius conſpiceretur, noſtro tamen, non illius calculo.

Quomodo autem hæ noſtræ magnitudinum rationes inventæ ſint, tum ex cognita proportione diſtantiarum à Sole, tum

ex menſura Diametrorum, Teleſcopiis capta, eo, quem dixi, libro oſtendi: neque adhuc video cur multum, ab iis quas tunc definivi, recedam; etſi nihil eis deeſſe non contenderim. Nam quod multi exiſtimant, in metiendis apparentibus diametris, præſtare lamellis noſtris uſum Micrometrorum quæ vocant, quibus fila tenuiſſima in foco Lentis majoris prætenduntur, nondum iis aſſentiri poſſum, ſed aptiores eſſe lamellas virgulaſve tenues arbitror, quas eo loco objiciendas docueram. Ex quo iſtud Micrometrorum inventum, itemque Teleſcopii ad organa Aſtronomica adaptatio, non multo poſt emanavit: non ſine laude tamen eorum, qui in perficiendo tam utili invento elaborarunt.

Micrometris præſtare lamellas virgulaſve tenues.

Cæterum, in hac planetarum comparatione, notanda eſt ingens Solis magnitudo, cum interioribus quatuor Planetis collata; utque hi Saturno quoque, ac Jove, longe longeque minores ſint. Nam conſiderandum, non ordine creſcere eorum corpora cum diſtantiis a Sole; quippe cum multo major ſit Veneris, quam Martis, globus.

Solem Planetis multo majorem eſſe.

His de utroque Diagrammate expoſitis, nemo, ut puto, jam non videt, quam clare ex priore, in quo ſyſtematis eſt typus, ſequatur, eodem genere, cum cæteris quinque Planetis, Tellurem hanc noſtram contineri. Nam vel ipſi circulorum poſitus hoc teſtantur. Atqui præterea conſtat, teleſcopiorum obſervationibus, & globoſa eſſe omnium corpora, itidem ut Telluris, & à Sole ſplendorem ſimiliter eos mutuari. Ac denique in hoc quoque ei ſimiles eſſe, quod in ſe ipſis circum proprios axes volvantur: quis enim de cæteris dubitet, cum in Jove & Marte hoc certo compertum ſit? Sicut autem Tellus Lunam comitem habet, ita Jupiter & Saturnus ſuas. Quid igitur tam probabile eſt, cum in his tot rebus Telluri cum Planetis illis primariis intercedat ſimilitudo, quam non minori quoque dignitate & pulchritudine eos eſſe, nihiloque minus ornatos cultoſque: aut quænam cur hoc aliter ſe habeat ratio excogitari poteſt?

Tellurem Planetis, & hos Telluri recte aſſimilari.

Sane ſi cui, in diſſecti canis corpore, viſcera oſtenderentur, cor, ſtomachus, pulmones, inteſtina; tum venæ, arte-

Ex ſimilitudine in hiſce recte argumenta peti.

teriæ, nervi; etiamſi nunquam animalis corpus apertum conſpexiſſet; vix dubitaret, quin ſimilis quædam fabrica, ac partium varietas, in bove, porco, cæteriſque beſtiis ineſſet. Nec ſi unius, ex Saturni aut Jovis Comitibus, naturam cognitam haberemus, non eadem fere quæ in illo, in cæteris quoque reperiri putaremus? Similiterque ex uno quopiam Cometa, ſi quidnam eſſet perſpici poſſet, eandem omnium rationem eſſe ſtatueremus. Itaque plurimum ponderis habet illa ex ſimilitudine petita, & à rebus viſis ad non viſas producta ratio. Quam proinde ſequentes, ex Planeta uno, quem coram aſpicimus, de reliquis ejuſdem generis rectè conjecturam faciemus.

Planetas ſolidos eſſe & gravitate pollere.

Ac primùm quidem, non aliter quam Tellus noſtra, ſolido corpore eos conſtare exiſtimabimus. Deinde prorſus etiam veriſimile cenſebimus, adeſſe globis eorum id quod gravitatem appellamus; cujus vi corpora quæque, in ſuperficie eorum hærentia, premant eam; aut, ſi dimoveantur, ex omni parte velut attracta recidant. Quod ex ipſa quoque globi forma liquet, cum hæc ex conatu corporum, ad centrum unum tendentium, generetur. Imo jam, certo quodam ratiocinio, colligere didicimus, quanto majus minuſve in Jove ac Saturno, quam apud nos, gravitatis momentum eſſe debeat. Qua de re, deque auctore ejus, in Diatriba de Cauſis gravium diximus.

Nec deeſſe illis animalia.

Nunc vero ulterius quærere pergamus, quibus gradibus ad penitiora quædam, de ſtatu ornatuque Terrarum iſtarum, cognoſcenda perveniri poſſit. Ac primùm quam veriſimile ſit herbas, & animalia in earum ſuperficie exiſtere, æque ac in Tellure noſtra. Nemo negabit puto, & formam & vitam, & creſcendi generandique rationem, in ſtirpibus animantibuſque majus quid eſſe, magiſque mirandum quàm corpora vitâ carentia, quantumvis mole conſpicua ſint; velut montes, rupes, maria. Patet etiam in utroque illo viventium genere, multo aliter longeque expreſſius, cerni Divinæ providentiæ intelligentiæque præſtantiam. Cum

 enim

enim quæ in Terra, imo quæ in Cælo quoque aſpicimus, aliquis Democriti, aut etiam Carteſii ſectator, ita ſe explanaturum profiteri poſſit, ut tantum atomis & motu horum indigeat; in herbis tamen & animalibus fruſtra erit, nec de primo eorum exortu quidquam veriſimile adferet; cum nimis maniſeſto appareat, nunquam vago, ac fortuito corpuſculorum motu, talia quædam prodire potuiſſe: quippe in quibus omnia ad certum finem egregie apta accommodataque cernantur; cum ſumma prudentia, & legum naturæ, ipſiuſque Geometriæ, cognitione exquiſita, quemadmodum in ſequentibus ſæpius oſtendetur: ut jam omittamus illa in progignendo miracula. Quod ſi igitur in Planetis nihil aliud quàm vaſtæ ſolitudines, corporaque inertia, & vita carentia reperiantur; atque abſint ea in quibus clariſſime certiſſimeque Architecti ſupremi ſapientia eluceſcit; haud dubiè multum dignitate & pulchritudine concedent Telluri noſtræ: quod, ut jam dixi, rationi adverſatur.

Ut nec plantas.

Non igitur ſic; ſed erunt & ibi corpora quædam motu prædita, ſeſeque ipſa moventia, neque his quæ in Terra ſunt ignobiliora; adeoque erunt animantia. His autem poſitis, jam de herbis quoque fere neceſſario concedendum eſt; ut ſit aliquid quo illa alantur. Omnia verò hæc non aliter quam in ſuperficie Planetariorum globorum exiſtere, dubitari non poteſt; cum calore Solis gaudere ac foveri debeant; cujus radiis, non ſecus quam Tellus noſtra, expoſiti ſint.

Sed dicet aliquis, celerius quàm par eſt, hic nos progredi. Nam, ut non negetur res aliquas in Planetarum ſuperficie reperiri, quæ ibi creſcant & moveantur, Deoque auctore, non minus quam noſtra hæc, dignæ ſint; longè diverſam tamen earum poſſe eſſe naturam, ut nec materia, nec creſcendi more, nec extrinſeca forma, aut internis partibus, quidquam iis, quæ apud nos ſunt, ſimile habeant: ac talia ſint denique, ut nihil ejuſmodi in mentem homini venire poſſit. Hoc igitur jam quæramus quam ſit veriſimile; & an non potius credendum ſit, non tantam eſſe diverſitatem

quan-

quanta exiſtimetur. Favet eorum ſententiæ, qui omnia alia illic imaginantur, quod Natura videatur varietatem plerumque, & plurimis in rebus, ſectari; quodque Conditoris potentia hoc ipſo magis declaretur. Sed cogitare debent, non eſſe hominum arbitrio definiendum quàm magna iſta ſit varietas ac diſſimilitudo. Neque, quia poſſit eſſe immenſa, reſque illæ ab intellectu, & comprehenſione noſtra penitus remotæ, idcirco neceſſe eſſe, ut reipſa tales exiſtant. Quamvis enim ſimilia omnia iis quæ apud nos ſunt, finxiſſet Deus in cæteris Planetis; nihilo minor eſſet ſpectatoribus eorum, ſi qui ſunt, admiratio, quam ſi plurimum diſtarent: cum, quid in aliis effectum ſit, nullo modo poſſint cognoſcere. Potuiſſet in terris Americæ, aliiſque longè remotis, aliqua creaſſe viventia, quæ his noſtris nihil ſimile haberent; neque id fecit tamen. Nam formarum quidem diverſitatem aliquam eſſe voluit, quibus animalia herbæque noſtræ à tranſmarinis illis, diſſiderent, ſed & in his ipſis formis, inque creſcendi & generandi modis, multa utriſque convenire fecit. Habent enim & illic animalia pedes, alas; atque intus cor, pulmones, inteſtina, vulvas; cum hæc omnia in unoquoque genere illorum, ac noſtratium quoque, planè diverſa ratione ordinari potuerint, ab infinitæ ſolertiæ opifice. Non igitur omnem varietatem quam poterat in rebus creatis, earum auctor exhibuit, nec proinde argumento illi, quod a Naturæ novandi ſtudio petitur, tantum tribuendum eſt, ut omnem, qui in cæteris Planetis eſt, ornatum ab eo, qui in Terra noſtra conſpicitur, prorſus alienum putemus. At contra credibile eſt, inter ea quæ in ſuperficie iſtorum globorum generantur, quæque apud nos ſunt, præcipuam eſſe differentiam, quæ ex majori, minorive, eorum a Sole, caloris vitæque fonte, diſtantia oriatur. Propter quam tamen magis materiam, quam formam rerum, variari neceſſe ſit.

Non nimiam in hiſce fingendam diſſimilitudinem.

Ad materiam vero quod attinet qualiumcunque ſtirpium, atque animantium, quæ Planetas exornant, etſi qualis ſit cogitatione aſſequi nequeamus, illud tamen vix dubitari poteſt, quin ex elemento humido, uti noſtra omnia, creſcant &

alantur. Nihil enim aliter gigni poſſe omnes fere Philoſophi arbitrantur; & fuere inter præcipuos, qui ex aqua omnium rerum originem eſſe dicerent. Etenim, ſicca & arida quæ ſunt, motu carent: abſque motu vero nihil corporibus, quo augeantur, accedere poſſe manifeſtum eſt. At liquidorum particulæ, & inter ſe continue moventur, & facile ſeſe ubique inſinuant; quo fit, ut non tantum ſeipſas, ſed & alias diverſæ naturæ, quas ſecum vehunt, creſcentibus apponere aptæ ſint. Ita enim, aquæ affluxu, & herbas adoleſcere, foliiſque & fructibus augeri, & lapides ex arena concreſcere cernimus. Itemque metalla & cryſtallos, gemmaſque incrementa inde capere ſatis conſtat, etſi in his obſcurius id animadvertitur, propter lentiſſimos progreſſus; quodque ſæpe non in iis, quibus enatæ ſint, locis cavitatibuſque reperiantur; pervetuſtis, ut videtur, Terræ ruinis convulſionibuſque disjectæ. Sed aquæ elementum a Planetis non abeſſe, veriſimiles quoque conjecturæ ſuppetunt, ex teleſcopiorum obſervationibus. Apparent enim in Jove tractus quidam reliquo diſco obſcuriores, iique non eadem ſemper forma permanentes, quod nubium proprium eſt. Maculæ vero, quæ immutabiliter globo ejus inhærere conſpiciuntur, ſæpe longo tempore obtectæ manent, nubibus videlicet illis interceptæ, è quibus deinde rurſus emergant. Atque etiam nubes in medio Jovis diſco exoriri quandoque annotatum fuit, & maculas quaſdam minores exiſtere, reliquo corpore magis lucidas, neque eas diu ſupereſſe; quas Caſſinus ex nivibus eſſe conjectabat, cacumina montium inſidentibus. Mihi non improbabile videtur, terræ regiones candidiores eſſe, ſuperfuſis nubibus plerumque occultatas, ac nonnunquam ab iis liberas.

Aquas a Planetis non abeſſe.

Apparent, etiam in Marte, lucis & obſcuritatis diſcrimina, ex quibus converſio ejus ad Solem, viginti quatuor horis cum 40 ſcrupulis primis, abſolvi reperta eſt; nubes tamen nondum fuerunt animadverſæ, idcirco quod multò minor cernitur quam Jupiter; etiam cum maximè ad Tellurem appropinquat. Præterquam quod & intenſior Martis lux, utpote

a

a propiore Sole accepta, intuentibus impedimento eſt. Eademque lux magis etiam obſtat in Venere. Sed ſi Tellus ac Jupiter nubes aquaſque habent, vix dubitandum eſt quin & in cæteris inveniantur Planetis. Nec tamen noſtræ prorſus ſimiles eſſe aquas iſtas dixerim; etſi liquidæ ut ſint, ad uſus quos præſtare debent, requiritur; ut verò perſpicuæ, ad pulchritudinem. Noſtra enim hæc, in Jove & Saturno, continuo gelu aſtringeretur, propter magnam Solis diſtantiam. Itaque putandum eſt naturam earum, quæ in Planetis ſunt, ad ſuam quamque regionem attemperatam eſſe; ut in Jove quidem ac Saturno difficilius in glaciem vertantur, in Venere verò, ac Mercurio, minus facile in vapores abeant. In omnibus autem attractum a Sole humorem, ſubſidere rurſus, & unde venit reverti, neceſſe eſt, ne penitus aridum Solum relinquatur. Non cadet autem niſi in guttas denſatus; quod eveniet, ſicuti apud nos, cum in frigidiorem locum aſcenderit ex inferiore calidioreque ob terræ viciniam.

Noſtræ tamen non prorſus ſimiles.

Habemus igitur in globis illis campos Solis radiis expoſitos, pluviiſque aut rore irrigatos, in quibus ſi quid enaſcatur; ut fieri debere utilitatis & ornatus gratia diximus; id eodem quo apud nos modo fieri veriſimile eſt: cum nec aliter fere, nec melius poſſit. Ut nempe radicibus ſuis ſolo adhæreat, ſimulque harum fibris humorem inde combibat. Neque vero ſatis ornatæ mihi eſſe terræ iſtæ videbuntur, niſi ſtirpes quaſdam habeant alte excreſcentes, quæque adeo arbores, aut arborum inſtar, fiant: quandoquidem hæ maximum, ac, præter aquas, unicum ſunt ornamentum, quod Natura terris largiri poſſit. Quæ quantum amœnitatis & gratiæ afferant facile unuſquiſque ſecum exiſtimat. Ut omittam jam materiæ ex arboribus oportuniſſimum ad omnia uſum. Porro vix aliter quoque propagari ſtirpes, aut perennare poſſe exiſtimo, quam producendis ſeminibus. Cum unica fere hæc ratio videatur, eademque tam mirabilis, ut non ſolius Telluris noſtræ gratia inventa ſit. Denique nihil vetat, ut, quemadmodum in diverſis hujus terræ regionibus, ita in iſtis quoque longè remotis, idem in iis quæ ad ſtirpes attinent, Natura ſecuta ſit.

Nec alia ratione illic naſci & propagari ſtirpes quam apud nos.

Ne-

Idem & de animalibus verum eſſe. Neque vero diſpar ratio eſt in animalibus; cur non & paſcendi, & generandi, modus ſimilis putetur in Planetis ei qui eſt apud nos. Quia nempe univerſa terræ hujus animalia, ſive quadrupedum generis, aut volucrum, aut natantia, aut reptilia, ipſaque inſecta, idem naturæ præſcriptum ſequuntur. Veſcuntur enim vel herbis, fructibuſque, vel ipſis animantibus, quæ inde nutrita fuere: omniumque generatio per conjunctionem maris & fœminæ, perque fæcunditatem ovorum (nam & hæc ubique animadvertitur) peragitur. Nam hoc quidem certum eſt, fieri non poſſe ut, vel herbæ, vel animantia quæ illic ſunt, ſine propagatione generis ſui eſſe perſeverent; quia vel fortuitis caſibus interire ea ac deficere contingeret; cum herbæ ſtirpeſque humida materia conſtent, eoque etiam exareſcere debeant; animalia mollibus flexilibuſque membris, nec, ut ſilices, duris. Quod ſi in his alias naſcendi vias comminiſcamur, velut ex arboribus; quemadmodum diu creditum eſt, ex harum genere quodam in Britannia anates naſci, apparet quàm id à ratione abhorreat, propter ſummam, quæ lignum inter carneſque eſt, differentiam. Vel ſi animalia ex limo terræ exiſtere putemus, velut de muribus in Ægypto multi prodiderunt, quis, naturæ paulo intelligentior, non videt hoc alienum eſſe inſtitutis ejus? aut quis non exiſtimet multò magis convenire Dei magnitudini ac ſapientiæ, ut ſemel omnis generis animantia creaverit, inque Terrarum orbem certo modo, (quem nemo hominum adhuc divinare potuit.) impoſuerit, quam ut perpetuo novis ex terra producendis vacare neceſſe habeat? Quibus alendis, educandiſque, abeſſet quoque prorſus parentum cura ac charitas, quam neceſſaria quadam ratione, omni animalium noſtrorum generi, inſitam, ingenitamque novimus. Sed hæc quæ ad propagationem attinent, etſi fortaſſe aliter ſeſe habeant, hoc tamen rationibus ſuperius adductis ſatis probatum eſt; & ſtirpes & animalia in Planetarum terris inveniri, ne ſcilicet ſint hac noſtra viliores. Quod cum ita ſit, tum quoque, ne minus, quam noſtra Tellus, iſtæ aliæ ornatæ ſint, neceſſe eſt, ut non minor ſit,

in utroque genere illo, quàm apud nos varietas. Quænam vero hæc eſſe poteſt? Equidem cum, in omni animantium noſtrorum genere, cogito quibus modis moveantur; omnia video eo reduci, ut vel pedibus ingrediantur binis, quaterniſve; inſecta ſenis, vel etiam centenis; vel ut in aëre volent, alarum mirabili vi & moderamine; vel ſine pedibus reptent; vel flexu corporum vehementi, aut etiam pedum percuſſu, in aqua ſibi viam aperiant. Præter hos incedendi modos, vix videtur alius dari, aut omnino mente concipi poſſe. Ergo quæ in Planetis extant animantia, uno aliquo ex his utentur; aut quædam pluribus etiam, quemadmodum apud nos aves amphibiæ; quæ & pedibus incedunt, & natant in aquis, & in aëre volitant: & crocodili & hippopotami, inter terreſtria, & aquatica, medii generis. Nulla autem præter haſce vita cogitari poſſe videtur. Quid enim eſſe poſſit, in quo animantia exiſtant, præter tellurem ſolidam, aut Elementum liquidum, quale aquæ noſtræ, aut multo liquidius, quale aër; aut illis ſimilia. Poſſet enim eſſe aër multò, quàm apud nos denſior, graviorque; eoque ad volandum accommodatior, neque tamen minus perſpicuus. Poſſent etiam liquidorum plura genera, alia aliis ſuperinducta eſſe. Velut ſi, ſuper mare, incumbere cogitetur alia quæpiam materia, quæ decuplo levior ſit aqua, centuplo gravior aëre; ac ſua quidem ſuperficie extrinſecus terminata, ſed ut extra eam, terræ partes ſolidæ emineant. Sed non eſt, cur plura hujuſmodi in cæteris Planetis, quàm in noſtro, inveniri putemus, & ſi inveniantur, non tamen aliis modis ibi animalia moveri poterunt. Cæterùm quod ad varias eorum formas attinet; cum videamus in variis terræ regionibus miram adeo ac multiplicem diverſitatem; invenirique in America quæ fruſtra alibi quæras; magna ratio eſt ut nullam earum formarum, quæ in Planetis exſtant, imaginando aſſequi nos poſſe credamus. Quanquam ſi omnes iſtos movendi modos cogitemus, quos hic recenſui, nihil mirum eſſet non magis differre aliquod iſtorum animalium à noſtra-

te quopiam, quam noſtra diſcrepant inter ſe. Ea dico quibus minimum eſt ſimilitudinis.

Quam varia porro ſint genera eorum in Planetis ita optimè colligemus, ſi ad ea quæ apud nos ſunt, miramque in iis formarum diverſitatem, animum advertamus. Planè enim veriſimile eſt, non minori numero occurſuras, ſi quis ad Jovis, aut Veneris globum cominus ſpectandum admitteretur. Percurramus verò (nam de omnibus dicere longum eſſet) majores noſtrorum animalium differentias, vel formâ, vel proprietate aliqua ſingulari notabiles; idque in terreſtribus, aquatilibus, volucribus. Cogitemus quæ ſit inter equum, elephantum, leonem, cervum, camelum, porcum, ſimiam, hiſtricum, teſtudinem, chamæleontem, diſſimilitudo; quanta in aquaticis, cetum inter & phocam, raiam, lucium, anguillam, ſepiam, polypum, crocodilum, piſcem volantem, torpedinem, cancrum, oſtream, muricem. In avium genere quantum diſcrimen, aquilæ, ſtruthiocameli, pavonis, cygni, noctuæ, veſpertilionis. Reptilia pro uno tantum genere cenſeamus. At in inſectis formicas ſpectemus, araneos, muſcas, papiliones; & miram horum naturam, quod ex vermibus volatilia evadant. In omnibus vero his, ſcimus quàm magnus præterea ſit numerus minus diſſidentium.

Summam animalium apud nos varietatem eſſe.

At quantuſcunque ſit, nihilo minorem eſſe in unoquoque reliquorum Planetarum putandum eſt. Quamvis vero de figura iſtorum animalium fruſtra per conjecturas quæratur, tamen de vita eorum generatim jam aliquid aſſecuti videmur; & de ſenſibus erit in ſequentibus quod dicamus.

Nec minorem in Planetis.

Sicuti verò animantium, ita ſtirpium quoque & arborum noſtrarum præcipuæ differentiæ expendi poſſunt. Velut quæ in abiete, quercu, palma, vite, ficu; tum ea quæ nuces, Cocos dictas, generat arbore; itemque alia apud Indos, è cujus ramis radices novæ pullulant, inque terram demittuntur. Item, in herbis, gramen, papaver, braſſica, hedera, pepones, ficus Indica foliis craſſis, ſine caule, ſuccreſcentibus,

Idem in ſtirpibus locum habere.

bus, aloë. In quibus rurſus ea quam ſcimus, minus diſſimilium eſt copia. Ad hæc propagandi viæ variæ inſpiciantur; velut ex ſeminibus, nucleis, taleis, inſitione, bulbis. Quibus omnibus nihilo pauciora, aut minus miranda, in Planetarum terris reperiri, exiſtimandum ſit.

Sed quod in hac diſquiſitione præcipuum eſt, plurimamque jucunditatem habet, nondum attigiſſe mihi videor; quamdiu nullos in terris illis ſpectatores poſui, qui tot rebus creatis fruantur, pulchritudinemque, & varietatem earum, admirentur. Et video quidem, neminem fere eorum, quibus vel leviter hæc meditari contigit, dubitaſſe quin ſpectatores aliqui in Planetis collocandi ſint: non quidem homines nobis ſimiles, ſed animantia tamen ratione utentia. Nempe iis viſum eſt, qualemcunque terrarum iſtarum ornatum, velut fruſtra, nulloque fine aut conſilio, fore procreatum, ſi non hoc propoſitum fuiſſet, ut ab aliquo cerneretur, qui intelligere ejus elegantiam poſſet, fructumque ſimul percipere, & ſummi opificis admirari ſapientiam. Ego vero non hoc præcipuum argumentum habeo, cur animal rationis particeps Planetas incolere exiſtimem. Quid ſi enim dicamus ipſum Deum ſpectare quæ effecit; (alia quidem ratione quam nos, ſed videre eum quis dubitet qui oculos fabricatus eſt;) iiſque delectari, neque præterea quidquam requiri. Nonne enim ob hoc ipſum & homines condidit, & quicquid continet mundus univerſus? Itaque quod præcipue me movet, ut rationabile animal in Planetis non deeſſe credam, hoc eſt, quod nimia Terræ noſtræ præ cæteris illis eſſet præſtantia ac nobilitas, ſi ſola animal haberet tam longe cæteris omnibus animalibus, nedum ſtirpibus præcellens; in quo ineſt divinum quiddam; quo cognoſcit, intelligit, res innumeras memoria complectitur, veri expendendi judicandique capax eſt, cujus denique gratia quicquid terra progenerat paratum eſſe videtur. Omnia enim in uſus ſuos vertit. Lignis, lapidibus, metallis, domos exſtruit; Avibus, piſcibus, pecore & herbis veſcitur; Aquæ & ventorum commodis ad navigandum utitur; ex florum odore pulchriſque coloribus

In Planetis eſſe animantia, quæ ratione utantur.

voluptatem percipit. Si nullum in Planetis eſt ejuſmodi animal, quid eſſe queat, quod tanti æſtimandum ſit, quove is defectus penſetur? Pone in Jove majorem multo animantium varietatem; plures arbores, herbas, metalla: nihil erit in omnibus his, ob quæ tantum dignitatis accedat iſti mundo, ac noſtro propter humani ingenii mirabilem naturam. Hic ſi me judicium fallit, fateor me pretia rerum æſtimare neſcire.

Non obſtare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.

Nec dicat aliquis, tantum malorum ac vitiorum eidem humano generi ineſſe, ut merito dubitari poſſit, an, tale quodpiam animal Planetariis mundis tribuendo, dignitas iis ornamentumque, an his contraria acceſſura ſint. Primum namque non impediunt vitia, majori hominum parti inſita, quin ii qui virtutem, ac rectum rationis uſum ſectantur, tanquam pulcherrimum quid præſtantiſſimumque cenſendi ſint. Præterea credibile eſt, ipſa illa animi vitia, magnæ hominum parti, non ſine ſummo conſilio data eſſe. Cum enim Dei voluntate ac providentia talis ſit Tellus, ejuſque incolæ, quales cernimus; abſurdum enim foret exiſtimare omnia hæc alia facta eſſe, quam ille voluerit, ſciveritque futura; putandum eſt utique non fruſtra multiplicem adeo animorum diverſitatem mortalibus eſſe inſitam; ſed malorum cum bonis miſturam, quæque inde eveniunt infortunia, bella, calamitates, eo fine accedere, ut neceſſitate urgente ſtimuloſque admovente, ingenia excitentur, exerceanturque, dum quærimus ea quibus ab hoſtibus nos tutemur, quibuſve machinis teliſque eos perſequamur: Utque paupertatem ac miſeriam depellere conantes, varias artes exquiramus, naturamque ſcrutemur, ex cujus cognitione deinde auctoris potentiam prudentiamque admirari neceſſe ſit; quas forſan alias pari ſtupore ac beſtiæ præteriiſſemus. Nec enim dubitandum eſt, ſi in continua pace, omniumque rerum affluentia homines ætatem agerent, fieri poſſe ut admodum diu, non aliter fere quam bruta animalia, victuri ſint; omnis ſcientiæ expertes; pluriumque commodorum ignari; quibus melius jucundiuſque vita tranſigitur. Careremus mirifica illa ſcriben-

bendi arte, niſi ſumma in commerciis belliſque neceſſitas eam extudiſſet. Huic artem navigandi, huic ſerendi debemus, maximamque partem cæterorum quibus fruimur inventorum; itemque naturæ arcana fere omnia, inter experiendum reperta. Ita ea ipſa propter quæ incuſanda rationis facultas videbatur, poſſunt dici ad perficiendam exacuendamque eam plurimum prodeſſe. Nam & virtutes ipſæ, fortitudo animi, & conſtantia, vix aliter quam in periculis rebuſque adverſis apparere poſſunt.

Quod ſi igitur genus animalium rationabile in cæteris Planetis eſſe cogitemus, quod virtutibus vitiiſque fere iiſdem atque homines præditum ſit, id tanti eſſe exiſtimandum eſt, ut abſque iis, longè quàm Tellus hæc noſtra viliores futuri ſint.

Nec rationem in Planetarum incolis à noſtra diverſam eſſe.

Poſitis vero ejuſmodi Planetarum incolis ratione utentibus, quæri adhuc poteſt, anne idem illic, atque apud nos, ſit hoc quod rationem vocamus. Quod quidem ita eſſe omnino dicendum videtur, neque aliter fieri poſſe; ſive uſum rationis in his conſideremus quæ ad mores & æquitatem pertinent, ſive in iis quæ ſpectant ad principia & fundamenta ſcientiarum. Etenim ratio apud nos eſt, quæ ſenſum juſtitiæ, honeſti, laudis, clementiæ, gratitudinis ingenerat, mala ac bona in univerſum diſcernere docet: quæque ad hæc animum diſciplinæ, multorumque inventorum capacem reddit. Exſtaretne alibi diverſa ab hac ratio? cenſereturque injuſtum aut ſceleſtum in Jove aut Marte, quod apud nos juſtum ac præclarum habetur? Certè nec veri ſimile eſt, nec omnino poſſibile. Cum enim rationis, qualem hic agnoſcimus, ductu opus ſit ad tuendam vitam ac ſocietatem (nam & hanc apud Planeticolas reperiri oſtendemus) ſi contraria ejus decretis ſtatuantur, ſequetur ruina ac ſubverſio eorum, quibus ejuſmodi mens perverſa contigiſſet. At conſervatio, ut videmus, rerum conditori ubique propoſita eſt. Verum utut affectiones animi à nobis aliquatenus diverſæ ſint apud iſtos longinquarum terrarum habitatores, puta in his quæ ad amicitiam, iram, odium, honeſtatem, verecun-

diam, decorem attinent; non tamen dubitari poteſt, quin in veri inveſtigandi ſtudio, judicandis rationum conſequentiis, ac præſertim in ratiociniis, quæ ad quantitatem ac magnitudinem ſpectant, circa quæ Geometria verſatur, (ſi quid habent ejuſmodi, quod mox inquiremus) non, inquam, dubitari poteſt, quin prorſus ſimilis ſit, eademque via ingrediatur illorum ac noſtra ratio; quodque apud nos verum eſt, idem ſit in cæteris Planetis. Etſi vis ac facultas in his rebus major minorve illorum incolis fortaſſe quam nobis contigerit.

Sed jam nimis longè provectum me eſſe ſentio. Ante enim diſpiciendum erat de ſenſibus corporeis iſtorum in Planetis agentium, quibus ſi carerent, vix jam aut vitam, ut animalia, ſortiti eſſe videri poſſint, aut habere, in quo rationis uſum exerceant. Puto autem oſtendi poſſe probabilibus argumentis & bruta animantia, & quibus ratio ineſt, convenire, in his quæ ad ſenſus attinent, cum iis quæ terram hanc incolunt. Primùm namque ſi cogitemus quid ſit in animalibus videndi poteſtas, abſque qua neque paſcendi ratio eſſet, nec pericula vitandi; nec denique vita alia quam talparum aut lumbricorum; prorſus neceſſe eſſe intelligemus ut, ubi ſunt animalia his præſtantiora, ibi & viſu prædita ſint. Cum nihil ad vitam vel conſervandam, vel exornandam æque conducat. Quod ſi vero inſpiciamus mirabilem lucis naturam, ſtupendumque artificium, quo ad eam fruendam oculi comparati ſunt, facile cognoſcemus, perceptionem rerum procul diſtantium, cum circumſcriptione formarum, diſcrimen intervallorum, non alio modo, quam qui ex viſu ſit, inſtitui poſſe. Non enim poteſt hic ſenſus, imo nec alius quiſquam eorum quos novimus, exiſtere, quam ex motu extrinſecus adveniente. Qui motus, ut alibi explicuimus, in efficiendo viſu, à Sole proficiſcitur, aut ſtellis inerrantibus, aut igne; quorum particulæ celerrima agitatione concitæ, circumfuſam cæleſtem materiam continue pulſant, impelluntque; qui impulſus a proximis ad longe diſſitas citiſſime propagetur, fere eo modo quo ſonus per aërem. Abſque hoc motu, materiaque ætheris

Nec deeſſe illis ſenſus.

Nec viſum.

ris

ris qui intermedia cæli ſpatia complet, nec Solem nec ſtellas cernere poſſemus; neque etiam alia quæ propiora ſunt corpora; cum ab his ad nos idem ille motus repercuſſus pervenire debeat. Hic, oculorum ſenſu perceptus, lux appellatur. Inque eo ſenſu mirabile eſt ante omnia, quo pacto ad tantam ſubtilitatem perduci potuerit, ut minimâ cæleſtis materiæ commotiunculâ afficeretur, ſimulque qua ex parte illa oriretur perciperet. Tum quomodo nihil ſeſe mutuo impediant innumeri ejuſmodi pulſuum proceſſus, ſphæricæque ſuperficies, aliæ alias trajicientes. Hæc omnia tam mira ac ſubtili ratione conſtituta ſunt, ut nec minimam eorum partem hominum ingenia excogitare potuiſſent, cum vix etiam quomodo ſeſe habeant comprehendere queant. Quid enim tam mirabile, quam particulam corporis quandam ita fabricatam eſſe, ut ejus opera animal ſentiat procul poſitorum corporum figuram, poſitum, motum quemlibet, diſtantiam; idque etiam cum colorum varietate, quo diſtinctius ea dignoſceret. Oculi vero præter hæc artificioſiſſima conſtructio, quæ perfectam rerum extra poſitarum picturam in cava choroidis ſuperficie imprimere apta eſt, omnem profecto admirationem ſuperat, neque eſt in quo manifeſtius Geometriæ artem Deus exercuerit. Atque hæc non tantum ſolertia ſumma inventa & fabricata ſunt, ſed & videntur eſſe ejuſmodi, ſi quis propius attendat, ut non alia ratione perfici potuerint quàm hac quam cernimus. Nam neque lux aliter, quàm communicato motu per materiam cæleſtem, res longo intervallo remotas ſenſibus noſtris offerre poterat; nec oculorum artificio ullum aliud par dari ad diſtinctè referendas rerum imagines. Ut valde eos falli arbitrer, ſiqui hæc eadem multis modis ordinari potuiſſe contendere audeant. Quare omnino credibile eſt utrumque iſtud eodem modo ſe habere in Planetarum regionibus atque hic; neque aliam eſſe iis, quæ illic habitant animantibus, videndi rationem. Habebunt igitur oculos; atque etiam binos minimum, quo poſſint rerum ante pedes poſitarum diſtantias percipere, ſine quo vix tutò ingredi licet. Et hæc quidem ad vitæ uſum ne-

ceſ-

ceſſariò tribuenda ſunt animantibus Planetarum univerſis fere. Quæ vero ratione & mente prædita ſunt, cum alias quoque ex viſu utilitates capere poſſint, tantò magis conſentaneum eſt ut tam præclaro munere donata ſint. Nos enim colorum pulchritudinem, formarum elegantiam, ac concinnitatem viſu percipimus; legimus, ſcribimus, cælum & aſtra contemplamur, eorumque curſus, magnitudineſque metimur; quæ quatenus ad Planetarum incolas quoque pertineant, paulo poſt videbimus. Nunc illud prius quæramus an cæteros quoque ſenſus noſtros iis contigiſſe veriſimile ſit. Ac de auditu quidem multa ſuadent, ut cunctis, quæ illic ſunt, animalibus eum ineſſe credamus. Prodeſt enim plurimum ad vitam à periculis tutandam; cum ſonitu ac fragore ſæpe imminens infortunium cognoſcatur; præſertim noctu atque in tenebris, cum oculorum auxilium ereptum eſt. Videmus præterea ut animalia pleraque vocis ſono ſui ſimilia advocent, multaque inter ſe ſignificent, nobis quidem parum intellecta, ſed plura fortaſſe quam putamus. Apud ea vero quæ ratione utuntur, ſi cogitemus quam mirabilis ſit vocis & auditus oportunitas, vix credibile videbitur tam utilem ſenſum, tantumque loquendi artificium, hujus Terræ noſtræ, ac noſtri tantum cauſa fuiſſe inventum. Quomodo enim illis non multum deſit ad vitæ commoda, & felicitatem noſtræ ſimilem, qui tanto beneficio carent: aut quanam alia re penſari hoc poſſit? Quod ſi porro conſideremus, quam pulchre, quamque induſtrie natura hoc effecerit, ut idem ille aër, cujus reſpiratione vivimus, cujus flatu navigamus, qui, ut volare queant, avibus præſtat; ut, inquam, idem ille ad exprimendum proferendumque ſonum comparatus ſit; ſonus verò ad formandum, auribuſque ingerendum ſermonem; vix credemus inſignem hunc aëris uſum, in terris iſtis longinquis eam neglexiſſe? Eſſe enim illic aërem qui terris incumbat, vix dubitari poteſt, cum nubes in Jove apparere dixerimus. Sicut enim hæ ex aquæ guttulis minimis conſtant, ita ex particulis aquæ ſeorſim volitantibus magna ex parte formatur aër ille qui propius terram

Non auditum,

Nec per quem ſonus perferatur aërem,

ram circundat. Quem Planetarum globis adeſſe etiam hoc ſuadet, quod reſpirandi ratio, qua vita ſuſtentatur omnium quæ hic habemus animantium, videtur omnino ex univerſalioribus illis naturæ inſtitutis eſſe, velut nutriri ex fructibus terræ.

De ſenſibus autem reliquis animalium ut dicere pergam, eum ſanè qui ex tactu oritur, neceſſitate ſumma datum eſſe apparet omnibus iis quæ molli flexilique pelle teguntur, quò à lædentibus caveant refugiantque; cum abſque eo vulnera, plagas, contuſioneſque crebras acceptura fuerint. In quo tam provida natura fuit, ut, ne minimam quidem pellis particulam, doloris ſenſu vacare voluerit. Itaque hanc facultatem, tam neceſſariam ad conſervandam animalium incolumitatem, omnino credibile eſt etiam planetas inhabitantibus inditam eſſe. *Nec tactum;*

Odoratum vero ac guſtum quis non videt neceſſaria eſſe paſcentibus, quo conducibilia a noxiis, nihilve profuturis dignoſcant. Itaque ſi herbis, ſeminibus, aut fortaſſe carnibus quoque in regionibus iſtis animalia alantur; etiam his ſenſibus, tam ad cavendum, appetendumque neceſſariis, credibile eſt ea non deſtitui. *Nec odoratum, nec guſtum.*

Scio à nonnullis fuiſſe quæſitum, an non alii præter eos quinque quos diximus, naturâ dari potuerint. Quod quidem ſi concedatur, forſan dubitandum ſit animalium planetariorum ſenſus longè alios eſſe ac noſtratium. Nec ſanè obſtare quidquam videtur quo minus alii extare poſſint percipiendi modi: attamen cum perpendimus ad quos vitæ uſus unuſquiſque eorum, quos habemus, comparati ſint; non videtur ſaltem alius quiſquam neceſſarius adjungi potuiſſe. Nempe effecit providentia ut & propinqua, & longius remota, qualia eſſent oculis ſentiremus. Rurſus ut non viſa, ſive a tergo, ſive in tenebris, auditus exciperet. Item ut quæ nec oculi nec aures adeſſe nunciarent, alius tamen ſenſus qui in naribus eſt præſentiret, idque in canibus mirabili ut ſcimus ſubtilitate. Poſtremo effecit ut quæ quatuor iſtos ſenſus effugerent, quò minus in corpus impacta nocere poſ- *Nec horum ſenſus longe alios eſſe ac noſtratium.*

ſint, tactu perciperentur. Ita omnibus modis ſaluti conſervationique animalium conſuluit, nec quidquam amplius addi aut deſiderari poſſe videtur; ut proinde planetarum incolis vix aliud niſi ſuperfluum largitura fuerit.

Cum autem ex ſingulis ſenſibus, præter utilitatem, voluptas aliqua ad homines perveniat; velut ex guſtatu in cibis; ex odoratu in floribus & aromatis; ex viſu in contemplanda pulchritudine formarum, & colorum; ex auditu harmonicorum ſonorum; ex tactu in rebus venereis, (niſi peculiaris quidam ſenſus hic dicendus eſt) animalibus verò cæteris ex quibuſdam horum; nonne dicemus hæc naturæ munera fere eodem modo reliquorum Planetarum incolis diſtributa eſſe. Certè id quidem ratio poſtulare videtur. Sive enim cogitemus, quanto in univerſum, propter hæc, jucundior feliciorque vita reddatur, non debemus maximum ejus bonum noſtræ Telluris habitatoribus aſcribere, cæteras tenentibus denegare, quaſi res noſtræ rebus illorum multò præferendæ ſint. Sive ad voluptates, quæ in cibis capiendis, & in conjunctione utriuſque ſexus contingunt, attendamus; intelligemus hæc eſſe neceſſaria quædam veluti providæ naturæ juſſa, tacitè cogentis ad conſervandum, propagandumque animantium genus: vel etiam, in beſtiis quidem, fortaſſe genus ipſum propagari, ut utraque illa jucunditate fruatur, ut proinde, utroque nomine, in cæteris Planetis eadem reperiri conſentaneum ſit. Equidem cum hæc omnia quanti ſint, quantamque utilitatem habeant, conſidero; quamque admirabile ſit, tale quid, quale eſt voluptas, in rerum natura exiſtere; omnino adducor ut credam, non ſoli Telluri noſtræ, quæ de minoribus planetis unus eſt, rem tantam obtigiſſe. Et hæc quidem de voluptatibus iis quæ ſenſus corporeos afficiunt, rationis facultatem aut nihil, aut leviter tantùm. Sunt autem homini, præter iſtas, aliæ quoque; quæ mente tantum, & rationis ſenſu percipiuntur; aliæ cum lætitia conjunctæ; aliæ ſeriæ, neque ideo minoris faciendæ; velut quæ ex oblectatione ſcientiarum, inventorum, verique cognitione oriuntur; de quibus omnibus, an ad alio-

Ut nec voluptatem ex iis ortam.

rum

rum quoque planetarum incolas pertineant, in ſequentibus dicendi locus erit.

Superſunt alia nunc expendenda quæ in terris illis ſimilia eſſe rebus noſtris veriſimile ſit. De Elementis terræ, aëris, & aquæ, vidimus jam quàm probabile ſit ea in Planetis cæteris non deeſſe. Videamus & de igne, qui apud nos quidem non tam Elementum eſſe dicendus eſt, quam motus quidam concitatiſſimus particularum à certis corporibus abreptarum. Hoc verò, quidquid eſt, etiam Planetarum incolis datum eſſe, multa ſunt quæ veriſimiliter probent. Primum quòd non tam in Terra hac, quàm in Sole, ignis ſedes collocata videatur; ac ſicut, calore Solis, herbæ & animantia hic creſcunt ac foventur, ita quoque haud dubie in cæteris fiat Planetis. Cum autem intenſior calor ignem generet, credibile eſt illic quoque, ac præſertim in Soli propinquioribus, eoſdem aut majoris caloris gradus exiſtere, eorumque vi ignem. Deinde videmus quam multis modis excitetur, velut colligendis Solis radiis, repercuſſu pelvium aut ſpeculorum; ferri & ſilicis colliſione; lignorum attritu mutuo; herbæ non bene ſiccæ congeſtis acervis; ex fulmine; ex montium terræque ſulphureæ incendiis. Quare mirum eſſet, non aliquo ex iſtis omnibus, in Planetarum terris, eum accendi. Cogitemus deinde quanta apud nos ſit ignis utilitas, quantaque neceſſitas. Hujus enim beneficio frigoris incommoda depellimus in iis regionibus, ubi calor Solis minus viget propter radiorum obliquitatem, atque ita efficimus ne magna Terrarum pars inculta inhabitataque maneat; quod in omnibus Planetarum globis, ſive æſtatis hyemiſque viciſſitudines ſentiant, ſive perpetuo fruantur æquinoctio, æque neceſſarium eſt remedium; quoniam & in his, loca polis viciniora, parum juvari Solis calore certum eſt. Eodem igne nocti lucem inducimus, diemque velut alterum creamus, quo non parum temporis vitæ adjicitur. Itaque ob hæc omnia prorſus veriſimile eſt tanta re non ſolos Telluris incolas frui, ſed omnibus Planetis communiter eſſe conceſſam.

Ignem quoque Planetis communem eſſe.

Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non recte conjici.

Porro quæri poteſt de animalibus, tam ratione utentibus quàm brutis; atque etiam de ſtirpibus arboribuſque; an, quæ iſthic naſcuntur, noſtris magnitudine reſpondeant. Nam ſi hæc ipſorum globorum mole natura metiatur, eſſent in Jove ac Saturno animalia quædam decies aut quindecies altiora Elephantis, aut tantundem longitudine balænas noſtras ſuperantia. Tum illa quæ ratione prædita ſunt, gigantum corpora haberent noſtris comparata. Qua quidem in re nihil video quod vel mirum ſit, vel fieri nequeat. Nulla tamen ratione cogimur ut re ipſa id ita eſſe credamus; quandoquidem in multis rebus apparet non iis menſuræ regulis naturam ſe obſtrinxiſſe quæ noſtra opinione convenientiores videbantur. Veluti quod ipſorum globorum Planetariorum moles nequaquam pro diſtantia eorum a Sole conſtituta ſit, cum Mars manifeſto minor ſit Venere, etſi remotior: cumque converſio Jovis, ſuper axe ſuo, 10 horis peragatur; Telluris vero, tantò minoris, impendat horas 24. Poſſet vero dubitari, cum proportionem in his ita negligat Natura, an non fortaſſe pumiliones quidam ſint incolæ Planetarum, aut ranis muribuſve non majores. Sed oſtendam poſtea cur id nequaquam conſentaneum putandum ſit.

In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat.

Aliud quoque dubium exoriri poſſet, utrum genus unum tantum animalium quæ rationem ſortita ſint, an plura in Planetis ſingulis reperiantur, & num diſpari rationis vi. Ac profecto tale quid in Terra hac noſtra contigiſſe cernimus. Non de iis nunc dico quæ figuram hominum præferunt; (etſi de his quoque id non abſurde dici poſſit) ſed ſi quorundam è beſtiarum genere, ſenſum intellectumque ſpectemus; veluti canum, ſimiarum, caſtorum, elephantorum; imo & avium quarundam, & apicularum, ea talia ſunt, ut nequaquam ſolum genus hominum rationis particeps dicendum videatur. Apparet enim quoddam hujus inſtar in iſtis omnibus, quod, abſque ulla inſtitutione aut experientia, iis ineſſe deprehenditur.

Et inter ea Hominibus ſimilia.

Attamen dubitari nequit quin longè præcellat hominum intelligentia & ingenium, quippe innumeris rebus aptum, con-

conſilii ad futura capax, præteritorum memoria infinita præditum. Quod ingens præſtantiæ diſcrimen ſi perpendamus, credemus non ſine ratione, in cæteris quoque planetis, unum quoddam genus prætuliſſe naturam; atque eo magis, quod ſi plura forent eadem ingenii ſagacitate, poſſent nocere ſibi invicem, ac de poſſeſſionibus & imperio inter ſe contendere; quod nunc quoque faciunt nimis frequenter, licet unius generis ſint, quæ in Terra hac dominantur. Verum hæc utcunque ſe habeant, de iis nunc agamus terrarum iſtarum animalibus, quæ maximè cæteris ratione antecellunt; quæramuſque an ſciri poſſit, quibus in rebus ejus uſum impendant, & an habeant etiam artes ſcientiaſque ſuas, velut nos in hoc noſtro planeta. Quod quidem, inter ea quæ ad naturam eorum attinent, præcipuè expendi meretur. Sed, quo melius id fiat, paulò altius exordiendum eſt, vitaque & ſtudia hominum attentius inſpicienda.

Ac videtur quidem quatenus providendis procurandiſque rebus tantum neceſſariis homines intenti ſunt, ut nempe ab aëris injuriis tuti habitent; ut mœnibus incluſi ab inimicis ſibi caveant, ut leges condant ad ſecure ac tranquille vivendum; ut liberos educent; victum illis, ſibique parent; in his omnibus inquam nihil magnum admodum habere videtur rationis noſtræ uſus, cujus cauſa nos brutis animantibus anteferamus. Namque hæc pleraque iſtorum facilius ſimpliciuſque efficiunt; aliquibus nihil opus habent. Quin imo & virtutis, juſtitiæque ſenſus, propter quem paulo ante excellere mentem humanam dicebamus; itemque amicitiæ, gratitudinis, honeſti; quid aliud efficiunt, niſi ut vel vitiis hominum obſiſtatur, vel vita tranquilla & mutuarum injuriarum expers præſtetur; quod beſtiis ſponte ac naturæ ductu contigit. Jam ſi curas multiplices, animi ægritudines, concupiſcentiam, mortis metum, quæ omnia rationem illam noſtram comitantur, ante oculos ponamus; eaque cum vita parabili, quieta & innocua beſtiarum comparemus; videri poſſint harum plurimæ, ac præſertim ex avium genere, jucundius agere, & meliore quam homines ſorte frui. Nam

quod ad voluptates corporis attinet, haud dubie iis æque ac nos afficiuntur, quicquid contradicant novi quidam philoſophi; qui ſenſum omnem ita auferunt reliquis præter hominem animantibus, ut pro meris automatis aut neuroſpaſtis ea haberi velint; quorum abſurdæ, crudelique ſententiæ, miror quenquam accedere poſſe; præſertim cum & voce & verberibus fugiendis, & re omni contrarium beſtiæ ipſæ ſignificent. Imo vix dubito, quin miro pulchroque illo per aëra lapſu aves ſeſe delectari ſentiant; magis etiam ſenſuræ ſi intelligerent quantopere lentus ac humilis noſter inceſſus ipſarum pernicitate, ſublimique volatu ſuperetur. Quid igitur eſt in quo potiſſimum eminet humanæ rationis uſus, facitque ut antecellamus cæteris animantibus? Nihil æquè puto ac contemplatio naturæ, Deique operum; tum cultura ſcientiarum, quibus conſequimur ut eorum præſtantiam, magnitudinemque aliqua ex parte cognoſcamus. Abſque enim diſciplinis quid eſſet contemplatio? quamque multum intereſt inter eos qui Solis pulchritudinem, utilitatemque, & cælum ſideribus ornatum otioſe intuentur, alioſque doctiores qui curſus iſtorum omnium ſcrutantur: quomodo affixæ, quæ dicuntur, ſtellæ à vagis differant, quæque cauſa ſit diverſarum anni tempeſtatum intelligunt: qui denique ſubtili ratiocinio magnitudinem Solis ac Planetarum, ſimulque diſtantiam eorum metiuntur; quantumque item inter eos qui animalium varios motus agilitatemque mirantur, & hos qui fabricam omnium membrorum, artificioſiſſimamque compagem, architecturamque in iis ſpeculantur? Quod ſi igitur Planetæ reliqui dignitate non cedunt Telluri noſtræ, ut in ſuperioribus principii fundamentique loco poſuimus; oportet ibi animalia exiſtere, quæ non ſolum naturæ opera ſpectent & admirentur, ſed quorum ratio in examinandis, intelligendiſque iis occupetur, nec minora quam nos conſecuta ſit. Itaque non tantum ſidera intuentur, ſed & Aſtronomiæ ſcientiam excolunt; neque aliud obſtat quo minus hoc veriſimile credamus, quam ſuperba illa noſtrarum rerum æſtimatio, quæ difficulter ſane deponitur. Scio tamen futuros,

Humanam rationem præ illa brutorum præcipue eminere in contemplatione naturæ.

Hinc Planetarum incolas ſcientias excolere, & inter eas, Aſtronomiam.

ros, qui dicant nimis audacter nos iſta Planetarum incolis tribuere: multorum quippe veriſimilium accumulatione huc eſſe perventum; quorum ſi unum quodpiam contra ſe habeat, quam poſitum ſit, cadat, velut in vitioſa ædificatione, omne quod ſuperſtruximus. Sed ſcire eos velim, hoc quod de Aſtronomiæ ſtudio diximus, omiſſis fere omnibus hactenus adductis confirmari potuiſſe, atque inde initium fieri. Poſtquam enim poſitum fuit Terram hanc inter Planetas eſſe habendam, neque iis dignitate aut ornatu præferendam; quis dicere audeat in ea ſola reperiri, qui ſpectaculo Naturæ, quod unum pulcherrimum ac magnificentiſſimum eſt, fruantur? aut inter eos quibus hoc contigit, nos unos eſſe quibus cæli arcana penitius perfectiuſque perſpecta ſint? Ecce igitur & hac breviore via comprobata in Planetis Aſtronomiæ cognitio, ex qua & animal rationis compos, & pleraque alia quæ præceſſere, illis ineſſe conſequebatur. Adeo ut, ad priora confirmanda, hæc quoque noviſſima argumentatio conducat. Quò vero magis probabile fiat, ſaltem in ſuperioribus Planetis, Jove ac Saturno, Aſtronomiæ notitiam non deeſſe, conſiderandum eſt, quod ſi homines ad ſidera obſervanda impulit, ut credi par eſt, admiratio & pavor in defectibus Solis & Lunæ; multo magis, in utroque hoc Planeta, ea ratio valere debuit, propter cotidianas fere Lunarum, crebraſque Solis, quæ illic contingunt, eclipſes. Ut ſi quis æquè ignorare ponatur quid rerum in Planetis omnibus geratur, multo veriſimilius dicturus ſit Aſtronomiam in majoribus illis duobus, quàm in hoc noſtro, vigere.

Poſita autem apud Planeticolas hujus ſcientiæ cognitione & uſu, quam multa hinc præterea conſequuntur quæ de vita ſtatuque eorum reliquo, præter jam dicta, novas conjecturas afferant?

Et quæ ei inſerviunt artes mechanicas.

Primùm enim nulla obſervatio ſiderum, ad motus eorum inveſtigandos, abſque organis inſtitui poteſt; ſive ea è metallo, ſive è ligno aliave ſolida materia fabricata ſint. Quod ut fiat, nec fabrorum inſtrumento, ſerra, aſcia, dolabra,

mal-

malleo, lima, carere poſſunt; neque hæc habere abſque uſu ferri aut æque duri cujuſpiam metalli. Sed & circuli arcus in partes æquales diviſi, aut lineæ rectæ in inæquales, in iſtis organis requiruntur. Atque hic jam Geometriæ & numerorum ratio arceſſenda eſt. Sed ante omnia quoque neceſſe eſt ut obſervationum memoria ad poſteros tranſmittatur; ut tempora & Epochæ annotentur; quæ ſine ſcripto non videntur explicari poſſe. Oportet igitur ut & ſuam ſcribendi artem habeant, multum fortaſſe diſſimilem noſtræ, qua fere omnes populi utuntur, ſed quæ vix ingenioſior, aut ad diſcendum facilior eſſe queat. Quis enim non videt longe eam præferendam eſſe Sinarum innumeris characteribus, multoque magis funiculorum nodis, aut pictis imaginibus, quæ apud barbaros Mexicanos Peruvianoſque in uſu erant. Omnium quidem Regionum homines aliquam ſcribendi, aut quoquo modo annotandi, artem quæſiviſſe videmus: quò minus mirum ſit, ſi & Planetarum incolæ, neceſſitate coacti, eam repererint, ac deinde ad Aſtronomiæ aliarumque diſciplinarum ſtudia adhibuerint. Neceſſitas vero ſcripturæ in rebus Aſtronomicis etiam ea re cognoſcitur, quod cum hypotheſibus variis, ſiderum motus, quaſi divinandi ſint; eæque hypotheſes priores in ſequentibus corrigendæ, prout obſervatis & Geometriæ ratiociniis vitia earum coarguuntur; nihil horum poſteris tradi poteſt, niſi literis conſignatum, figuriſque expoſitum.

Ut & Geometriam, Arithmeticam,

Et ſcribendi artem.

Poſtquam vero omnia hæc jam iis conceſſerimus, longe etiamnum præſtantior perfectiorque apud nos erit ſiderum ſcientia; vel propter agnitam ſyſtematis univerſi veriſſimam formam, vel propter uſum teleſcopiorum, quibus Planetarum corpora, magnitudineſque & varias formas intuemur; ſuperficiei lunaris montes, montiumque umbras; ſtellarum ingentem multitudinem, aliaque plura non alias videnda, percipimus. Ut fere neceſſe ſit, niſi rurſus nobis tanquam hac parte felicioribus blandiri volumus, etiam illam cognitionis rerum cæleſtium conſummationem Planeticolis tribuere; itemque videndi aciem, quæ vel noſtram longe exuperet,

Opticam.

ret, vel lentium vitrearum, aut ſpeculorum adminiculo ſicut noſtra, adjuvetur. Quod tamen dicere vereor, ne quis, ex hoc uno audacius aſſerto, cætera omnia æſtimanda putet, ac riſu digna clamitet.

At non ſine ratione, ut videtur, objiciet quiſpiam, Planetarios noſtros fortaſſe omni ſubtiliore ſcientia deſtitui, quemadmodum Americanæ gentes, priuſquam ad illas Europei penetraſſent. Quas ſi reſpicimus, itemque in Africa, Aſiaque permultas æque barbaras, videbitur hoc tantum ſummo opifici propoſitum fuiſſe, ut vita fruantur homines, naturæque bonis & voluptatibus contenti ſint, grato animo omnium datorem colentes; ſcientiarum vero inquiſitionem præter naturam paucos aliquos affectaſſe. Talia vero dicentibus non deeſt quod reſponderi poſſit. Prævidit enim certe Deus hominum ingenia eo eſſe proceſſura, ut res cæleſtes ſcrutarentur; ut artes vitæ utiles reperirent; maria quoque navigarent, metalla effoderent. Poſſetne enim horum quidquam præter mentem infinitæ illius intelligentiæ contingere? Quod ſi prævidit, etiam hominum generi ea deſtinata ſunt, nec poterunt artium & doctrinarum ſtudia, quaſi præter naturam eſſent, exiſtimari, quæ in ipſa natura indaganda occupantur. Præſertim cum tanta illa cupiditas amorque ſciendi non poſſint cenſeri fruſtra hominum animis infixa eſſe. Inſtabunt vero rurſus dicentque, de ſiderali ſcientia potiſſimum, ſi ad hanc quoque homines nati ſunt, cur tam pauci ad eam attendunt? Primum enim ex quatuor Orbis partibus, ſola fere eſt Europa, in qua Aſtronomiæ ſtudia excolantur. Nam Aſtrologiam divinatricem futurorum, quæ non ſcientia, ſed miſerum quoddam ac ſæpe noxium delirium eſt, ne nominandam quidem hic arbitror. At in Europæ Nationibus non unus è centum millibus hæc ſtudia amplectitur aut addiſcere curat. Tum ad tempus quod attinet, multa ſæcula effluxiſſe dicent, antequam aut Aſtronomiæ, aut Geometriæ, ſine qua illa diſci non poteſt, ulla rudimenta innoteſcerent. Sciri enim quo tempore in Ægypto & Græcia primum exortæ fuerint. Ac recte quoque adjicient non adhuc octoginta annos præteriiſ-

Has ſcientias homini præter naturam non eſſe.

ſe, ex quo verus ac ſimplex Planetarum motus, rejectis Epicyclorum figmentis, repertus ſit; atque ita demum Aſtronomia cum naturæ cognitione conjuncta. Hiſce ut occurratur, addam ad ſuperius reſponſum, quod à divina providentia petebatur, dubitari non poſſe, quin ea conditione homines nati ſint, ut multo temporis decurſu paulatim artes diſciplinaſque eruant; nullam enim harum iis ingenitam eſſe, aut ſubito à Deo infuſam, & has de quibus nunc agimus, omnium eſſe difficillimas remotiſſimaſque: ut magis mirum ſit unquam incipere eas potuiſſe, quam tam tarde fuiſſe inſpectas. Pauci fateor ſingulis ætatibus has curant, aut ad ſe pertinere exiſtimant: ſed ſi multorum ſæculorum tempora cogitentur, non exiguus fiet illorum Numerus; quos, quemadmodum ſibi videntur, reliquis beatiores eſſe quis negaverit? Denique paucorum induſtria in his rebus exerceri ſatis erat, cum inventorum utilitas ad nationes totas genteſque longe porrigatur. Cum igitur hujus Terræ incolis, etſi paucis tantum, ad ea percipienda ingenium & aptitudo contigerit; nihiloque putandi ſint cæterorum planetarum habitatoribus præſtantiores felicioreſve; manet profecto, quam inveneramus, veriſimilitudo, ut etiam apud illos reperiantur qui cognitione Aſtronomiæ non careant. Nunc ad alia pergamus quæ inde conſequi, neceſſe eſt.

Oſtendimus quomodo unà cum hàc ſcientia, non ſolum Geometria & Arithmetice, ſed & Mechanicæ artes, inſtrumentaque incolis Planetarum concedenda ſint. Hic verò jam ſponte obvenit ut quæramus, quo pacto inſtrumentis illis, Machiniſque, & ad ſidera obſervanda organis uti poſſint, aut quomodo literas ducere; quæ omnia nos manuum opera exequimur. Itaque neceſſario & manus habebunt, vel aliud quodpiam, quod vicem earum fungi poſſit, membrum. In quibus hominum generi tantum eſſe præſidii exiſtimabat è veteribus Philoſophis quidam, ut in iis cauſam reponeret omnis eorum ſapientiæ. Qui, ut puto, hoc ſenſit, abſque manuum opera homines ad cultum animi, rerumque cognitionem non fuiſſe perventuros. Et vere quidem

Planeticolas manus habere.

dem ille. Finge enim pro manibus datas fuiſſe ungulas, ut equis & bobus; nunquam nec oppida nec domos, licet ratione inſtructi, ædificaſſent. Nihil de quo loquerentur habuiſſent, niſi de iis quæ ad pabulum, aut ad conjugium, aut ſui tutelam attinent. Omni ſcientia, omnique rerum memoria caruiſſent: Denique à beſtiis parum abfuiſſent. Quodnam porro inſtrumentum æque accommodatum ac manus eſſe poſſit ad innumera illa ad quæ nobis uſui ſunt, obeunda? Elephanti proboſcide mirabiliter utuntur, qua & amplecti quidvis & projicere, minutioraque quævis è ſolo tollere norunt: unde & manus eorum pars illa dicta eſt, cum reipſa ſit in longum productus naſus. Roſtro quoque aves pleræque nidos exſtruunt, alimentaque congerunt. Sed harum nihil eſt quod non manuum oportunitati longè concedat. Et eſt ſane, tam illarum quam brachiorum, mirabilis quædam machinatio; ut protendi, reduci, inque omnem partem moveri poſſint. Tum mirâ induſtriâ inſtituti digitorum ac pollicis articuli, ut nervorum attractu quælibet prehendant, firmiterque contineant. Ut omittam ſenſum illum, in extremis digitis, exquiſitiſſimæ ſubtilitatis; quo vel in tenebris pleraque corpora internoſcimus. Patet itaque aut manus brachiaque, aut aliud quid eorum loco, quod vix æque aptum excogitari poteſt, Planetarum populis datum eſſe, ne non ſolum nobis, ſed & ſimiarum & ſciurorum generi, plus indulſiſſe hac in re natura exiſtimetur.

De pedibus vero minus etiam dubitabitur, ſi repetamus ea quæ ſupra diſſeruimus de vario animalium inceſſu, qui non videtur aliis modis, quam quos ibi recenſuimus, cogitari poſſe. Inter eos vero non eſt, qui tam bene Planeticolis ratione præditis conveniat, quam quo & nos utamur. Niſi forte & volandi facultatem in aliquibus Globorum iſtorum acceperunt. Quod minus probabile tamen propter vitam in ſocietate degendam, de qua poſtea dicemus. *Et pedes;*

Non caret autem veriſimilitudine, erectos oculos, vultumque ad ſidera contemplanda iis contigiſſe, quandoquidem hoc in hominum corpore providentiâ divinâ ſic inſtitu- *Erectos oculos, vultumque.*

tum videtur, & a Philoſophis merito celebrari ſolet. De reliquorum vero membrorum poſitu, ſi ſapientiam artificis laude dignam cenſemus, quod oculos in ſuprema corporis parte collocaverit; ſordidiora vero membra procul inde, atque a conſpectu quodammodo removerit; nonne putandum eſt eadem fere obſervaſſe illum in formandis iſtorum procul habitantium corporibus? Nec enim propterea dicimus figuram noſtræ ſimilem iis tribuiſſe. Eſt enim infinita quædam animo concipienda formarum poſſibilium varietas, qua & ſingulæ quæque partes iſtorum corporum à noſtris differre queant, & totorum exterior interiorque œconomia. Cernimus quam aptè & commodè animalium noſtrorum quædam lana aut pilis veſtiantur; alia elegantius etiam plumis pennisque. Quidni iſti in Planetis, quos rationis participes diximus, aliqua ſimili ratione tecti ſint? propter quod meliori quidem conditione beſtiæ, quam homines, apud nos eſſe videntur. Niſi hoc eo fine ſic conſtitutum fuit, ut ipſa nuditas neceſſitatem hominibus imponeret quærendi ac fabricandi varia operimentorum genera, atque hinc etiam ingenii exercendi materia exiſteret. Et apparet ſane, ex hac neceſſitate, non minimam commerciorum, artificiorumque mechanicorum occaſionem naſci. Sed & propterea forſan nudos homines natura produxit, ut pro arbitrio ſuo tenuius denſiuſve amicti incedere poſſint; atque ita ad quaſvis terrarum oras inhabitandas ſeſe componere. Alia vero major hac, quam diximus, differentia intelligi poſſet inter corpora Planetariorum ac noſtra; cum animalia quædam ita à natura formata reperiantur, ut veluti oſſa extrinſecus habeant, carnes introrſum, atque oſſibus incluſas, qualia ſunt cancri, aſtacique, & fere etiam teſtudines. Attamen hanc membrorum compagem, & in paucis vilioribus tantum illa ſecuta eſt, & Planetarum incolis, quo minus eam tribuam, facit, quod ſubtili varioque digitorum uſu cárituri eſſent, quo tam valde eos opus habere oſtenſum fuit: nam abſurda ſpecie non multum alioqui moverer.

Nec tamen hinc ſequi eorum formam noſtræ plane ſimilem.

Etenim omnino cavendum eſt ab errore vulgi, cum animum

Quo minus animus ra-

mum rationis capacem non alio in corpore, quam noſtris ſimili habitare poſſe ſibi perſuadet. Ex quo factum eſt, ut populi penè omnes, atque etiam Philoſophi quidam, humanam formam diis adſcripſerint; Imo ut, à ſimili perſuaſione, cuidam Chriſtianorum ſectæ nomen inditum fuerit. Hoc vero non niſi ab hominum imbecillitate & præjudicata opinione proficiſci quis non videt? uti illud quoque, quod eximia quædam pulchritudo humani corporis eſſe putatur: cum tamen ab opinione & aſſuetudine id totum quoque pendeat, affectuque eo, quem cunctis animalibus natura provida ingeneravit; ut ſui ſimilibus maxime caperentur. Illa verò tantum poſſunt, ut non ſine horrore aliquo animal homini multum diſſimile conſpectum iri credam, in quo rationis & ſermonis uſus reperiretur. Nam ſi tale ſolummodo fingamus aut pingamus, quod, cætera homini ſimile, collum quadruplò longius habeat, vel oculos rotundos duploque amplius diſtantes; continuo eæ figuræ naſcuntur, quas non poſſimus intuentes non averſari, quamvis ratio deformitatis nulla reddi queat.

tionis capax etiam alii formæ inhabitet, nihil impedire.

Dixi in ſuperioribus cum de magnitudine agerem incolarum qui in Planetis ſunt, veriſimile videri non eſſe eos valde exiguos nobiſcum comparatos. Suadet enim hoc primò, quod probabile ſit, ſicut corpora hominum ſe habent ad Telluris magnitudinem, ut peragrare univerſam poſſint, atque ita formam molemque ejus cognoſcere; eodem modo & in cæteris Planetis incoliſque eorum rationalibus ordinatum eſſe; niſi hac in re, quæ ſane magna eſt, nos ipſis rurſus præferre velimus. Deinde cum ſiderum ſcientiam & obſervationes apud eos exerceri oſtenderimus, ſequitur ut & corpora nacti ſint lignis metalliſve tractandis, inque inſtrumenta machinaſque adaptandis, idonea. Quæ & eo præſtabiliora ſunt quo ampliora. Ac ſane ſi homunciones quoſdam, muribus non majores, cogitemus, non poſſent ii ſiderum animadverſiones, quales requiruntur, inſtituere; nec inſtrumenta ad eas parare, aut diſponere. Itaque omnino vel æquales nobis ponendos eſſe

Planeticolas nobis vel æquales vel majores eſſe.

exiſtimo, vel majores, ac præſertim in Jove, Saturnoque, quorum Globi tanto Tellurem noſtram ſuperant.

Eos in ſocietate vivere.

Porrò quia, ut diximus, aſtronomiæ ſtudium ſine annotatione obſervatorum non poteſt procedere, ars vero ſcribendi non niſi in ſocietate ratione utentium, & cogentibus vitæ neceſſitatibus, inveniri potuit; neque magis ars fabrorum aut fuſoria; ſequitur ex eo (quod ſupra dicebam) & ſocietates coli apud Planetarum indigenas, ac mutuas operas eos inter ſe præſtare; adeoque hac parte ſimilitudinem magnam ibi eſſe noſtratium rerum. Quamobrem & certas ſtabileſque ſedes potius quam ambulatoriam vitam iis convenire dicendum eſt. Quid igitur? an & cætera ſociali vitæ propria habebunt? leges, Magiſtratus, tecta, urbes, mercaturas aut rerum permutationes? Certe equidem apud barbaros Americæ & inſularum populos, cum primum ad eos perventum eſt, eadem hæc fere jam in uſu erant. At non propterea negaverim aliter iſta in Planetis cæteris ſe habere poſſe quam apud nos; cum ex iis quædam ſint quæ abeſſe queant à ſocietate animalium ratione præditorum; eoque tantum excogitata, ne ratione male utamur & cum aliorum injuria, itaque ſocietas ſolvatur. Poſſunt enim in aliis iſtis globis in ea rerum abundantia verſari, ut nihil alieni appetant, rapiantve. Poſſunt ea eſſe æquitate, ut pacem perpetuo colant, nec ſibi invicem inſidientur, aut mortem inferant; imò ut neque oderint nec iraſcantur; quod ſi eſſet, multo quàm nos feliciores putandi ſint. Sed veriſimilius eſt, ut quemadmodum apud nos, ſic ibi quoque bonis mala, ſapientiæ ſtultitia, paci bellum miſceatur, nec deſit egeſtas artium magiſtra. Quia & ex his utilitatem aliquam proficiſci antea oſtendimus; &, ſi nulla eſſet, tamen nec præferendi res illorum rebus noſtris cauſam habemus.

Colloquiorum jucunditate frui.

Quod autem nunc dicam, audacius, ſcio, videbitur; nec tamen probabilitate caret. Nempe, ſi in ſocietate (quod jam penè obtinuimus) vivant gentes Planetarum; etiam, præter commoda inde provenientia, voluptate aliqua tali eas affici, quali nos, ex congreſſibus colloquiiſque amicorum,

amo-

amoribus, jocis, ſpectaculis. Hoc, inquam, probabile eſt, quia ſi nihil horum Planeticolis concedamus, ſed ſemper eos ſeriò, ac ſine omni hilaritate, aut animi remiſſione agere putemus; ingens vitæ condimentum, quoque vix illa carere poſſit, iis ademptúri ſimus, atque ita noſtram hanc beatiorem facturi; contra quam ratio poſtulat.

De reliquis vero occupationibus & ſtudiis illorum ut porrò inquiramus; videndum eſt quænam iſtorum, præter ea quæ jam diximus, cum noſtris aliquam ſimilitudinem habere probabile ſit. Domos ſibi eos conſtruere, ideo vel maxime credere libet, quòd & pluvias in terris illis cadere oſtendimus. Sequebatur enim hoc ex eo, quod in Jovis Planeta nubium quidam mutabiles tractus cernuntur; vapores, aquamque haud dubie continentes: quam aliunde quoque illic non deeſſe argumentis adſtruebamus. Erunt ergo & imbres & venti, quia attractum à Sole humorem recidere in terram neceſſe eſt; & calore ſoluti vapores ventorum cauſa ſunt; quorum flatus ex illa nubium Jovialium mutabili facie cognoſcitur. Adverſus hoc ergo, ut noctes tuto & quiete tranſigant (habent enim & noctes & ſomnum proinde, uti nos) munire ſe eos, caſaſque ac tuguria ædificare, aut ſpecus effodere, veriſimile eſt. Atque eo magis quod omne genus animalium, apud nos, exceptis piſcibus, ad ſui tutelam hæc molitur. Cur vero caſas & tuguria, & non domos amplas & magnificas Planetarum habitatoribus exſtrui credamus, niſi quod non poſſumus res noſtras non præ omnibus pulchras perfectaſque putare. Qui autem nos? Nempe in globulo illo vitam agentes, qui non decies milleſimam partem globorum Saturni aut Jovis æquet, ſi corporum moles inter ſe conferantur. Nulla equidem ratio adferri poteſt cur non Architecturæ elegantiam, ſymmetriamque, æque cognitam habeant in iſtis cæteriſque Planetis, ac nos in noſtro: nec cur non palatia, turres, pyramideſque alicubi noſtris multo altiores ſumptuoſioreſque, nec minori concinnitate exædificent. Cumque multiplex ſit hominum in his rebus induſtria; ut in cædendis lapidibus, coquenda calce & lateri-

Domos adverſus pluviam exſtruere.

ribus; cum ferro, plumbo, vitro utantur, atque ad ornatum auro quoque; his omnibus nihilo inferiora illic haberi viriſimile eſt.

Si vero diviſa eſt illis, ſicuti nobis, Globi ſui ſuperficies, ut pars terram, pars maria contineat; uti ex ſupra memoratis Jovis obſervationibus colligi poteſt, quia nubes vix aliter quam ex maris amplis tractibus enaſcerentur; permagna ratio eſt ut & navigare eos putemus. Cum alioqui etiam rem tantam, tamque utilem, noſtræ Telluris Globo ſoli non abſque arrogantia aſcripturi ſimus. Præſertim verò in Jovis Saturnique maribus commoda eſſet navigatio propter Lunarum plurium utrobique copiam; quarum ductu longitudinum menſuram, quam vocant, quæ nobis non contigit, facile conſequi poſſint. Quod ſi navium uſum habent, quam multa præterea habebunt quæ ad eas pertinent; Vela, anchoras, funes, trochleas, gubernacula; & horum uſum peculiarem quemadmodum nos; ut vento penè contrario navigetur, in contrarias vero partes eodem vento facillime. Nec fortaſſe nauticæ pyxidis invento carebunt; ſiquidem motus materiæ magneticæ, quæ terræ globum continue pervadit, eſt ejuſmodi quid, ut cæteris quoque planetis convenire cenſeri poſſit. Mechanicæ quidem ſcientia, & Aſtronomiæ, in re navali neceſſario requiritur, atque adeo utriuſque harum magiſtra Geometria, de qua jam ante aliquid attigimus.

Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.

Exiſtimo autem, etiamſi nec ad iſtas artes nec ad alias quaſdam reſpiciamus, in quibus vel neceſſitas vel occaſio Geometriæ inveniendæ initium fecerit, non deeſſe rationes, quibus veriſimile fiat ejus notitiam Planetarum incolis obtigiſſe. Sive enim cognitionis ipſius pretium ac dignitas ſpectetur, in qua ſingularis quidam intelligentiæ eſt uſus, ac certa indubitataque veri comprehenſio, quanta in nullis rebus diſciplinisve aliis reperitur: ſive quod eſt ejuſmodi natura ſua, ac talia ejus axiomata & effata, ut quocunque loco & tempore, aut quibuſcunque in mundis extet, prorſus eadem ubique eſſe debeat; videtur omnino non ſolis Telluris noſtræ incolis res talis parata aut oblata eſſe. Quid quod figuras Geo-

Ut & Geometriam.

Geometricas, velut circulos, triangula, polygona, ſphæras, multis modis natura ipſa oculis objicit, ad variaſque eorum proprietates indagandas quaſi invitat; in quarum contemplatione, etiam extra utilitatem omnem, ſumma eſt oblectatio. Quis enim non admiratur, cum diſcit ea quæ de circulo in Elementis Euclideis, & Apollonii locis Planis docentur? aut quæ de ſphæræ ſuperficie & quadratura Parabolæ Archimedes prodidit, aut recentiorum ſubtiliſſima inventa? Quorum omnium eadem, & ad diſcendum æque expoſita, eſt veritas in Saturno, ac Jove, atque apud nos, & ex iiſdem ſimpliciſſimis principiis pendens, quo facilius credi poteſt pulcherrimi jucundiſſimique ſtudii in illis ac cæteris planetis aliquos participes eſſe: Etſi præcipue hoc ſuadet utilitas quæ ex eo in omnem vitam emanat. Quod ſi jam eo uſque rei Geometricæ peritos qui in Planetis ſunt dicerem, ut & Tabulas Sinuum, & Logarithmos, & calculum Analyticum invenerint; abſona ac pene ridicula proferre viderer. Nec tamen quidquam obſtat quin horum aliquid reperiſſe potuerint, aut aliquando reperturi ſint; atque etiam his noſtris fortaſſe majora. Non debemus enim, ut jam ſæpe diximus, præferre nos ipſos ac res noſtras rebus Planeticolarum.

Cæterum illud quod uniuſmodi & æternum in Geometrica ſcientia ineſſe animadvertimus, ſimiliter quoque in Harmonicis inveniri certum eſt; cum conſonantiæ omnes conſtanti menſura ac proportione conſtituantur; omnis vero phtongorum ordo, omniſque cantus delectatio, etiam vocis ſingulæ, in conſonantiis fundata ſit. Quo fit ut apud omnes gentes eadem tonorum intervalla canantur, ſive per gradus continuos, ſive ſaltu vox progrediatur. Imo animal quoddam in terris Americæ reperiri fide digni auctores narrant, quod ſex muſicos tonos deinceps voce exprimat: Ut appareat ipſam naturam immutabili ratione eos præſcribere. Quandoquidem igitur quæ huc ſpectant, certa quoque & unica, & neceſſaria ratione ſeſe habent, veriſimile eſt, non minus quam Geometriæ, *Muſicam;* etiam

etiam Muſicæ oblectationem ad plures quam ad nos pertinere. Poſitis enim aliis terris atque animalibus ratione & auditu pollentibus, cur tantum his noſtris contigiſſet ea voluptas, quæ ſola ex ſono percipi poteſt? Neſcio equidem quantum apud alios valiturum ſit argumentum, quod hic ab unitate, & immutabili natura iſtarum artium petiimus; mihi non leve aut contemnendum videtur, nec multum ei cedere, quo in ſuperioribus uſus ſum, cum videndi facultatem Planetariis animalibus convenire docui.

Porro ſi tonis harmonicis & cantu delectentur, vix quoque fieri poteſt quin & inſtrumenta quædam muſica repererint; quoniam & caſu in hujuſmodi inventa incidere contingit: velut chordis valide contentis, aëris ſono, cannarum aut cicutarum ſibilo. A quibus initiis, ſicuti ad teſtudines, citharas, tibias, & organa polyplectra nos pervenimus, ita illi quoque non minus elegantia excogitare potuerint. Sed quemadmodum certi definitique licet ſint toni, cantuſque intervalla, tamen apud diverſos populos alium atque alium eſſe canendi morem ac normam videmus; ut olim apud Dores, Phrygas, Lydos; noſtra ætate apud Gallos, Italos, Perſas: ita fieri poteſt ut ab omnibus his longius abeat Planetariorum Harmonice, quamvis illorum auribus gratiſſima. Cur vero noſtra rudiorem opinemur nulla ratio eſt; neque etiam cur non & chromaticis ſonis, & quibuſdam Enarmoniis utantur? cum hemitonia quoque natura ſuppeditet, certiſque proportionibus definiat. Imo ne minus aſſecuti ſint hiſce in rebus quam nos, etiam plurium vocum aut chordarum concentus, artificioſaque permiſtio, & diſſonantium tonorum, & tritoni, & diapente diminutæ uſus iis fortaſſe concedendus ſit. Scio vix aliquam veriſimilitudinem apud multos hæc habitura, ac minorem etiam, ſi æque doctos dicamus in Jove aut Venere incolentes, ac ſunt ii qui in Gallia, Italiave plurimum hac arte excellunt. Et tamen fieri poteſt ut vel illis peritiores ſint, ac præcipue in parte Theoretica hujus artis ea perſpexerint, quæ apud noſtrates hoſce parum hactenus intelle-

Quæ tamen à noſtra diverſa eſſe poſſet.

cta

ſta ſunt. Si enim ex noſtris Muſicis quæras, cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur, dicent alii nimiam dulcedinem devitari, quæ ex gratiſſimæ conſonantiæ iteratione naſcatur: alii varietatem in harmonicis ſequendam eſſe. Hæc enim præcipui artis auctores, cumque iis Carteſius, adferunt. At Jovis aut Veneris incola forſan veriorem hanc cauſam demonſtrabit, quod à Diapentè ad aliam deinceps pergendo, tale quid fiat, ac ſi repente toni ſtatum immutemus; cum Diapente, unà cum interjecto ditoni ſono, (qui ſi deſit, mente ſuppletur) toni ſpeciem certo conſtituat: hujuſmodi vero ſubita commutatio auribus merito injucunda inconditaque judicetur; cum etiam in univerſum ea plerumque durior accidat, (præterquam in tranſitu) quæ fit à tribus ſonis conſonis, ad trium aliorum harmoniam, nullo priorum manente. Sciet etiam ille idem fortaſſe, quod nemo adhuc animadvertit noſtrorum hominum, cur in nullo vocis unius, pluriumve cantu, tonus ſervari poſſit in eadem altitudine ac tenore, niſi conſonantia intervalla pleraque ultro, ac nemine advertente, ita temperentur, ut à perfectione ſumma nonnihil deſciſcant. Et cur optimum ſit hoc temperamentum in chordarum ſyſtemate, cum ex Diapente quarta pars commatis ubique deciditur. Quod idem abſque ſenſibili diſcrimine effici ex diviſione Diapaſon in partes æquales 31, indeque Cyclum quendam Harmonicum in ſe redeuntem exiſtere, non ita pridem oſtendimus. Quod tamen Planetarum incolæ ſi perſpexerunt, etiam Logarithmorum numeri iis noti eſſe debebunt.

Cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur?

At de Tono vocis temperando quod dixi, probationem habet non difficilem; quam hic adjungimus, quandoquidem jam aliquid præter ſomnia noſtra venditare cœpimus. Ajo itaque, ſi quis canat deinceps ſonos, quos Muſici notant Literis C, F, D, G, C, per intervalla conſona, omnino perfecta, alternis voce aſcendens deſcendenſque; jam poſteriorem hunc ſonum C, toto Commate, quod vocant, inferiorem fore C priore, unde cani cœpit.

Demonſtratio temperamenti in tono vocis adhibendi.

pit. Quia nempe ex rationibus intervallorum iſtorum perfectis, quæ ſunt 4 ad 3, 5 ad 6, 4 ad 3, 2 ad 3, componitur ratio 160 ad 162, hoc eſt 80 ad 81, quæ eſt Commatis. Ut proinde, ſi novies idem hic cantus repetatur, jam propemodum tono majore, cujus ratio 8 ad 9. deſcendiſſe vocem, tonoque excidiſſe oporteat. Hoc verò nequaquam patitur aurium ſenſus, ſed toni ab initio ſumpti meminit, eodèmque revertitur. Itaque cogimur, occulto quodam temperamento uti, intervallaque iſta canere imperfecta; ex quo multo minor oritur offenſio. Atque hujuſmodi moderatione fere ubique cantus indiget; uti colligendis rationibus, quemadmodum hic fecimus, facile cognoſcitur. Et hæc quidem in gratiam artis illius ſtudioſorum nec Geometriæ rudium exponere placuit. Nunc eo unde diſceſſimus revertimur.

Diximus de artibus inventiſque quibuſdam quæ nobiſcum communia habere Planeticolas veriſimile ſit; præter quæ etiam alia exſtare illic neceſſe eſt, ſive ad uſus & commoda vitæ facientia ſive ad delectationem. Hæc vero quam multa ſint, quantique facienda, ita optime rationem inibimus, ſi plurima illa, quæ apud nos reperiuntur, recenſere & ob oculos ponere libuerit.

Expoſui ſupra animantium fruticumque apud nos genera quæ plurimum inter ſe figuris differrent: præter quæ, minus diſſimilium, ingens copia reperiatur: dixique nihilo pauciora utriuſque generis, ut longe diverſa, in Planetarum terris exſtare putandum. Nunc etiam illud videamus, quæ utilitas quæve commoda, tum ex animalibus, tum ex herbis arboribuſque ad nos perveniant, ac prorſus veriſimile exiſtimemus non minora ex iis, quæ illic terrarum inveniuntur, ad incolas ipſarum redundare.

Recenſentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus,

Hic vero operæpretium eſt ut quæ ſint divitiæ noſtræ inſpiciamus, quæ multæ magnæque ſunt. Nam, præterquam quod alimenta nobis arborum fructus herbæque ſuppeditent; illæ pomis, nucibus; hæ ſeminibus, foliis, radicibus; quodque plurimorum ex his in medicina uſus eſt; pe-

petitur ex arboribus materia qua domos naveſque fabricamus. Et lino veſtes paramus, excogitatis nendi & texendi artificiis. Ex cannabe, ſpartove, fila ac funiculos torquemus; ex filis vela ac retia conficimus, ex funiculis rudentes & funes anchorarios. Florum porro odoribus coloribuſque oblectamur; & quamvis ſint etiam qui nares offendant, & noxiæ quædam herbæ inveniantur, tamen in iis ſæpe boni quid deliteſcit; vel fortaſſe hoc egit natura ut comparatione mali bona magis eminerent: quod multis in rebus ſecuta videtur. Quanta vero ex animalibus eſt utilitas? Oves lanam ad veſtitum præbent, vaccæ lac; utræque carnes ad veſcendum. Aſinis, camelis, equis, ad portandas ſarcinas utimur. His etiam ut nos vel inſcenſi vehant, vel curribus juncti pertrahant. Ubi egregium illud rotarum inventum occurrit, quod libenter Planetarum quoque habitatoribus adſcriberem, cum jam in ſocietate eos vivere & domos ædificare pene evicerim. Utrum vero etiam animalibus pro cibo utantur, an Pythagoræ ſimile dogma ſequantur, non habeo quod affirmem. Apparet quidem hoc homini datum eſſe, ut omnibus iis alatur quæ vel in terra vel in aquis naſcuntur, ſi quid nutrimenti contineant; ut herbis, pomis, lacte, ovis, melle, piſcibus, volucrum quadrupedumque plurimorum carnibus. In quo mirum ſane videri poteſt, animal illud rationis compos ita eſſe comparatum, ut cum multorum aliorum pernicie cædeque vivat. Nec tamen naturæ præſcripto contrarium hoc eſſe putandum eſt, cum placuiſſe ei videamus ut leones, lupi, aliaque rapacia, pecudes & infirmiora quælibet pabuli loco habeant: aquilæ columbas leporeſque prædentur: Piſcium permulti piſciculos ſe minores devorent. Quin & canum varia genera ad venandum nobis largita eſt, ut quæ pedibus noſtris perſequi nequiremus, illorum celeritate ac ſagacitate conſequeremur. Præter omnem vero iſtam ex viventibus herbiſque utilitatem, hanc quoque delectationem ex iis nos capere voluit rerum conditor, ut varias eorum formas na-

turaſque & generandi vias contemplaremur; in quibus infinita quædam varietas ac mirabilia multa inſunt, quæ apud naturæ ſcriptores celebrantur. Imo in ipſis inſectis quis non miratur apium cellulas hexagonas, aranearum telas; tum bombycum involucra, ex quibus incredibili induſtria delicatiſſimam veſtem conficimus, eaque copiâ ut naves totæ ea onerentur. Atque hæc quidem de herbarum animantiumque genere, quatenus homini proſunt, ſummatim retuliſſe ſufficiat.

Ex Metallis, Cogitetur jam porro quanta ſit ejus ſolertia in reperiendis, effodiendis, explorandis metallis; itemque in fundendis, repurgandis, miſcendis. Quanta in tenuandis auri laminis, aut hydrargyro reſolvendis, ut parvo impendio, quæcunque voluerimus, auri ſplendorem coloremque induant. Quam mira ac multiplex ſit ferri utilitas; quam quæ ignorarunt nationes, eæ omnium ferè mechanicarum artium rudes vixerunt, proque armis, tantùm arcus, clavas, ſudeſque habuerunt. Nos vero & pulverem ex ſulphure & nitro miſtum habemus, varioſque ejus uſus, qui an plus juvet an noceat merito dubitari poteſt. Videbatur enim mira ejus vi, ſimulque artificioſa muniendorum oppidorum arte, certius præſidium inventum eſſe, quam priſcis temporibus fuerit, adverſus hoſtiles impetus: ſed & horum ex eo ſimul violentiam creviſſe videmus, & fortitudini viribuſque in præliis multo minus nunc locum eſſe quam tunc fuerit. Quod enim olim Imperator Græcus dixiſſe fertur, *Periiſſe Virtutem* cum Catapultarum, ac Baliſtarum inventa exorirentur, idem nunc majori jure queri poſſumus; ac maxime Bombis, quos vocant, repertis; quos non mœnibus, nec ſitu oppida arceſve repellere poſſunt, ſed quamvis validæ disjiciuntur, ac ſolo æquantur. Ut, vel ob hoc unum, melius homines ejus pulveris invento carituros fuiſſe dicendum ſit. Nec tamen propterea prætereundum fuit in commemorandis noſtræ Telluris repertis, cum veriſimile ſit, etiam in cæteris Planetis, noxia artificia quædam cum bonis emerſiſſe.

Au-

Auſpicatior eſt aquæ & aëris apud nos uſus: quo & navigandi ratio conſtat, & vires comparantur, quibus, nullo labore noſtro, molas machinaſque verſemus. At hæ quam multiplices, quamque ad varias res adhibentur? Nam & frumenta iis comminuimus, & olea exprimimus, & ligna ſecamus, & pannos tundendo denſamus; & chartis materiam conterimus; quarum aliàs quoque pulcherrimum eſt inventum, cum ex viliſſimis linteorum ſcrutis, tam pulchra foliorum candidiſſimorum copia paretur. His addatur jam præclarum illud typographiæ inventum, cujus opera artes omnes reliquæ, non ſervantur tantum, ſed & comparantur multo quam ante facilius. Item ſculpendi pingendique peritia, a parvis rudibuſque initiis eo progreſſa, ut nihil elegantius ab hominum ingenio profectum eſſe videatur. Ponatur & vitri excoquendi ſcientia, atque in tot formas ducendi facilitas. Tum ſpeculorum vitreorum politura, hydrargyrique ſuper ea inductio. Ac præcipue quoque vitri uſus mirabilis, in pervidenda rerum natura, poſt teleſcopii microſcopiique inventa. Recenſeantur etiam horologiorum automatôn fabricæ; aliorum tam exilium, ut geſtanti nihil incommodent; aliorum tam exquiſita æqualitate tempus metientium, ut nihil ſupra optari poſſit, quibus utriſque inventa noſtra plurimum profuere. *Ex aqua, & aëre, variiſque artificiis,*

Multa addere poſſem de multiplici doctrina & rerum naturæ cognitione quam præter Geometriæ Aſtronomiæque ſcientias conſecuti ſumus, atque ea pleraque noſtra ætate: velut de gravitate aëris ac vi qua compreſſus reſilit. De ſingularibus Chymicorum experimentis; è quibus liquores inflammabiles, nuperque ultro lucentes, ac levi tractatione ardentes, prodierunt. De ſanguinis circuitu per arterias venaſque, qui antea intelligebatur, nuper vero & oculis uſurpari cœpit, adhibito microſcopio, in piſcium quorundam caudis extremis. Item de generatione animalium, quod inventum eſt nulla niſi ex ſimilium ſemine naſci; idque de herbis quoque verum eſſe. Quodque in ſemine marium reperiuntur animalculorum myriades vivaciſſimorum, quæ ipſam ani- *Ex iis, quæ noſtra ætate inventa ſunt.*

animantium ſobolem eſſe veriſimillimum ſit: res mirabilis, atque ab omni ævo incognita.

Illa omnia veriſimiliter non extare in Planetis, ſed aliis æque dignis rependi.

Jam vero poſtquam hæc omnia accumulavimus Telluris incolarum inventa, putemus fieri quidem poſſe, ut quædam eorum etiam apud Planetarios extent; credibile tamen eſſe maximam partem eorum illis ignorari. At iis quæ non habent rependendis æque multa, pulchraque & utilia, admiratione digna iis tributa eſſe oportet. Quanquam igitur ibi terrarum aliquos ratione præditos, & Geometras, & Muſicos reperiri probabilibus argumentis oſtenderimus, & in ſocietate communitateque viventes, & manibus pedibuſque inſtructos, tectiſque & mœnibus munitos: non tamen dubitandum eſt, quin & formæ, & rerum quas agunt novitate, mirabile ſupra quam dici poſſit futurum ſit ſpectaculum, ſi quis Mercurius, aut potens Genius eò nos deducat. Sed cum ejus itineris conficiendi ſpes omnis adempta ſit, id unum tamen, quod poſſumus inveſtigare non pigebit; qualis nempe cæleſtium rerum facies ſeſe offerat, in unoquoque iſtorum globorum vitam agentibus, cum ad eam hoc quoque pertineat. Simul vero & de præſtantia cujuſque, tum ob magnitudinem, tum ob adjunctum comitum lunarum numerum, quædam ſcitu digna referemus, ac ſtellarum denique inerrantium incredibilem diſtantiam nova ratione indagabimus. Sed à longa attentaque meditatione requieſcemus hic paulum, finemque huic Libro imponemus.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu,
Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER II.

CUm ante annos complures Librum Athanaſii Kircheri, qui *Iter Ecſtaticum* inſcribitur, evolverem; in quo de Natura Siderum, rebuſque in Planetarum ſuperficie extantibus, diſſeritur; mirabar nihil illic adferri eorum quæ mihi jam ab illo tempore circa hæc, tanquam valde probabilia, occurrebant: ſed longè alia tradi, inania pleraque, & à ratione aliena. Quod magis etiam intellexi, cum conſcriptis ſuperioribus idem opus denuo percurrerem. Jamque viſum eſt aliquid eſſe conjecturas noſtras, ac ponderis nonnihil iis accedere, ſi cum Kircherianis conferantur. Quod ut judicari poſſit, utque appareat quàm de his rebus fruſtra philoſophari conentur, qui fundamenta unica veriſimilitudinis, quibus uſi ſumus, rejiciunt; non abs re erit de opere illo quædam annotaſſe.

Is igitur Vir optimus, Genio quodam duce, per cæli ſpa- *Kircheri iter extaticum examinatur.*

ſpatia, ſtellaſque ſe circumferri fingens, partim ea quæ ex Aſtronomorum ſcriptis hauſerat, partim quæ ipſe de Planetarum terris meditatus erat, ac vulgo probari poſſe putabat, quaſi viſa enarrat. Antequam verò iter longinquum ingrediatur, hæc duo tanquam certo tenenda ſtatuit ſancitque; nullum videlicet Telluri motum eſſe tribuendum; tum nihil in Planetarum globis Deum extare voluiſſe, quod vita aut ſenſu præditum ſit, adeoque nec herbas quidem. Itaque, relicto Copernici ſyſtemate, Tychonicum ſibi quod ſequatur deligit. Sed cum ſtellas inerrantes pro totidem Solibus habeat, iiſque ſingulis ſuos Planetas circumponat; hoc ipſo (quod an ſenſerit neſcio) infinita numero jam exoriuntur ei Copernicea ſyſtemata. Quæ quidem perabſurdè, præter ſibi proprios motus, univerſa circum Tellurem noſtram, viginti quatuor horis, immani celeritate converti facit. Cumque horum maximam partem fateatur extra hominum conſpectum eſſe remotam, in hoc quoque incidit incommodum, ut fruſtra tot Soles lucere dicendi ſint, fruſtraque calorem ſuum impertiri tot globis Telluri ſimilibus, elementaque eadem, (ita enim vult) & cætera omnia habentibus, præter ſtirpes & animalia. Atque hinc porro ad alia magis abſona delabitur. Nam quia ne Planetarum quidem, qui noſtro ſyſtemate continentur, alium ullum reperit uſum, ad diu exploſas Aſtrologorum ineptias ſe convertit; & hoc fine tot tantaſque corporum moles conditas eſſe vult, ut influxu eorum vario, certiſque legibus temperato, mundi univerſitas conſervetur, incolumiſque perduret: utque præterea in hominum animos iidem influxus vires ſuas exerceant. Itaque, in Aſtrologicæ artis gratiam, in Veneris Planeta jucundam pulchramque rerum faciem ſibi oblatam narrat; cum luce blanda, undis dulciter fluctuantibus, odoribus ſuaviſſimis, atque undique fulgentibus cryſtallis. In Jove auras ſalubres, ac ſuaveolentes, aquas limpidiſſimas, terras argentei ſplendoris. Quò nimirum, ab influxu hujus utriuſque ſideris, fauſta ac ſalutaria omnia in Terram homineſque deriventur; ut vel pulchros & amabiles, vel ad prudentiam & gravitatem

tem propenſos reddat. In Mercurio neſcio quid ſerenum vividumque, unde ingenium ac ſolertia naſcentibus inſinuetur. At in Marte omnia tetra, exitialia, fætida, piceas flammas, fumoſque ſe vidiſſe memorat. In Saturno triſtia, horrenda, ſquallida, caliginoſa; ut ex his Planetis, (neſcio quare Apoteleſmaticis omnibus inviſis) influxus maligni infeſtique mundo ac mortalibus eveniant; niſi tamen benigniorum illorum radiis corrigi ac mitigari eos contingat. Hæc nempe & his ſimilia Genio illi cæleſti comes adhærens diſcit. Quem & ſerio reſpondere facit cum interrogatur, anne aquis, quæ in Veneris Planeta fluunt, Hebræus aut Paganus quiſpiam, eo delatus, ritè baptizari queat. Eodem quoque docente Magiſtro, intelligit cælum ſtelliferum non eſſe ex materia ſolida conflatum, ſed liquidum prorſus, in quo ſtellæ Soleſve innumeri longè latéque ſpargantur; nuſquam alligati, (& hactenus rectè) quique omnes diei ſpatio vaſtiſſimos, ut dixi, circuitus peragant. Quo in motu, ſi talis foret, non advertit quanta vi illi undique diffugituri ſint, ob motum circularem tam immenſæ celeritatis. Sed ne ſic avolent, inque ſpatia infinita recedant, Intelligentiæ motrices, credo, impedient. Etenim unicuique ſtellæ fixæ, imo & Planetæ, Intelligentias aut Angelos ſuos adjungit, qui impellant eos, curſumque moderentur. In quo Doctorum quorundam turbam ſequitur, qui vaniſſimum Ariſtotelis commentum inconſideratè, invitaque ratione, adoptarunt. Iſtos verò beatos Genios labore tanto Copernicus liberat, ſolius Terræ inducto motu; cujus ſanè neceſſitatem, vel ex hoc uno, omnes vident, niſi qui ultrò, ac volentes, cæcutiunt. Equidem cogitavi nonnunquam, meliora à Kirchero exſpectari potuiſſe, ſi, quæ ſentiebat, liberè exponere auſus fuiſſet. Sed cum hoc non auderet; neſcio cur non in totum illo argumento abſtinere maluerit. Sed hunc celeberrimum ſcriptorem jam omittamus: &, quandoquidem nil veriti ſumus, conjecturis noſtris, ſpectatores in Planetis ponere, adeamus nunc, uti propoſitum fuerat,

ſingulos; & quinam ſint anni eorum, qui dies, quæ denique Aſtronomia, deinceps conſideremus.

Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio.

Itaque, ut ab intimo, & Soli viciniore incipiam, ſcimus Mercurium triplo propius circiter quam Tellurem noſtram ad ingens illud ſidus accedere. Cui conſequens eſt ut triplo quoque majus id conſpiciant ejus incolæ, ratione diametri, lumen vero & calorem ejus ſentiant noncuplo quam nos majorem. Nobis proinde intolerabilem, quique accenſurus ſit ſiccatas herbas, fœnum ſtramenque, qualia apud nos creſcunt. At nihil impedit ita comparata eſſe, quæ ibi vivunt animantia, ut optatam temperiem in ardore illo experiantur. Herbas vero eſſe ea natura, ut multo magis vim caloris perferant. Nec mirum eſſet iſtos Mercurii indigenas putare non ferendo frigore nos urgeri, luceque frui exigua, qui tanto longius a Sole abſimus. Sicut nos de Saturni colonis facile nobis perſuademus. Non deeſt verò dubitandi ratio, cum à calore vita pendeat, iſque corpori mentique vigorem alacritatemque præſtet; an non, propter Solis viciniam, Hermopolitæ illi nobis ingenio præſtare putandi ſint? Sed quo minus huic cauſæ tribuam facit, quod calidiſſimas terræ noſtræ regiones ſortitos, Africæ, Braſiliæque populos, nec ſapientia nec induſtria æquare videmus temperatiorum tractuum incolas; ut vel ex eo perſpicitur, quod in omnium ſcientiarum ac fere artium ignoratione verſentur: cum nec nauticæ rei, qui circum littora incolunt, niſi perexiguam notitiam habeant. Nollem quoque Jovicolis, Saturnicoliſque hebetes, plumbeaſque mentes, intelligentiamve tribuere noſtra minorem, propterea quod tanto longius a Sole remoti vivunt; cum uterque globus iſte tam præſtanti ſit magnitudine, tantoque comitatu ſtipatus feratur. Qualis porro ſit Mercurialibus Aſtronomia, utque cæteros Planetas certis temporibus Soli oppoſitos ſpectent, ex figura ſyſtematis, priore libro expoſita, perfacile eſt intelligere. Atque his oppoſitionum temporibus Venerem ac Tellurem præcipuo ſplendore illic effulgere neceſſe eſt. Nam cum

adeo

deo lucida nobis Venus appareat, quo tempore tenuem naſcentis Lunæ faciem refert; oportet eam ſextuplo aut amplius clariorem cerni, cum Soli opponitur, ex Mercurii Globo pleno orbe ſpectatam, & minore quoque intervallo diſtantem: atque ita tunc non parum diſpellere nocturnas tenebras gentibus iſtis, Lunæ auxilio carentibus. Quænam ſint denique apud eos dierum ſpatia, & an varias anni tempeſtates experiantur, incompertum eſt hactenus, quod ignoretur an axem diurnæ converſionis ad orbem, quo circa Solem defertur, obliquum habeat, & quanto tempore converſio ea peragatur. Neque enim dubitari debet de diebus noctibuſque eorum cum in Tellure, Marte, Jove ac Saturno hæc viciſſitudo certò cognoſcatur. Anni vero ſpatium vix quartam partem noſtri æquare illic conſtat.

In Veneris globo poſitis, eadem fere in cælo apparere neceſſe eſt quæ de Mercurio diximus, niſi quod hunc nunquam videt Soli oppoſitum, cum non niſi 38 circiter gradibus ab eo recedat. Sol vero illis major apparet quam nobis, diametro ſeſcupla, orbe plus quam duplo; quo & bis tantum caloris luciſque præbere cum oportet. Itaque propius ad noſtræ temperiem Tellus iſta accedit. At annus menſibus noſtris ſeptem cum dimidio fere finitur. Noctu verò globus hic noſter, in locis Soli oppoſitis, multo lucidior Veneri apparere debet quàm unquam nobis appareat Venus; ac tunc Lunam quoque, perpetuum comitem noſtrum, facile conſpiciunt, ſi modo oculos habent noſtris non imbecilliores. Sæpe autem in Venere miratus ſum, cum tubis longioribus, pedum 45, aut 60, eam inſpicerem Terræ propinquam; Lunæque ſemiplenæ ſimilem, aut jam in cornua curvari incipienti; prorſus æquabili ſplendore ſuperficiem ejus perfundi: ut vix dicere audeam, aliquid maculæ ſimile, in ea me animadvertiſſe; cujuſmodi in Jove & Marte manifeſtè notantur, licet orbe multo minore ſeſe offerentibus. Si enim maria ac terras habet Veneris globus, obſcuriores nobis maris tractus conſpici deberent; terrarum vero clariores; ſicuti ex prææltis rupibus inſpectum deſuper mare,

Qualis in Venere.

re, non perinde, ac adjacentes terræ, lucidum apparet. Credebam nimium Veneris fulgorem in cauſa eſſe, quo minus diverſitas lucis animadverti poſſet. Sed cum fumo infeciſſem vitrum oculo proximum, ad auferendam partem radiorum, nihilo minus æqualis in tota ſuperficie lux viſa eſt. An igitur nulla ibi maria, an Solis lucem magis quam apud nos aquæ, aut minus terræ repercutiunt? an potius, (quod credibilius mihi videtur) denſior ibi, quam in Jove aut Marte, Vaporum regio à Sole illuſtrata, Veneriſque globum circundans, omnem fere illam quam videmus lucem ad nos remittit, vixque ſubjectorum ſibi marium terrarumque diſcrimen percipi ſinit? Nam certum eſt noſtram quoque atmoſphæram, ſi Tellurem procul intueri daretur, plurimum obſtituram luce ſua, quo minus terræ mariſque tam diverſa claritas apparere poſſet, quam quæ cernitur ex edito ſcopulo deſpicienti. Eadem ratione qua Lunæ quoque maculas interdiu minus aperte quam noctu animadverti ſinunt vapores iidem; quoniam tunc quoque inter illam oculoſque noſtros interpoſiti, Soliſque luce illuſtres, viſui officiunt: noctu non item.

In Marte. At in Marte reliquis diſci partibus obſcuriores, ut jam dixi, maculæ notantur. Ex quarum recurſibus pridem fuit obſervatum dies nocteſque illic iiſdem fere quibus apud nos intervallis reverti. Hyemem vero æſtatemque exiguo diſcrimine incolæ ſentiunt, eo quod axis diurnæ converſionis paulum duntaxat ad orbitam Planetæ inclinatur, ut ex motu macularum intellectum eſt. Qui autem ex globo illo Tellurem noſtram intuentur, eodem modo fere, ac Venus nobis, apparere iis debet, formaſque lunaribus ſimiles oſtendere, ſi teleſcopio ſpectetur; nec ultra gradus 48 à Sole evagari; in cujus diſco etiam conſpici quandoque poſſit, uti & Veneris Mercuriique corpuſcula. Et hoc quidem nunquam aliàs; Venus raro iis apparere debet, uti nobis Mercurius. Terræ vero ſolum in Marte nigriore materia conſtare veriſimile eſt, quàm in Jove, aut etiam Luna noſtra; eoque fieri ut rubicundior Mars ſpectetur, nec, pro ratione intervalli quo

quo à Sole abeſt, lucem remittat. Minor verò eſt globus ejus quam ſtellæ Veneris, licet à Sole longius diſtans, ut jam ſupra animadvertimus. Nec Lunam habet ullam comitem; atque in eo Telluri noſtræ, quemadmodum & Venus & Mercurius, dignitate impar videtur. Lux vero Solis, calorque, Marticolis duplo atque interdum triplo quam nobis minor ſentitur; nullo tamen, ut credimus, ipſorum incommodo.

Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præſtare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine.

Quod ſi Tellus hæc, propter adjunctam ei Lunam, præſtare cæteris Planetis, quos huc uſque percurri, dicenda eſt; nam magnitudine nec cedit iis multum, nec ſuperat; quantopere & his tribus, & Telluri ipſi, anteponenda erunt ſidera Jovis & Saturni. In quibus ſive globorum molem conſideremus longiſſimè omnium iſtorum corpuſcula excedentem; ſive Lunarum quibus ambiuntur multitudinem, prorſus veriſimile fit has duas primarias habendas eſſe Tellures, inter eas quæ circa Solem ſunt: præ quibus reliquæ quatuor ſint minimum quidpiam, ac nequaquam cum iis comparandæ. Quanta enim ſit differentia, quò rectius animo concipiatur, ſubjicere hic placuit, ſecundum proportiones veras, aut non multum à veris abeuntes, tum Tellurem noſtram, cum circumjecta Lunæ orbita, ipſoque in ea Lunæ globulo; tum Jovis ac Saturni ſyſtemata: Illud quaternis, hoc quinis Lunis exornatum; quarum quæque in ſua itidem orbita ponuntur. Joviales Galilæo deberi notum eſt; quæ quanto animi gaudio primum illi animadverſæ ſint, facile quivis ſecum reputet. Saturniarum una nobis obtigit, quæ cæteris clarior eſt, & ab extrema proxima. Quam Anno 1655 teleſcopio noſtro non ultra duodecim pedes longo, primi deprehendimus. Reliquæ diligentiſſimis Dominici Caſſini obſervationibus patuerunt, vitreis orbibus utenti à Joſ. Campano expolitis, primùm 36 pedum; deinde totidem ſupra centenos. Tertiam enim quintamque vidimus Anno 1672, ipſo monſtrante Caſſino, & poſtea ſæpius. Primam, cum ſecunda, ſibi repertas ſignificavit, miſſis literis, Anno 1684. Hæ vero difficillimè cernuntur, certoque affirmare nequeo mihi conſpectas

TAB. LIII.

ha-

hactenus. Nec propterea quidquam vereor Clariſſimo Viro fidem habere, atque has quoque Saturno ſocias adſcribere. Imo præter harum numerum alias quoque, vel unam vel plures, latere ſuſpicari licet; nec deeſt ratio. Cum enim, inter extremas duas, ſpatium amplius pateat quàm pro diſtantiis cæterarum; poſſet hoc inſidere ſextus ſatelles: vel etiam, ultra quintum, alii circumvagari, qui propter obſcuritatem nondum ſint viſi: cum ille ipſe quintus, tantùm in orbitæ ſuæ parte quæ ad occidentem ſpectat, cernatur, in reliqua nunquam appareat; cujus rei cauſam ſatis intellectu facilem poſtea adferemus.

Fortaſſe autem, ubi ad ſigna Borea Saturnus revertetur, altéque ſupra horizontem attolletur, (nam, quo tempore hæc ſcribimus, maximè deprimitur) aliquid circa hæc novi obſervare continget, ſi quis tuas tunc lentes, Frater optime, ad Teleſcopia pedum 170. & 210. paratas, ſideribus applicet: quibus majores, formæque perfectioris, nullas hactenus extare arbitror. Quanquam enim cælo nondum eas admovimus, vel propter moliendi difficultatem, vel quod diſceſſus tuus ſtudia hæc noſtra conatuſque interrupit: omni tamen vitio eas carere certi ſumus, poſt experimenta illa faciliora, quæ in ambulacris ſuburbanis ſub noctem inſtituebamus; inſpectis procul literis, quibus appoſitum erat lumen. Quorum equidem lubens reminiſcor, ſimulque jucundi laboris noſtri, quem, in elaborandis expoliendiſque vitreis hujuſmodi diſcis, impendere unà ſolebamus; excogitatis novis artificiis machiniſque, ſemperque ulteriora agitantes. Sed redeo ad diagrammata ante deſcripta, de quibus aliqua dicenda ſupererant.

Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum ſatellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.

Feci in iis Jovialis globi diametrum duarum circiter tertiarum ejus diſtantiæ quæ inter nos noſtramque Lunam interjacet; quandoquidem plus quàm vicies diametrum Terræ diameter Jovis continet; Luna autem diſtat à Terra diametris hujus triginta. Orbitam vero comitis Jovis extremi ad noſtræ Lunæ orbitam poſui ſicut $8\frac{1}{2}$ ad 1, quoniam ejuſmodi inter eas proportio re ipſa reperitur. Et hi quidem comites,

tes, ſive Lunæ ſingulæ, non videntur Tellure noſtra minores eſſe, ut ex umbris earum in Jovis diſco ſæpe obſervatis, probari poteſt. Sunt autem (ut hoc quoque addamus) periodorum tempora ſub Ecliptica, apud Caſſinum, intimi Jovialium dies 1, horæ 18, 28′, 36″. Secundi dies 3, horæ 13. 13′. 52″. Tertii dies 7. horæ 3. 59′. 40″. Quarti dies 16, horæ 18. 5′ 6″. Diſtantiæ à centro Jovis, comitis intimi $2\frac{1}{5}$. Jovis diametrorum. Secundi $4\frac{1}{2}$. Tertii $7\frac{1}{6}$. Quarti $12\frac{2}{3}$. In Saturniis periodica tempora, intimi, dies 1, horæ 21, 18′, 31″. Secundi dies 2, horæ 17, 41′, 27″. Tertii dies 4, horæ 13. 47′, 16″ Quarti dies 15, horæ 22, 41′, 11″. Quinti dies 79, horæ 7, 53′. 57″. Diſtantiæ à centro Saturni, diametris Annuli dimenſæ, Comitis intimi, $\frac{39}{40}$ Secundi $1\frac{1}{4}$. Tertii $1\frac{3}{4}$. Quarti 4, quæ mihi erat $3\frac{1}{2}$. Quinti 12. omnia magnis laboribus vigiliiſque reperta.

Tempora periodorum comitum Jovialium.

Ecquis jam ſyſtemata hæc inſpiciens, atque inter ſe conferens, non ſtupet ad magnitudinem, ingentemque paratum duorum præ exiguo tenuique Telluris noſtræ? aut cui nunc in mentem venire poteſt in hac una Solem ambientium, omnem ornatum, omnia animalia, omnes qui cœleſtia mirentur inveniri; in illis vero nihil impoſuiſſe rerum conditorem; nec alio fine tam vaſtas corporum moles creaſſe, quam ut lucem eorum nos homunculi intueremur, curſumque forſitan inquireremus?

Credo equidem futuros qui falſa aut incerta eſſe dicant, quæ de magnitudine cœleſtium ſpatiorum nobis hic ſumuntur. Scio enim quam difficulter quiſquam adducatur, qui orbis Terrarum ſpatia mirari aſſueverit, inque eo tot populos, urbes, imperia; ut alibi exſtare credat quorum collatione hoc totum tam ſit exiguum quam hæ figuræ demonſtrant. Atqui ex ſummorum hujus ætatis Aſtronomorum ſcriptis ea hauſimus, ex quibus iſtæ ſyſtematum inter ſe rationes conſequantur. Si enim Terra à Sole decem vel undecim mille diametris ſuis diſtat, ut Caſſinus in Gallia, apud Anglos Flamſtedius colligunt, parallaxium in Marte ſubtiliſſimis obſervationibus uſi; cum nos quoque probabili conjectura,

De hac proportione magnitudinis conſtare ex recentiorum obſervationibus.

duodecim mille diametros invenerimus; erunt & iſtæ orbium magnitudines inter ſe ferè quales hic deſcripſimus.

Quænam ſit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & quî cognoſci queat.

Sed de Jove dicere pergamus, ex quo Sol ſpectatus diametrum quintuplo quam apud nos minorem habet; ut proinde lucis caloriſque illic pars tantum vigeſima quinta ſentiri poſſit. Sed ea lux nequaquam debilis putanda eſt, idque oſtendit inſignis Jovis per noctem claritas. Tum quod in Solis Eclipſibus quæ nobis contingunt, etiamſi nec vigeſima quinta pars diſci ejus ſuperſit, ut me videre memini, non admodum ſentiatur obſcuratio. Si vero experimento inquirere libeat quanta ſit illa in Jove Solis lux, ſumatur tubus certæ longitudinis, iſque parte altera obturetur, impoſitâ lamellâ in cujus medio foramen ſit rotundum, ea latitudine quæ ad tubi longitudinem ſe habeat ut ſubtenſa 6 ſcrupulorum primorum ad radium, hoc eſt fere ut 1 ad 570. Deinde ad Solem tubus obvertatur, radiique ejus per foramen ingreſſi excipiantur parte oppoſita, in chartæ candidæ folium; nec aliunde eo lux incidere poſſit. Hi radii imaginem Solis circulo referent, cujus claritas erit eadem quæ ſerenis diebus percipitur à Jovis incolis. Remotâ autem chartâ, ſi eodem loco oculus ponatur, videbit hic Solem ea magnitudine ac ſplendore, qui in Jovis globo conſiſtenti appareret.

Iidem in Saturno.

Quod ſi in eodem tubo foramen duplo anguſtiori diametro ſtatuatur, incidet in chartam, aut in oculum, lux ejuſmodi qualis ad Saturnicolas pervenit. Quæ cum centeſima tantum pars ſit noſtræ quam a Sole accipimus, tamen per tenebras noctis Saturnum ſatis lucidum nobis oſtendit. In utroque vero Planetarum iſtorum, ſi nubilos quandoque dies habent, malignam tunc lucem eſſe oportet, ſi noſtris oculis judicanda ſit; at illorum habitatoribus talem haud dubiè, ut nihil de tenuitate ejus querantur. Sicut in noctuis, veſpertilionibuſque utilior gratiorque eſt crepuſculi lux, aut quæ in ipſa nocte relinquitur, quam quæ diei tempore aërem terramque illuſtrat.

In Jove dies eſſe horarum quinque.

In Jove porro dierum ſpatia, quinque tantum horas noſtrates æquare, ac noctes tantundem, admiratione non caret,


5
4
3
2
1
Annu
Sat.
lus
4
3
2
1
Jup.
Luna
Tellus

ret, propter tantam illius globi præ noſtro magnitudinem. Et ex hoc nimirum intelligitur naturam haudquaquam ea in re ſervaſſe rationem quæ eſt ſecundum globorum molem, aut eorum diſtantiam à Sole; cum etiam in Marte dies ſint fere noſtris pares. At in annorum longitudine, hoc eſt, tempore circuitus circa Solem, certam omnino diſtantiarum, quibus ab illo Planetæ abſunt, rationem habuit. Sunt enim ut harum cubi, ita quadrata temporum periodicorum, ut primus advertit Keplerus. Idque in comitibus Jovis & Saturni eodem modo ſe habere inventum eſt. Cum itaque anni & dierum tempora in Jove à noſtris multum diverſa ſunt, tum dies hoc nomine etiam differunt, quod eadem ſemper ſint longitudine. Perpetuo enim illic fruuntur æquinoctio, quoniam axem motus diurni Jupiter rectum ferme habet ad planum itineris ſui circa Solem, nec ut Tellus obliquum; ut teleſcopiorum obſervationibus conſtat. Frigidiores autem & ibi ſunt regiones quæ polis viciniores propter radiorum Solis obliquitatem; at longas noctes non patiuntur, ſicut quæ ſunt prope polos Terræ; ſed tenebras luceſque habent, ut dixi, horarum quinque, ubique & ſemper. Ac nobis quidem haud ſanè placeret tanta dierum brevitas, meliuſque nobiſcum agi putamus quod plus quam duplo longioribus utimur. Nulla tamen ratione, niſi quoniam potiora ducere ſolemus ea quibus aſſuevimus.

Et perpetuum æquinoctium.

Planetarum unum Saturnum ex Jove vident; cum cæteri nimium Soli vicini ſint; ipſeque Mars ab eo non ultra 18 gr. digrediatur. Ex quaternis vero quas habent Lunis, quin multò plus commodi capiant, quàm nos ex unica noſtra, negare non poſſumus, vel eo ſolo quod perrarò illunes noctes experiantur. Si verò & maria ſua navigant, de quo ſupra dictum fuit, egregiè curſus regere earum auxilio poſſunt. Ut prætercam ſpectaculi jucunditatem ex variis earum conjunctionibus, Eclipſibuſque, quas quotidie intuentur.

Eadem porrò commoda ac ſpectacula, imò etiam majora, Saturnicolis evenire neceſſe eſt, cum ob quinque Lunarum numerum, tum ob mirabiles Annuli aſpectus, nocte dieque

iis obverſantes. Sed totam eorum Aſtronomiam, ſicut in cæteris fecimus Planetis, exponere oportet.

Planeticolis ſtellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.

Atque hic primum illud annotabimus, quod de omnibus dici poterat, ſed hic magis mirandum eſt, ſtellas inerrantes è Saturno iiſdem planè figuris, eademque luminis diverſitate diſtinctas, atque apud nos ſpectari: idque ob immanem earum diſtantiam, de qua poſtea dicetur. Ad quam nempè illa; quam viginti quinque annis globus à tormento emiſſus pervaderet, perexigua cenſenda ſit.

Eadem igitur ſigna Orionis, Urſæ, Leonis, & reliqua, Aſtronomi illic contemplantur; at non circum eoſdem polos ac nobis ſeſe convertentia, ſed qui unicuique Planetæ diverſas cœli partes obtineant.

Qualis ſit Planetarum aſpectus, dierum ratio in Saturno.

Sicut autem Jovis incolis ſolus Saturnus è primariis Planetis cernitur, ita Saturnicolis ſolus ſpectatur Jupiter; qui idem illis eſt quod nobis Venus, nec niſi 37 circiter grad. à Sole recedit. Quantam verò habeant dierum longitudinem, certò cognoſci nequit. Sed, ex comitis intimi diſtantia ac periodo, exque eorum comparatione cum intimo Jovialium, veriſimile fit non longiores eſſe dies illas quam ſint in Jove; quas decem horarum eſſe diximus, aut paulo minus. Sed, cum hæ æqualiter in lucem ac tenebras dividantur, Saturnicolæ inſignem inæqualitatem atque etiam majorem quam nos perpetiuntur, majuſque etiam æſtatis & hyemis diſcrimen; propter inclinationem axis globi Saturnii ad planum orbitæ ſuæ, quæ eſt partium 31; cum noſter Terræ axis tantum 23 & dimidiæ obliquitatem habeat. Hæc eadem declinatio in Saturno, Lunas ejus longe evagari facit à Solis via, vel quam pro hac illi habent: atque etiam cauſa eſt, cur nunquam Lunas ſuas pleno orbe lucentes conſpiciant, niſi æquinoctiorum tempore; quæ triginta annis noſtris bis ibi contingunt. Idem denique axis poſitus phænomena varia, ac mirabilia, Planetæ ejus incolis præbet; quæ ut intelligi poſſint, totius Saturni cum Annulo figuram hic rurſus deſcribemus: in qua, ſicut jam olim definivimus, cum mirum hunc fornicem è tenebris primùm erueremus, inter diametros

tros annuli globique ea erit ratio, quæ 9 ad 4. Vacuumque ſpatium inter utrumque interjectum, eandem quam annulus latitudinem habebit. Craſſitudinem autem hujus exiguam eſſe, obſervationes comprobant, quæ tamen ratione diametri, non nimia erit, etiamſi ſexcenta milliaria Germanica efficere putetur.

Sit igitur ſecundum hæc Saturni globus cujus poli A, B. Annuli diameter G N, obliquè inſpecti, ita ut Ellipſin anguſtiorem circunferentia ſua referat. Sunt igitur circa polos utroſque portiones ſuperficiei, arcubus C A D, E B F, 54 partium, definitæ, quas qui incolunt (niſi frigus forſan inhabitabiles reddit) nunquam Annulum conſpicere poſſint. Ex reliqua omni ſuperficie vident eum annis continuis quatuordecim, menſibus novem: quod eſt ipſis anni ſpatium dimidium. Altero dimidio abſconditur. Quocirca qui habitant in zona ampliſſima inter circulum polarem C D, & T V; æquatori annuloque ſubjacentem, quandiu ſuperficiem annuli ipſis obverſam Sol illuminat, vident media nocte portionem ejus K G L, arcus lucidi forma; qui utrimque ab horizonte exurgit, ſed medius interrumpitur umbra globi Saturnii partem G H tegente plerumque ad extremum uſque marginem. Poſt mediam verò noctem umbra eadem paulatim in partem dextram movetur, ſpectatori in hemiſphærio boreo agenti; in ſiniſtram verò, ſi in oppoſito verſetur. Evaneſcitque matutino tempore, manente tamen arcus ſpecie, quem tota die cernere poſſint, ſed tenuius lucentem quam nobis Luna noſtra interdiu conſpicitur. Siquidem ſua illis eſt atmoſphæra, ſive aër a Sole ſplendeſcens, ut probabile eſſe ſuperius oſtendimus. Nam ſi nihil tale haberent, non aliter interdiu quam noctu & annulum & Lunas ſuas, ſtellaſque inerrantes lucere viderent. Annuli porro ſpectaculum, hôc quoque pulchriùs eſſe oportet, quod eum in ſeſe converti, ex maculis quibuſdam, aut inæquali ſplendore animadvertunt. Neque enim ex tanta propinquitate hoc notari non poteſt, cum vel è Tellure noſtra inæqualis claritas, in ſuperficie annuli, appareat; quæ limbo exteriore, quàm

TAB. LIV. fig. 2.

Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno.

interiore, minor eſt. Simul autem, dum globi umbra in Annuli partem G H projicitur, etiam annuli umbra obſcurat globi partem circa P F, quæ alioqui Solis luce frueretur. Ut proinde ſemper Zona quædam ſit P Y E F, nunc latior, nunc anguſtior, cujus incolæ multo tempore conſpectu Solis, annulique ſimul, priventur; qui tunc quoque ſtellarum partem aliquam illis aufert. Quod certè miraculi inſtar videri neceſſe eſt; intercepto Sole, in profundam noctem incidentibus; nec quid eam efficiat videntibus. Quo tempore Lunarum ſolo lumine ſe ſolantur. Altera anni parte dimidia, cum oppoſitam annuli ſuperficiem Sol illuſtrat, eodem modo, luce fruitur hemiſphærium T B V, quo prius T A V; & hoc viciſſim tunc longas illas eclipſes patitur. Sola æquinoctiorum ſunt tempora, Sole in ipſum productum annuli planum incidente, cum lumine deſtitutus vix Saturnicolis apparere poteſt; quando nec noſtris percipitur dioptris. Tenente nimirum Saturno, ex Sole viſo, gradum Virginis, aut Piſcium, viceſimum primum cum dimidio; quemadmodum in Saturnio ſyſtemate olim expoſuimus. Ubi ratio quoque redditur eorum, quos diximus, exortuum Solis ſuper Annuli planum, toto Saturnii anni decurſu.

Appoſui in ſchemate hoc, juxta Saturnum, Terræ noſtræ, Lunæque globos, ſervata magnitudinum vera ratione; ut rurſus intelligatur, quam exigua ſit habitatio noſtra, ad Saturni ſphæram annulumque collata; quod continue cogitationi infixum habere expedit. Imaginem vero Saturniæ noctis, geminis annuli lucentis arcubus adverſis, & quinque Lunis ornatæ, ſibi quiſque formare ex jam dictis poterit. Et de primi quidem ordinis Planetis, hæc fere erant quæ dicenda habebam.

Supereſt ut de Lunis quoque Saturno ac Jovi additis, ac præcipuè de noſtra, quæramus, tam quæ ad phænomena aſtronomica attinent, quam quæ ad ornatum in earum ſuperficie reperiendum, ac præſertim an aliquem eſſe probabile ſit; quod hactenus facere diſtulimus.

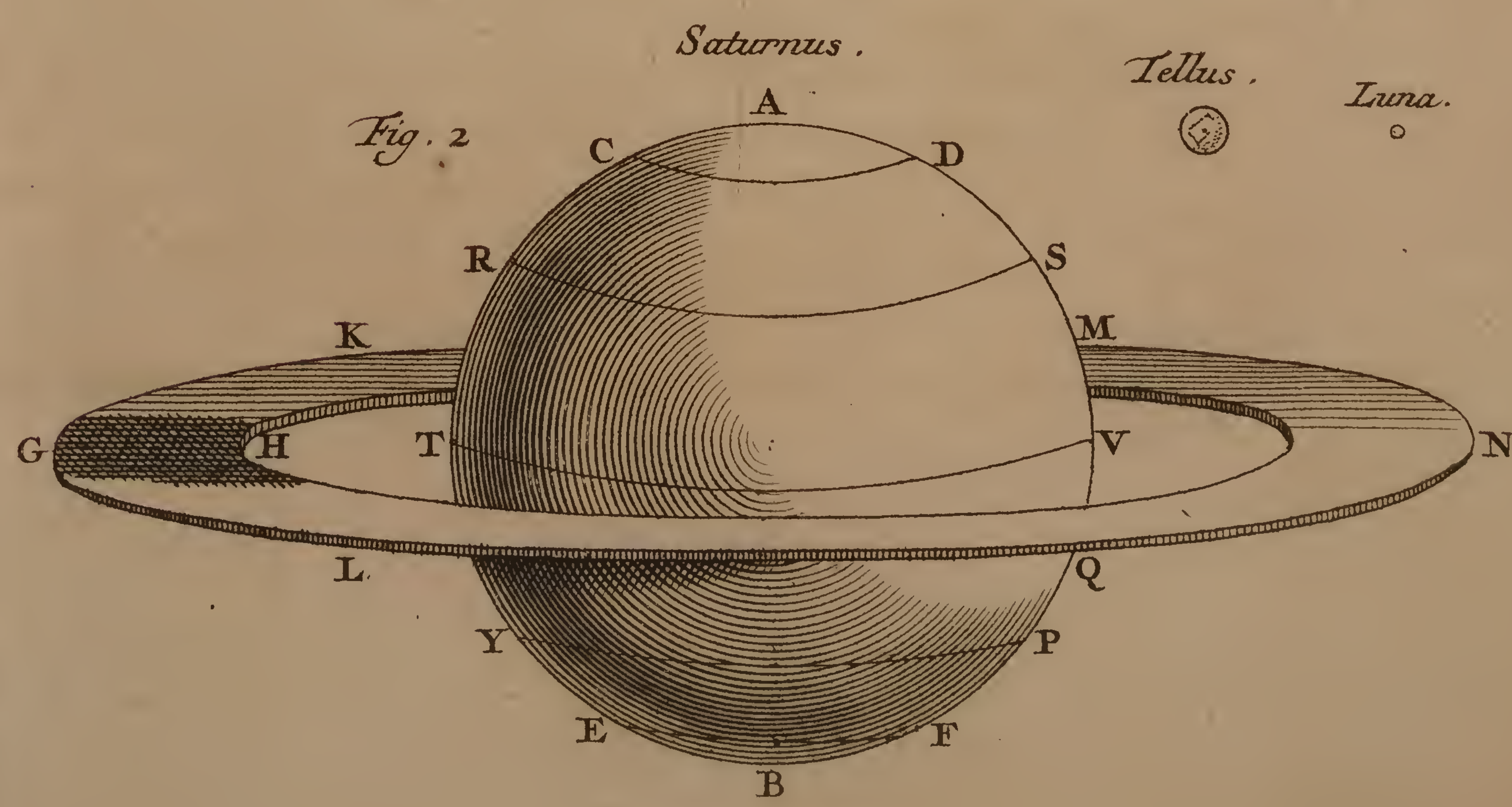
De Luna pauciora conjici poſſe.

Ac videtur quidem, cum tam propinquus nobis ſit Lunæ glo-

Fig. 1.


♋
Saturni.
Jovis.
Martis.
Telluris.
Veneris.
Merc.
Sol.
♎
♈
♑

Fig. 2


Saturnus.
Tellus.
Luna.
A
C
D
R
S
K
M
G
H
T
V
N
L
Q
Y
P
E
F
B

globus; teleſcopioque utentibus multa particulatim conſpicienda præbeat; plura quoque ac probabiliora de univerſa natura ejus, quàm de Planetarum cæterorum conjici poſſe, tanto quippe remotiorum. Sed contra evenit ut vix quidquam de Lunæ rebus dicendum reperiam, nimirum quia ejus generis Planetam nullum coram intueri contigit; cum in primariis illis aliter hoc ſeſe habeat. Sunt enim, ut jam ſatis conſtat, generis ejuſdem ac Tellus noſtra, in qua, quid rerum geratur, quidve exſtet, propè intuemur, eoque de cæteris ſimilia quædam conjectandi ratio ſuppetit.

Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem eſſe.

Illud vero ſine omni dubitatione ſtatuere poſſumus, ejuſdem naturæ, ac Luna noſtra, eſſe illas, quæ Jovem ac Saturnum comitari dictæ ſunt, ſiquidem eodem prorſus modo primarios hoſce Planetas circumeunt, ſimulque cum illis circum Solem feruntur, perinde ac cum Tellure Luna. Sed & aliam utrobique ſimilitudinem intercedere poſtea videbimus. Quamobrem ſi quid de Lunæ ſtatu conjicere poſſimus, (poſſumus autem pauca admodum) idem in quatuor illis circa Jovem, & in quinque Saturniis haud multo aliter ſe habere putandum erit. Illud ſemper menti infixum tenendo, non eſſe illas viliores aut minore ornatu excultas.

Lunam montibus & vallibus diſtinctam eſſe.

Illud igitur in Luna noſtra apparet, etiam minoribus perſpicillis trium quatuorve pedum longitudine, plurimis montium tractibus, rurſuſque planis vallibus latiſſimis, ſuperficiem ejus diviſam eſſe. Cernuntur enim montium umbræ ea parte quam a Sole averſam habent; ac frequenter jugo in circulum fere compoſito incluſæ valles quædam minores animadvertuntur; quarum medio monticuli, unus pluresve rurſum eminent. Ex qua vallium rotunditate argumentum ſumebat Keplerus, Lunicolarum, cum ratione operantium, immenſas has eſſe molitiones. Sed hoc incredibile prorſus, tum ob nimiam earum magnitudinem; tum quod facile naturalibus cauſis cavitates ejuſmodi orbiculares formari poſſint.

Carere verò mari.

Marium vero ſimilitudinem illic nullam, (etſi & ille, & alii plerique omnes contra ſentiunt) reperio. Nam regiones planæ ingentes, quæ montoſis multo obſcuriores ſunt; quaſ-

que

que vulgo pro maribus haberi video, & oceanorum nominibus inſigniri; in his ipſis, longiori teleſcopio inſpectis, cavitates exiguas ineſſe comperio rotundas, umbris intus cadentibus; quod maris ſuperficiei convenire nequit: tum ipſi campi illi latiores non prorſus æquabilem ſuperficiem præferunt, cum diligentiùs eas intuemur. Quocirca maria eſſe non poſſunt, ſed materia conſtare debent minus candicante, quàm quæ eſt in partibus aſperioribus: in quibus rurſus quædam vividiori lumine cæteris præcellunt. Nulli quoque fluvii in Luna ineſſe videntur. Non enim effugerent aciem perſpicillorum noſtrorum; ſaltem ſi inter montes aut ripas præaltas, ut noſtri plerique, laberentur. Sed neque nubes ullæ ſunt unde pluviæ generentur ad ſuppeditandum fluviis humorem. Si enim eſſent, videremus eas nunc has nunc illas Lunæ regiones obtegere, ac viſui noſtro ſubducere, quod nequaquam contigit; ſed perpetua apparet ſerenitas.

Fluviis,

Nubibus,

Aëre & aqua.

Porrò nec aëre aut atmoſphæra Lunam cingi, qualis circum Tellurem hanc ambit, manifeſtum eſt. Quia ſi qua talis exiſteret, non poſſet extrema Lunæ ora tam præciſe circumſcripta ſpectari, quam ſubeunte ſtella aliqua ſæpe animadverſa eſt; ſed evanida quadam luce, ac velut lanugine finiretur, ut omittam vapores atmoſphæræ noſtræ maximam partem ex aquæ particulis conſtare; ac proinde, ubi nulla ſunt maria aut fluvii, non eſſe unde eorum copia ſurſum educatur. Hæc igitur inſignis differentia quæ Lunam inter Terramque noſtram reperitur, omnem fere aditum conjecturis obſtruit. Nam ſi maria amneſque ineſſe cernerentur, haud leve argumentum eſſet cæterum quoque Terræ ornatum ei convenire, veramque adeo eſſe Xenophanis opinionem, qui habitari in Luna dicebat, eamque Terram eſſe multarum urbium & montium. Nunc vero in ſolo arido, & omnis aquæ experte, non videntur neque herbæ, neque animantia exſtare poſſe, cum omnibus iſtis humor materiam & alimenta præſtare debeat.

Hinc de animantibus & ſtirpibus in-

Anne igitur credendum, tantæ magnitudinis globum in hoc conditum eſſe ut noctu nobis lucem tenuem largiatur, aut

aut æſtus maris cieat? Nemo erit qui pulcherrimo inde ſpectaculo fruatur Telluris noſtræ in ſe revolutæ, & nunc cum Europa Africam, nunc Aſiam, nunc Americam oſtentantis; nunc plene, nunc dimidio orbe lucentis? Omnes item quæ Jovem ac Saturnum circunſtant Lunæ, æquè inutiles vacuæque ferentur? Non habeo equidem quod dicam, cum nulla ab re ſimili conjectura ſuppetat. Magis tamen probabile videtur ob corporum præſtantiam, aliquid in ſuperficie eorum geri, aliquid creſcere ac vivere, qualecunque tandem id ſit, & quantumlibet à rebus noſtris diverſum. Poſſet forſan ſtirpium animaliumque ibi vitam aliud quid, aquæ noſtræ diſſimile, ſuſtentare. Poſſet exiguus humor in terra, non æque ac noſtra, aquam combibente, ſufficere radiis Solis, unde rorem educerent, alendis herbis arboribuſque idoneum. Quod idem Plutarcho in mentem veniſſe video in eo qui de Facie in orbe Lunæ eſt dialogo. Nam neque apud nos, niſi ſumma maris ſuperficie, ac tenui veluti pellicula opus eſſet, ad humorem terris, ſatiſque ſuppeditandum, quem Solis vis elicuiſſet, quique in rorem tantum, non vero in nubes condenſaretur. Sed hæ admodum leves ſunt conjecturæ aut ſuſpiciones potius, nec aliud habemus ex quo de Lunæ noſtræ, atque etiam reliquarum natura aliquid colligamus. Omnium enim, uti diximus, eadem putanda eſt; idque præter adductam ſuperius rationem, etiam hac alia confirmatur, quod ſicuti Luna noſtra eandem perpetuò faciem ad nos obverſam habet, ita & illæ Joviales ac Saturniæ ad ſuos Planetas primarios. Mirum videatur hoc ſciri potuiſſe; at non erat difficilis conjectura, poſtquam, ut paulo ante dixi, animadverſum fuit extremam Saturniarum tunc ſolum conſpici, cum Planetæ huic ad occidentem poſita eſt; ab oriente vero ſemper eam latere. Facile enim perſpicitùr id inde evenire, quod magna ſui parte obſcuriorem ſuperficiem habeat hæc Luna; quæ pars obſcurior cum ad nos converſa eſt, tunc cerni nequeat præ luminis tenuitate. Cumque ſemper in orbitæ ſuæ latere quod orientem ſpectat obſcurata reperiatur, in altero nunquam, manifeſtum indicium eſt eandem glo-

certiorem conjecturam eſſe.

Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.

globuli regionem ſemper Saturnum reſpicere, quoniam ex eo illud contingere neceſſe eſt. Quis vero jam dubitet, cum & illius omnium remotiſſimæ & noſtræ Lunæ facies ſemper eadem ex primario Planeta ſuo ſpectetur, quin idem in cæteris, quæ circa Jovem ac Saturnum volvuntur, natura effecerit? Cauſa vero quare id fiat vix aliunde peti poteſt, quam quod denſior ponderoſiorque materia ſit Lunarum omnium parte ea, quâ ſemper à Planetis ſuis averſæ ſunt. Sic enim ea ipſa pars majore vi à centro circuitus recedere contendet: cum alioqui, ex motus legibus, eadem ſemper facies non ad Planetam, ſed ad fixas ſtellas eaſdem, continue obverti debuerit.

Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c.

Porro ex hoc poſitu Lunarum ad Planetas ſuos mira quædam ſpectacula evenire neceſſe eſt eas habitantibus, qui an ſint aliqui, ut jam apparuit, multo incertiſſimum eſt; ſed quaſi eſſent ponantur. Satis erit autem de noſtræ Lunæ indigenis dixiſſe. His igitur ſic in duo hemiſphæria globus ejus dividitur, ut qui alterum incolunt, ſemper Telluris noſtræ conſpectu fruantur, qui reliquum, ſemper eo careant. Niſi quod quidam, circa confinia utriuſque agentes, amittant eum per vices ac recuperent. Cernunt autem Gæoſcopi illi Tellurem in æthere pendentem multo majorem quam quanta nobis Luna apparet, quippe ferè quadruplo ampliore diametro. Sed illud mirabile, quod nocte dieque eodem cœli loco velut immobilem perpetuo hærere vident; alii recta ſupra caput defixam, alii certa altitudine ab horizonte diſtantem, quidam & in ipſo horizonte ſitam: atque interea convertentem ſe circum axem ſuum, regioneſque quas continet univerſas deinceps oſtendentem horarum viginti quatuor ſpatio, atque eas quoque proinde (quod utinam videre liceret) quæ ad utrumque polum nobis incolis adhuc incognitæ manent. Præterea & lumine creſcentem eam vident & imminutam menſtrua periodo, atque ita per vices plenam, dimidiatam, inque cornua tenuatam, eâdem formarum varietate quam Lunæ globus nobis exhibet. Sed lucem à Tellure noſtra accipiunt quindecuplo majorem quam nos ab illa. Adeo

ut,

ut, in hæmiſphærio meliore, ad nos obverſo noctes inſigniter claras habeant; nec tamen cum claritate illa ullus ad eos calor manare poteſt, etſi hoc aliter Keplero viſum eſt. Sol verò ſemel illis oritur ſingulis menſibus noſtris, ſemelque occidit, atque ita dies noctesque, quindecuplo quam nos longiores habent, at inter ſe æquales perpetuo æquinoctio. Qua dierum longitudine, quandoquidem non amplius ab illis quam à nobis Sol abeſt, neceſſe eſſet eos, quibus altè ſupra horizontem aſcendit, æſtu incommodo torreri, ſi corpora eorum perinde ac noſtra afficiantur. Aſcendit autem maximè iis qui circa confinia hemiſphæriorum, quæ diximus, incolunt, qui vero inde procul diſtant, ac circa regiones habitant polis Lunæ ſuppoſitas, non magis ob longos iſtos dies calebunt, quam qui circa Iſlandiam aut novam Zemblam æſtivo tempore cetos piſcantur; qui perſæpe frigora ingentia, ipſius ſolſtitii tempore, ac trium licet menſium diebus, experiuntur. Sunt autem poli Lunæ, quos circum ſtellæ fixæ converti cernuntur in ea habitantibus, nequaquam iidem qui nobis, neque etiam cum Eclipticæ polis conveniunt, ſed his circunferuntur, quinque gradibus ſemper diſtantes, idque periodo annorum novendecim. Anni autem ſpatium idem illic quod nobis; quod motu fixarum metiuntur ac reverſione earum ad Solem. Idque iis perfacile eſt, cum diei tempore, non minus quam noctu, ſtellas conſpiciunt, nihil impediente Solis claritate; quoniam, ut ſupra oſtenſum eſt, nullam vaporum ſphæram habent; ſine qua & nos interdiu cœlum ſideribus plenum aſpiceremus. Nec vero nubes quoque ullæ unquam obſtant obſervantibus, adeo ut curſus Planetarum melius quàm nos inveſtigare poſſint; ſed tamen difficilius multò verum ſyſtema reperire. Quoniam incipientibus ſtare Terra ſua videri debuit, in quo eos longius quàm nos error abduxit.

Hæc omnia vero ad Jovis & Saturni Lunas referuntur, quibus idem quod nobis Tellus eſt, ſui ſunt primarii Planetæ. Singula autem diei noctiſque ſpatia ſimul ſumpta, cujuſque Lunæ periodus metitur, quas ſupra annotavimus.

Quod ad Jovis & Saturni Lunas facilè transferre eſt.

Quo fit ut Saturni quintam incolentibus, cujus periodus dierum noſtrorum erat 80, eveniant ſui dies noctesque noſtris quadraginta æquales. Iiſdem vero, propter Saturni revolutionem tricennalem, fiunt æſtates hyemeſque ſingulæ annorum noſtrorum quindecim. Itaque tum propter tam longa frigora, tamque longos ſomnos vigiliaſque; etiamſi nil aliud eſſet, plane aliam quam apud nos vitam illic fore manifeſtum eſt.

Explicuimus igitur hactenus, quæ ad Planetas primarios ſecundarioſque Solem circundantes ſpectant. Hinc vero priuſquam ad Solem ipſum & ſtellas fixas, tertium nempe genus cœleſtium corporum, pergamus, operæ pretium videtur, ut magnitudinem, ac magnificentiam totius Solaris mundi, aliqua ratione, atque evidentius quam hactenus factum ſit, exprimamus. Quod quidem ſchemate in foliis hiſce deſcripto haudquaquam poſſumus, propter parvitatem corporum Planetariorum ad vaſtiſſimas orbitas ſuas collatorum. Sed verbis ſupplebitur quod deſcriptione perfici nequit. Itaque repetitâ figurâ quam ſuperioris libri initio poſuimus, cogitetur ei ſimilis ac proportione reſpondens, ſed quæ deſcripta ſit in ampliſſima politiſſimaque areæ cujuſdam planitie, cujus extremus circulus, Saturni orbem referens, trecentos ſexaginta pedes ſemidiametro contineat. In cujus deinde circunferentia globus Saturni cum ſuo ponatur Annulo, quantus in figura altera cernitur, ubi Solis & Planetarum ſunt corpora. Cæterique ſimiliter globi in ſua quiſque orbita collocentur; inque medio omnium Sol qua magnitudine ibi deſignatur, quatuor nempe pollicum diametro. Ita Telluris circuitus, quem *magnum orbem* vocant Aſtronomi, ſemidiametrum ſortietur pedum triginta & ſex. In quo Tellus ipſa milii grano non major circunferri cogitanda eſt; eique comes Luna, vix punctum viſibile ſuperans, in circello paulo plus quam duos pollices lato; velut in adſcripto hic diagrammate. In quo linea AB circunferentiæ partem refert ejus, quam diximus, Telluris orbitæ, cujus triginta & ſex pedes continet ſemidiameter. In ea Tellus eſt cir-

TAB. LIV. fig. 1. *Solaris mundi ſecundum veram proportionem deſcriptio.*

TAB. LV. fig. 1.

TAB. LV. fig. 2.

circellus C: Lunæ vero circum eam via, circulus DE; in quo Lunæ corpuſculum quale ad D expreſſum eſt.

Saturniarum vero Lunarum exterior in circulo feretur cujus ſemidiameter pollicum 29. Jovialium item exterior in minore aliquanto, cujus ſemid. poll. $19\frac{1}{4}$.

Sic demum habebitur germanus & omni proportione perfectus ſolaris Regiæ typus, in quo jam Tellus duodecim mille diametris ſuis à Sole aberit. Cujus ſpatii amplitudo ſi milliarium numero deſignanda ſit, plus quam ſeptemdecim milliones, ut vocant, milliarium Germanicorum comprehendet. Sed melius fortaſſe hanc vaſtitatem animo concipiemus, ſi motus cujuſdam celeritate eam metiamur, Heſiodi Poëtæ exemplo; qui altitudinem cœli, & Tartari profunditatem æquis ſpatiis definiens, novem dierum noctiumque lapſu, ferream incudem è cœlo dimiſſam, ad terram decimâ pervenire ſcripſit; ac tanto quoque tempore è Terræ ſuperficie cadentem ad Tartara ferri. Nos vero non incudis lapſum ſed continuam potius celeritatem globi ex majore tormento emiſſi huc adhibebimus; quem ſingulis horæ ſecundis ſcrupulis, ſive arteriæ pulſibus, centum circiter hexapedas conficere experimentis compertum eſt, quæ in Baliſticis Merſennus commemorat; cum ſonus eo tempore ad centenas octogenas extendatur.

Immenſitas intervallorum inter Solem & Planetas, illuſtratur comparatione cum motu globi è tormento emiſſi.

Ajo igitur, ſi ex Terra ad Solem tanta illa celeritate globus continuè feratur, fere annos 25 eſſe inſumpturum antequam iter hoc peragat. Ut proinde à Jove ad Solem 125 annis opus habeat, à Saturno 250. Et hic quidem calculus ex menſura Terræ diametri pendet, qui ex probatioribus Gallorum obſervationibus eſt hexapedarum Pariſienſium 6538594. cum gradus unus circuli maximi efficiat hexapedas 57060. Quanta itaque ſint iſtorum orbium ſpatia, quamque exilis, eorum reſpectu, Telluris globulus, in quo tam multa homines molimur, tantum navigamus, tot bella gerimus, ex his intelligitur. Quod utinam diſcant cogitentque Reges & Monarchæ noſtri; ut ſciant quantilla in re laborent cum de angulo aliquo terræ occupando totis viribus, magno multorum

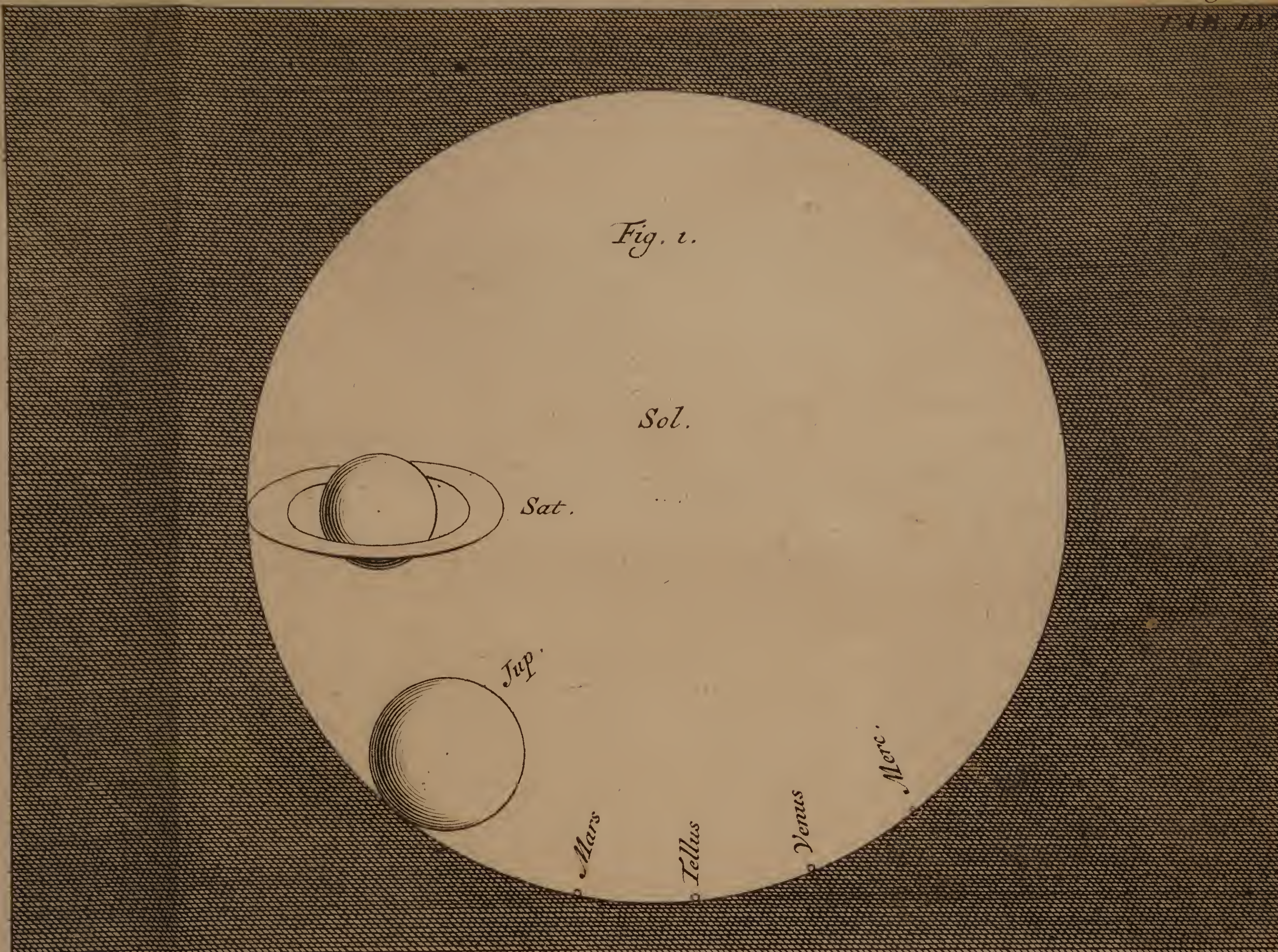
malo, contendunt. Sed ad noſtra revertamur, ac de Sole videamus, cujus jam ſimul ad Planetas & eorum orbitas magnitudinem ampla illa deſcriptio, quam expoſuimus, demonſtrat.

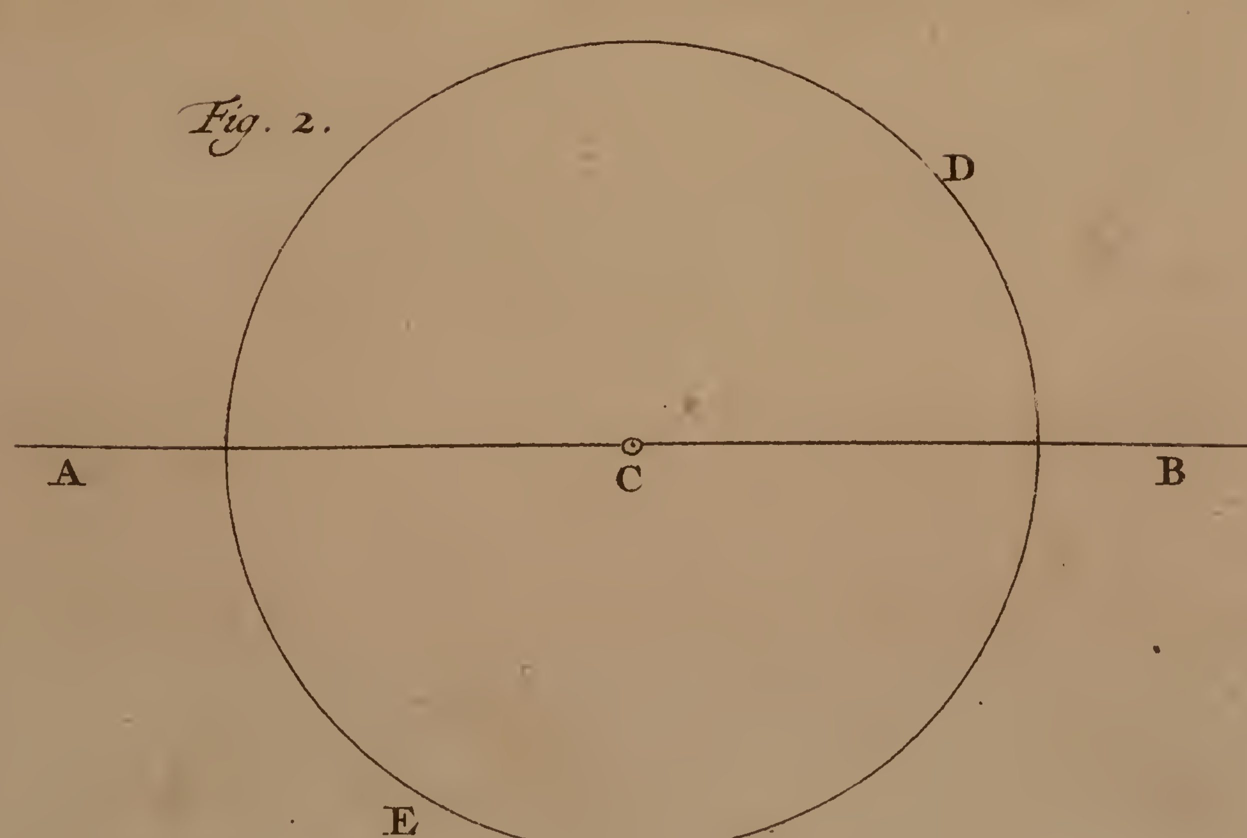
In Sole omnem conjecturam deficere.

In hoc igitur ipſo Sole non improbabile quibuſdam viſum eſt animalia vivere poſſe. Sed cum multo magis etiam, quam in Lunis, conjectura omnis hic deficiat, neſcio qua ratione id ita eſſe opinati ſint. Non enim adhuc planè compertum eſt, utrum dura an liquida ſit vaſti illius globi materies; etſi propter lucis naturam, quam aliàs explicui, magis veriſimile ſit liquidam eſſe; quod etiam perfecta rotunditas ejus, lumenque per totam ſuperficiem æqualiter diffuſum ſuadere videtur. Nam exigua quædam in diſci circunferentia apparens inæqualitas, quæ teleſcopiis, nec tamen ſemper, cernitur, & ex qua miros *undarum fluctus, flammarumque eructationes*, nonnulli ſibi fingunt, nihil aliud eſt quàm vaporum prope Terram noſtram tremula agitatio, quæ & ſtellas noctu ſcintillare facit. Neque ego faculas illas, quas unà cum maculis fere omnes celebrant, unquam videre potui, etſi has ſæpius ſpectaverim; ac valde dubito an aliquid in Sole, ipſo Sole lucidius appareat. Invenio enim, fideliores obſervationes conſulens, non niſi in nubeculis illis ſubfuſcis, quæ maculas plerumque circundant, aliquando ſolæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari, quæ non mirum eſſet, propter obſcuritatis illius viciniam, ſplendidiora quam ſint videri. Summum quidem in Sole calorem, fervoremque eſſe, certo credendum eſt, in quo nihil omnino noſtrorum corporum ſimile vivere poſſit, aut momento ſupereſſe. Itaque aliud genus viventium animo concipiendum eſſet, longeque ab omni natura eorum quæ unquam vidimus, aut cogitavimus, diverſum. Quod fere idem eſt ac ſi dicamus nihil hic conjectando nos conſequi poſſe. Eſt quidem tam præſtans, tantæque molis corpus haud dubiè maxima ratione, ac propter inſignem uſum aliquem creatum. Sed an non apparet jam abunde utilitas ejus in mirabili illa lucis caloriſque in totum Planetarum circumſtantium chorum effuſi-

Faculas Solares incertas videri.

Propter calorem nulla illic vivere copora noſtris ſimilia.


Fig. 1.
Sol.
Sat.
Jup.
Mars
Tellus
Venus
Merc.


Fig. 2.
D
A
C
B
E

ſione; ex qua univerſo animantium generi non vita ſolum conſtat, ſed & jucunda ut ſit efficitur? Idque non in exiguis ſolum, qualis Tellus noſtra, ſed & in tanto majoribus Jovis & Saturni globis, quorum non eſt contemptibilis ad Solem collata magnitudo. Hæc quidem tanta ſunt ut nihil mirum ſit eorum gratia duntaxat Solem eſſe conditum. Nam quod Keplerus opinabatur, aliud quoque illi delegatum eſſe munus, ut nempe omnium circum ambientium Planetarum motus in ſuis orbibus incitaret, propria ſua circa axem converſione, quod in Epitome ſyſtematis Copernicei multis comprobare conatur, non poſſum aſſentiri, propter ea quæ in ſequentibus dicentur.

Stellas fixas totidem eſſe Soles.

Solem ex ſtellis inerrantibus unam eſſe, ante Teleſcopii inventionem, adverſari videbatur Copernici ſententiæ; quia cum ſtellæ, quæ dicuntur primæ magnitudinis, cenſerentur trium ſcrupulorum diametro, eſſentque ſecundum Copernicum tam procul remotæ, ut totus ille Orbis magnus, quo Terra defertur, velut puncti inſtar eſſet ad ſphæram affixarum comparatus; quandoquidem toto anni tempore, etſi locum Terra mutaret, nihil mutari cernerentur ſtellarum diſtantiæ; ſequebatur ſingulas earum, quæ cæteris clariores apparent, majores eſſe toto illo magni orbis ambitu: quod abſurdum erat. Atque hoc, ut palmarium contra Copernici doctrinam argumentum, Tycho Braheus objectabat. Sed poſtquam radios ſtellarum nudo viſu apparentes, Teleſcopia ſuſtulerunt; (quod ita optimè faciunt, ſi lens oculo proxima flammæ afflatu obſcuretur) atque ita haud aliter eas ac puncta lucentia ſpectandas præbuerunt; prorſus ſublata quoque eſt ea difficultas, nec quidquam jam impedit quo minus ſtellæ iſtæ pro totidem Solibus habeantur. Idque eo probabilius redditur, quod conſtet propria luce ſua eas lucere: tanta enim eſt diſtantia, ut à Sole illam mutuari nequaquam poſſint. Singulas vero Sole minores non eſſe nihil credi vetat, cum ex tam immenſo intervallo tam vividum lumen fundant. Hanc itaque ſententiam nunc paſſim tenent qui Copernici ſyſtema amplectuntur. Qui recte quoque hoc ſta-

Eas ſpargi per vaſta cæli

ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri.

ſtatuunt, non in una eademque ſuperficie hærere ſtellas iſtas; tum quod nulla ratio hoc ſuadeat, tum quod in eandem ſphæram Sol, qui earum una eſt, referri nequeat. Itaque veriùs eſſe ſpargi eas per vaſta cœli ſpatia, quantumque à Terra aut Sole ad proximas interjacet, tantum circiter ab his eſſe ad ſequentes, atque inde rurſus ad alias, continuo progreſſu.

Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.

Scio etiam hic aliud ſentire Keplerum, in ea, quam diximus, Epitome. Quamquam enim exiſtimet tota cæli profunditate ſtellas diſſeminatas eſſe, vult tamen Solem hunc noſtrum multo amplius ſpatium circa ſe habere, quaſi ſphæram vacuam, ſupra quam confertius ſtellis cœlum incipiat. Putabat enim alioqui futurum ut paucæ tantum ſtellæ numerarentur nobis, eæque ſumma magnitudinis diverſitate: *nam cum omnium maximæ tam appareant parvæ, ut vix inſtrumentis poſſint notari aut menſurari, conſequens eſſe ut quæ duplo aut triplo &c. diſtarent longius, duplo & triplo appareant minores, poſitis æqualibus ipſis veris magnitudinibus; citoque veniatur ad eas quæ penitus fiant inſenſibiles: atque ita pauciſſimas viſum iri ſtellas, eaſque in maxima differentia;* cum contra amplius quam mille obſerventur, nec magnitudine ita multum diverſæ. Sed ex his nequaquam id quod ille intendit evincitur; ac præcipue in eo deceptus fuit, quod non advertit ignium, & flammæ eam eſſe naturam, ut ex maximis intervallis cerni poſſint, iiſque unde alia corpora, æque exiguis angulis comprehenſa, prorſus evaneſcant. Quod vel lucernæ comprobant, quæ per urbium noſtrarum vicos noctu incenduntur. Quæ cum ad centenos pedes inter ſe diſtent, tamen earum viginti & plures, in continua ſerie magis magiſque remotas, numerare licet, etſi viceſimæ flammula vix 6 ſecundorum ſcrupulorum angulo conſpiciatur. Idem vero multo magis fieri neceſſe eſt in eximia illa ſtellarum luce; adeo ut nihil mirum ſit, ad mille aut duo millia earum, oculis notari poſſe; Teleſcopiis vero adhibitis, etiam vigecuplo plures deprehendi. Sed ſuberat ratio, cur Keplerus Solem præ reliquis ſtellis præci-

puum

puum quid habere cuperet; circumque eum eſſe unicum, in Natura, Planetarum ſyſtema, idque mundi medio ſitum. Hiſce nimirum opus habebat ad confirmandum myſterium Coſmographicum ſuum, quo certis quibuſdam proportionibus reſpondere volebat Planetarum à Sole diſtantias diametris ſphærarum, quæ corporibus polyedris Euclideis inſcribuntur & circunſcribuntur ſingulis. Quod tum demum veriſimile videri poterat; ſi in mundo univerſo unus tantum eſſet circa Solem aberrantium ſiderum chorus, adeoque & Sol ipſe ſolus ſui generis.

Sed myſterium illud totum, ſi bene perpendatur, ſomnium quoddam ex Pythagoræ aut Platonis Philoſophia enatum eſſe apparet. Nec proportiones ſatis quadrant, ut ipſe quoque auctor agnoſcit; ſed, cur hoc ita ſit, alias cauſas plane frivolas comminiſcitur. Idem levioribus etiam argumentis probat extremam mundi ſuperficiem, ſtellas omnes continentem, ſphæricæ eſſe figuræ; ac numerum præterea earum neceſſariò eſſe finitum, ex eo quod ſingularum finita ſit magnitudo. Illud vero vaniſſimum, quòd à Sole, ad ſuperficiem cavam ſphæræ fixarum, definit ſpatium ſexies centena millia Terræ diametrorum. Quoniam ſcilicet, ſicut Solis diameter ad diametrum Orbitæ Saturni; quos inter ſe eſſe ſtatuit ut 1 ad 2000; ita ſit hic diameter ad illum ſphæræ fixarum interioris; quod nulla ratione nititur. Atque hæc quidem Viro ſummi ingenii, magnoque Aſtronomiæ inſtauratori excidiſſe mirum eſt. Nos vero unà cum præcipuis noſtræ ætatis Philoſophis, ne dubitemus eandem ſtellarum earum & Solis naturam exiſtimare. Ex quo jam mundi idea multo major naſcitur, quam quæ ex hactenus traditis percipiebatur. Quid enim nunc prohibet, quin unamquamque ex ſtellis hiſce, ſive Solibus, haud aliter ac Sol noſter, circum ſe Planetas habere putemus, quæ rurſus ſuis Lunis ſtipatæ ſint? Imo hoc ita ſe habere, manifeſta ecce ratio ſuadet. Etenim ſi cogitatione in cœli regionibus nos ponamus, non minus à Sole, quàm fixis ſtellis, remotos; nihil quicquam diſcriminis haſce inter atque illum tunc eſſemus animadverſuri. Longè enim abeſt ut corpora Pla-

Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, eſſe Planetas.

netarum, Solem ambientium, conſpecturi ſimus, vel ob tenuiſſimam eorum lucem, vel quod univerſæ, quibus feruntur, orbitæ in unum idemque lucidum punctum cum Sole confunderentur. Hic igitur poſiti, meritò eandem omnium ſtellarum rationem naturamque eſſe exiſtimaremus; & ex una, propius inſpecta, de cæteris quoque judicari poſſe nihil ambigeremus. At nunc Dei benignitate, ad unam ex ipſis, Solem videlicet noſtrum, admoti ſumus, ac tam prope acceſſimus, ut circum eam ſex minores globos converti cernamus; & circa horum quoſdam, alios obire ſecundarios. Cur itaque non eo judicio nunc utamur; ac prorſus veriſimile putemus non ſolam hanc ſtellam tali comitatu cingi, aut aliqua in re cæteris præminere? Neque etiam ſolam circum axem ſuum converti; ſed potius cæteras omnes eadem hæc ſimilia habere? Ergo hac ratione etiam cuncta illa quæ in Planetis circumſolaribus ineſſe, ad Terræ noſtræ ſimilitudinem diſſeruimus, conſentaneum erit, ut ad innumeros Planetas alios, tot mille Solibus additos, æquè pertinere credamus. Eruntque & illic ſtirpes & animalia, atque etiam ratione inſtructa, quæ cœli convexa mirentur, & ſidera obſervent, motuſque eorum intelligant; atque omnia denique habeant, ſine quibus neque hæc haberi poſſe ſupra oſtendimus.

Quam mirabilis igitur quamque ſtupenda mundi amplitudo & magnificentia jam mente concipienda eſt. Tot Soles, tot Terræ, atque harum unaquæque tot herbis, arboribus, animalibus, tot maribus, montibuſque exornata. Et erit etiam unde augeatur admiratio, ſi quis ea, quæ de fixarum ſtellarum diſtantia & multitudine hiſce addimus, perpenderit.

Tantam igitur eſſe diſtantiam hanc, ut quæ Solem Terramque interjacet, Terræque diametrorum duodecim millia continet, ei comparata, exilis plane habenda ſit, non una ratione conſtat: atque hac inter cæteras, quod ſi proximæ quædam inter ſe ſtellæ notentur, quæ claritate plurimum differunt; velut in media caudæ, (quæ duplex eſt) Urſæ

ma-

majoris; nulla apparentis intervalli earum mutatio animadvertitur, quocunque anni tempore ſpectatarum; quod tamen fieri neceſſe eſſet, propter diverſas viſus poſitiones per annui Orbis ambitum, oriretur que parallaxis aliqua ſi, ut conſentaneum eſt, propior ſit ſtella quæ lucidior apparet. Qui autem ante nos definiendi tam vaſti ſpatii rationem inierunt, nihil certi comprehendere potuerunt, propter nimiam obſervationum neceſſariarum ſubtilitatem, quæque omnem diligentiam ſuperet. Itaque mihi unica hæc via ſupereſſe viſa eſt, quam nunc inſiſtam, qua ſaltem veriſimile quid in re tam exploratu ardua conſequamur. Cum ergo ſtellæ ut jam diximus, totidem ſint Soles; ſi earum aliquam Soli æqualem eſſe ſumamus, erit illius tanto major quam Solis diſtantia, quanto apparens diameter diametro Solis minor erit. Sed tam exiguæ apparent ſtellæ, etiam quæ primæ ſunt magnitudinis, atque etiam Teleſcopio ſpectatæ, ut veluti puncta lucentia ſine viſibili latitudine refulgeant. Quo fit ut ejuſmodi obſervationibus nulla earum menſura deprehendi poſſit. Cum itaque hac non ſuccederet, tentavi qua ratione Solis diametrum ita imminuere poſſem ut non majorem lucem quam Sirius, aut aliud è clarioribus ſideribus, ad oculum mitteret. Ergo occluſi rurſus, ut ſupra, tubi duodecimpedalis vacui aperturam alteram lamella tenuiſſima, cujus medio tam exiguum effeci foramen, ut Lineæ partem duodecimam non ſuperaret, ſive pollicis centeſimam quadrageſimam quartam. Hunc tubum ea parte ad Solem obverti; altera oculo admovi; qui tunc particulam Solis cernebat, cujus diameter, ad totius diametrum, erat ut 1 ad 182. Sed eam particulam multo clariorem comperiebam, quàm noctu Sirius apparet. Itaque cum longè magis arctandum Solis diametrum viderem, id ita effeci, ut, in perforata ejuſmodi lamina, vitreum globulum objicerem minutiſſimum, pari circiter diametro ac prius illud foramen habebat; quo globulo ad microſcopia antehac uſus fueram. Ita per tubum in Solem intuenti, contecto undique capite, ne quid diei lux turbaret, non minor ejus claritas quam Sirii videbatur.

Modus probabiliter inveſtigandi diſtantiam fixarum à Sole.

Atqui, ex Dioptrices legibus inſtituto calculo, fiebat jam Solis diameter $\frac{1}{152}$ ejus particulæ centeſimæ octogeſimæ ſecundæ, quam, per foramen exiguum, prius conſpexeram. Ductis autem in ſe $\frac{1}{152}$ & $\frac{1}{182}$, fit $\frac{1}{27664}$. Ergo euſque contracto Sole, vel euſque remoto, (erit enim effectus idem) ut diameter ejus ſit $\frac{1}{27664}$ ejus, quem in cœlo intuemur, ſupereſt illi lux quæ Sirii luci non cedat. Solis vero euſque remoti diſtantia erit neceſſario, ad eam quam nunc habet, ut 27664 ad 1: & diameter paulum excedet 4. ſcr. tertia. Itaque cum æqualis ei Sirius ponatur, ſequitur Sirii quoque diametrum totidem eſſe ejuſmodi ſcrupulorum; diſtantiamque itidem, ad eam qua à Sole abſumus, ut 27664 ad 1. Quod quàm incredibile ſit intervallum, apparebit eadem ratione, quam in æſtimanda Solis diſtantia adhibuimus. Nam ſi 25. annis opus habebat tormenti bellici globus, continua velocitate, quanta exploditur, incedens, ut à Terra ad Solem perveniret; jam numerus 27664 vicies quinquies ducendus eſt, atque ita fiunt 691600, adeo ut penè ſeptingenta annorum millia inſumpturus ſit globus, in tanta celeritate ſua, priuſquam ad proximas ſtellarum inerrantium perveniat. Atque ad has ſtellas ſerena nocte oculos circumferentes, quantum horum judicio comprehendere poſſumus, vix aliquot milliaribus ſupra verticem eas exſtare putamus. Quæſivi vero de proximis tantum. Cæteræ enim cum, ut jam diximus, iis ſpatiis in ulteriora cœli recedant, ut non minora ſint deinceps à propioribus ad ſequentes, quàm à Sole ad iſtas, quanta immenſitas ſupereſt! Si enim plures quàm mille, nudo viſu notantur; teleſcopiis verò decuplo aut vigecuplo amplius; quomodo ſciri poteſt aut definiri, quanta ſit multitudo ulteriorum, quas neque hoc auxilio attingere licet: aut quis numerus nimis magnus dicendus eſt, ſi ad Dei potentiam ſpectemus? Etenim, ſæpe hæc cogitanti mihi, in mentem venit, tantùm in primis numerorum exordiis calculos omnes noſtros verſari. Eſſe enim in ſerie eorum infinita, qui non tantùm viginti aut triginta, aut centum, aut mille notis ſcribantur in progreſſione noſtra denaria; ſed

qui

qui tot characteribus conſtent, quot arenæ grana in tota Telluris mole continerentur. Quis verò dicere audeat tali numero non majorem eſſe multitudinem ſtellarum inerrantium? Nam longè ulterius progreſſi ſunt, qui infinitam eſſe dixerunt; ut Veterum aliqui, atque etiam Jordanus Brunus; qui pluribus argumentis hoc ſe eviciſſe putat, ſed, ut mihi videtur, parum firmis. Nec tamen contrarium quoque perſpicuis rationibus probari poſſe exiſtimo. Illud conſtat, ſpatium naturæ univerſæ infinitè undique protendi; at nihil obſtat, quin, ultra definitam ſtellarum regionem, res alias innumeras Deus effecerit, à cogitationibus noſtris, æque, ac ſedibus, remotas.

Quid ſi verò nec innumeras quidem condidit, ſed ultra eas vacuum reliquit infinitum; ut totum illud, quod exſtare voluit, veluti nihil ſit præ iis quæ producere ejus omnipotentia potuiſſet? Sed ulteriorem horum inquiſitionem, totamque illam de infinito difficillimam diſputationem perſequi omitto, ne ad tot maximarum rerum comprehenſionem, qua jam defuncti ſumus, novus labor accedat. Ea tantùm hic ſubjungam, ex quibus, quænam ſit noſtra de toto mundi ſpatio opinio, cognoſcatur; quatenus nempe Solibus ſeu ſtellis inerrantibus patet, quibus ſua circumponi plenetaria ſyſtemata, probabile eſſe antea oſtendimus.

Unumquemque Solem vortice cingi, ſed Carteſianis multum diſſimili; contra quem pluribus diſputatur.

Exiſtimo itaque unumquemque Solem circumdari vortice quodam materiæ celeriter motæ, ſed qui multum diſſimiles ſint Carteſianis illis, tum ſpatii ratione, tum motus genere, quo in illis materia agitetur. Ea enim apud Carteſium eſt vorticum amplitudo, ut quiſque eorum alios ſe circumſiſtentes contingat, occùrrens ſingulis plana ſuperficie, veluti cum in aqua ſapone imbuta bullarum cumulos pueri inflant: moveri vero univerſam cujuſque materiam ſtatuit, in partem eandem rotando. At hunc motum non parum impediri oporteret, propter anguloſam vorticum ſuperficiem. Deinde cum ſit ejuſmodi, ut, velut circa axem cylindri, materia tota feratur, exoritur ei poſtea non exigua difficultas, cum globoſam Solis formam ex hoc motu deducere conatur: fru-

 ſtra-

ſtra prorſus, atque iis rationibus, quæ incautis aliquid eſſe videantur, cum reipſa nihil explicent. Vult præterea innatare, ac circumferri cum hac materia ætherea, Planetas; atque ea ratione videlicet in ſuis orbibus eas retineri, quòd non majore vi, quàm ipſamet, à centro motus recedere conentur. Sed hic ex Aſtronomicis complura objiciuntur, de quibus aliqua attigimus in diatriba de cauſſis gravitatis. Ubi & aliam rationem expoſuimus, quæ Planetas intra orbium ſuorum limites contineret. Ea eſt gravitas eorum Solem verſus; quæ unde exoriatur oſtendimus, quamque eo magis miror Carteſium præteriiſſe, quod de gravitate, qua corpora in Terram feruntur, primus ſolito meliora adferre cœpiſſet. Refert Plutarchus in libro ſupra memorato de Facie in orbe Lunæ, fuiſſe jam olim qui putaret ideo manere Lunam in Orbe ſuo, quod vis recedendi à Terra, ob motum circularem, inhiberetur pari vi gravitatis, qua ad Terram accedere conaretur. Idemque ævo noſtro, non de Luna tantum, ſed & Planetis cæteris ſtatuit Alphonſus Borellus; ut nempe Primariis eorum gravitas eſſet Solem verſus; Lunis vero ad Terram, Jovem, ac Saturnum, quos comitantur. Multoque diligentius ſubtiliuſque idem nuper explicuit Iſacus Neutonus, & quomodo ex his cauſis naſcantur Planetarum orbes Elliptici, quos Keplerus excogitaverat; in quorum foco altero Sol ponitur. Oportet autem, ſecundum noſtram de natura gravium ſententiam, quò Planetæ ad Solem ſuo pondere inclinent, vorticem turbinemve materiæ cœleſtis circa eum converti non totum in eaſdem partes, ſed ita ut variis motibus, iiſque celerrimis in omne latus ſecundum diverſas ſui portiones rapiatur, nec tamen dilabi poſſit, propter circunſtantem ætherem, qui non tali nec tam celeri motu agitetur. Hujuſmodi vortice gravitatem corporum in Terram, ejuſque effectus omnes explicare conati ſumus, in ea, cujus memini, diatriba. Eademque, ut puto, eſt ratio gravitatis Planetarum Solem verſus; & ex his quoque tam Terræ

no-

noſtræ, quàm cæterarum, atque etiam Solis, rotunditas conſequitur; quæ in Carteſiana hypotheſi tantum habet incommodi.

Porro & ſpatia horum vorticum, ut dixi, multo quam ille contractiora pono. Sic enim fere eos ſtatuo in vaſta cœli profunditate diſperſos, quemadmodum turbines aquæ exiguos, hinc inde in ſpatioſo lacu ſtagnove, baculi agitatione, excitatos, ac magnis intervallis totiſque ſtadiis diſtantes. Et ſicuti horum motus nequaquam ab unis ad alios perveniunt, nec proinde ſeſe mutuo impediunt; ita quoque cœleſtium vorticum motus, circum aſtra aut Soles, ſe habere exiſtimo.

Itaque neque alii alios deſtruere poſſunt aut abſorbere, quemadmodum finxit Carteſius, cum oſtendere vellet quomodo ſtella aut Sol aliquis vertatur in Planetam. Apparet autem, cum hæc ſcriberet, non attendiſſe eum ad immenſam ſtellarum inter ſe diſtantiam; idque vel ex hoc uno, quod, cum primum Cometes aliquis intra vorticem noſtrum, cujus centrum Sol occupat, deſcendit; vult eum nobis viſibilem fieri, quod eſt abſurdiſſimum. Quomodo enim, ſidus ejuſmodi, quod ex Solis lumine repercuſſo tantummodo ſplendet; ut cum pleriſque Philoſophis ipſe ſtatuit; quomodo, inquam, poſſet conſpici à tanto intervallo, quod ſaltem decies millies contineret illud quod à Terra ad Solem eſt. Non enim ignorare poterat vaſtiſſimum, circa Solem undique extenſum, ſpatium; cum ſciret in Copernici ſyſtemate orbem magnum, hoc eſt, orbitam Terræ, velut punctum eſſe cum illo comparatum. Sed tota hæc de Cometarum, atque etiam de Planetarum, & mundi origine, commentatio apud Carteſium tam levibus rationibus contexta eſt, ut ſæpe mirer tantum operæ in talibus concinnandis figmentis eum impendere potuiſſe. Mihi magnum quid conſecuti videbimur, ſi quemadmodum ſeſe habeant res, quæ in natura exſtant, intellexerimus; à quo longiſſime etiam

nunc

nunc abſumus. Quomodo autem quæque effectæ fuerint, quodque ſunt, eſſe cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi poſſe, exiſtimo.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA

MISCELLANEA.

Tomus Quartus.

Tomi quarti contenta.

De Ratiociniis *in* LUDO ALEÆ. 723.

NOVUS CYCLUS HARMONICUS. 745.

Varia *de* OPTICA. 755.

Experimenta Phyſica. 767.

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ
AUCTORE
CHRISTIANO HUGENIO.

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clariſſimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

Cum in editione elegantiſſimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariſſime, id inter cætera te ſpectare ſciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inſtituiſti, oſtendas quam latè ſe protendat divina Analytices ſcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propoſito tuo inſervire poſſe, quæ de aleæ ratiociniis conſcripſimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, túque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea eſſe exiſtimem hâc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocaſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſus utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quòd tu veluti inter tua ado-

ado-

adoptaveris, nec ſine multo labore è vernacula lingua noſtra in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus ſit rem non ut videtur ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis viſum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, ſicut illa, in nuda numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibuſque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quiſque occultam retinuêre, adeo ut a primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumero expertus ſum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidiſſe me invenies, omiſſa tamen analyſi, cum quod prolixam nimis operam poſcebant, ſi perſpicuè omnia exequi voluiſſem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi noſtrorum, ſi qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculóque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum ſi habeat, poſſit denuo ad ſimilem ſortem ſive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, ſi quis me inſcio alterâ manu 3 ſolidos occultet, alterâ 7 ſolidos, mihique optionem det ex utra manu ſolidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac ſi 5 ſolidi mihi dentur. Quoniam quinque ſolidos habens, denuo eò pervenire poſſum, ut æquam expectationem nanciſcar ad 3 vel 7 ſolidos obtinendos: idque æquo luſu contendens.

Propositio I.

Si a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere* $\frac{a+b}{2}$.

AD hanc regulam non ſolùm demonſtrandam, verùm etiam primitùs eruendam poſito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quùm x habeo, rurſus ad ſimilem ſortem pervenire poſſe, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque luſus eſſe talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quiſque deponat x, ac ut victor victo traditurus ſit a. Hic autem luſus juſtus eſt, & patet me hâc ratione æquam habere ſortem ad obtinendum a, ſi luſum perdam ſcilicet; aut $2x-a$, ſi vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depoſitum eſt, de quo alteri erogandum eſt a. Quòd ſi autem $2x-a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi ſors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x-a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonſtratio facilis eſt. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ poſſum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo ſit traditurus *a*. Quâ ratione ſimilis expectàtio mihi obtinget ad obtinendum *a*, ſi perdam, aut ad obtinendum *b*, ſi vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo *a*.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino juſtus, & patet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam, aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, *vel* c *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt* $\frac{a+b+c}{3}$.

AD quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, *x* pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quiſque noſtrum trium deponat *x*, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus *b*, & ego ipſi traditurus ſim *b*, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit *c*, aut ego ipſi ſim daturus *c*, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum *b*, ſi nimirum primus vincat, aut *c*, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo *b*, & alteri *c*. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi *a*, eadem mihi obtingeret expe-

pectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, ſi ad a, b, c, aut d æqua ſors mihi obtingat, id tanti valoris eſſe, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Propositio III.

Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet a, *ſit* p, *numerus autem caſuum quibus mihi eveniet* b *ſit* q, *ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

AD hanc regulam eruendam, ponatur rurſus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe, ut ante, juſto luſu. Ad hoc autem tot colluſores ſumam, ut unà mecum numerum ipſius $p+q$ efficiant, quorum deponat quiſque x, ita ut depoſitum ſit $px+qx$, & quiſque ſibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hiſce colluſoribus, quot indicat numerus q, ſigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi ſit daturus b, aut ego contra ipſi idem b, ſi vincam. Similiter cum reliquis colluſoribus, conſtituentibus $p-1$ ſigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus a, & ego tantundem (a ſcilicet) ipſi, ſi ego vincam. Et patet hunc luſum hâc conditione juſtum eſſe, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p-1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depoſitum eſt, de quo tradere debeo b unicuique q luſorum, & a unicuique $p-1$ luſorum, quæ ſimul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale eſſet ipſi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & ſic ad priorem meam exſpectationem rurſus perveniſſem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio poſitum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile eſt oſtendere, me, ſi 11 habeam, rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Ludens enim contra 4 alios, & quiſque noſtrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis ſigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi ſit daturus 8, aut ego ipſi idem 8, ſi vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus 13, aut ego ipſi tantundem, ſi ego vincam. Qui quidem luſus juſtus eſt. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum ſi alteruter eorum, qui mihi 8 promiſerunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum ſi alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut ſi ipſe ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depoſitum, id eſt, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

Propositio IV.

Ut igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de facienda diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opus eſt ut a facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum pro-

ſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur *a*. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primùm ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum *a* aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquam alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hîc facere diſtributionem.

ADvertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum viceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, *a*; quòd ſi autem ille primum ludum vince-

ce-

ceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1mam Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4or luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

Propositio VI.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.

Fiet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

Propositio VII.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$

aut $\frac{13}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Unde patet, eum meliorem habere ſortem, qui duos luſus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim poſteriori caſu, nimirum ipſius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propoſitionem, eſt $\frac{3}{4}a$, quæ minor eſt quàm $\frac{13}{16}a$.

Propositio VIII.

Nunc verò ponamus tres eſſe colluſores, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rurſus advertendum eſt, quid ipſi deberetur, ſi vel ipſe vel alter reliquorum duorum primum luſum vinceret. Si ipſe vinceret, haberet depoſitum, id quod ſit a. Quòd ſi ſecundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam ſecundus ſic luſui finem impoſuiſſet. At ſi tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret luſus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere poteſt cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipſi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propoſitionem. Et fit ſimiliter ſecundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars ſeparatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

Pro-

Propositio IX.

Ut tot colluſorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſus deficiunt, cujuſque pars inveniatur, conſiderandum eſt, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, ſi vel ipſe, vel quiſlibet reliquorum primum ſequentem ludum vinceret. Horum autem partes ſi in unam ſummam colligantur, & aggregatum per numerum colluſorum dividatur, quotiens oſtendet unius quæſitam partem.

Ponamus tres eſſe colluſores A, B, & C, & ipſi A unum ludum deficere, ipſi B duos luſus, & ipſi C ſimiliter duos luſus Invenire oportet, quid ipſi B, ejus quod depoſitum eſt, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum eſt, quid ipſi B deberetur, ſi vel ipſe, vel A, vel C primum ſequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem impoſuiſſet, ac per conſequens ipſi B deberetur o. Si ipſe B vinceret, deficeret illi adhuc unus luſus, & ipſi A unus luſus, at ipſi C duo luſus. Quocirca ipſi B hoc in caſu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam. Propoſitionem.

Denique ſi C primum ſequentem ludum vinceret, tunc ipſis A & C ſingulis unus deficeret luſus, ſed ipſi B duo luſus, ac per conſequens ipſi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propoſitionem 8vam. Nunc autem in unam ſummam colligendum eſt, id quod in tribus hiſce caſibus ipſi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum ſumma eſt $\frac{5}{9}q$. Quod ipſum diviſum per 3, numerum colluſorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipſius B quæſita pars eſt. Demonſtratio autem hujus patet ex 2da Propoſitione. Quoniam enim B æquam habet ſortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propoſitionem tantundem ac

$\frac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculò ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1, 2, 3, quin primùm calculò ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1, 1, 3; qui ſimiliter per 8vam Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quo-

quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones. Ad quas ſolvendas advertendum eſt.

Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3^{tia} ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

In tribus teſſeris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PRO-

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe caſus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur a. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum a, ſed quinque ad obtinendum o; id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut ſors utriuſque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inueniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

SI quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem ratio-

tionem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent a, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

Propositio XII.

Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.

Hoc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante oſtenſa ſunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem

dem valere dictum eſt ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu exiſtente ſenario, opùs eſt, ut ex duobus jactibus non niſi ſemel ſenarium jaciat. Quod per 10 Propoſitionem tantundem valet ac ſi $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum eſt ipſum unum habere caſum, quo primâ vice ſenarium jaciat, & quinque caſus quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio unum caſum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 caſus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ ſeu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto aſſumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ teſſerâ, aut 10 teſſeris primo jactu ſuſcipi poſſe, ut duo ſenarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur.

QUoniam 36 jactuum, qui duabus teſſeris proveniunt, 6 jactus exiſtunt ſeptem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, reſtant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare poſſunt; id quod ſi fiat, cuique noſtrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus, quibus vincam, id eſt, ut a habeam; & 3 caſus, quibus diverſum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propoſitionem tantundem eſt ac ſi tali caſu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 caſus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propoſitionem, tantundem eſt ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

Propositio XIV.

Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus; hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille vero quam primùm ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.

Ponatur, ſortem meam valere x, & id quod depoſitum eſt vocari a; eritque ſors alterius ∞ $a-x$. Et patet, quandocunque ipſius vices jaciendi revertuntur, ſortem meam tum rurſus debere eſſe ∞ x. At quandocunque meæ vices ſunt ut jaciam, ſors mea pluris æſtimanda eſt. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quo niam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 teſſeris, qui colluſori meo ſenarium dare luſuſque victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, quibus diverſum eveniat, id eſt, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priuſquam jacit, 5 caſus ad obtinendum o, & 31 caſus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{31\,y}{36}$. Poſuimus autem caſum meum à principio eſſe ∞ x. Quocirca erit $\frac{31\,y}{36}$ ∞ x, adeoque y ∞ $\frac{36\,x}{31}$. Deinde poſitum fuit, vicibus meis venientibus, ſortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 caſus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 caſus, quibus vices colluſoris mei revertuntur, id eſt, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam

Pro-

Propoſitionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum ſit ∞y, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco ſubjungantur ſequentia Problemata.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione; ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituet; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſus A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276.

PROBLEMA II.

Tres colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt; 10 cujuſque ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit; ita

 ut

ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA IV.

Aſſumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B.

PROBLEMA V.

A & B aſſumentes ſinguli 12 nummos ludunt tribus teſſeris hâc conditione: ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
NOVUS CYCLUS
HARMONICUS.

CHRISTIANI HUGENII
NOVUS CYCLUS
HARMONICUS.

Litteræ D. Hugenii de Cyclo Harmonico.

NOvam tibi mitto de Muſica obſervationem. Spectat hæc prima Scientiæ illius fundamenta, id eſt, tonorum, qui in cantu & Inſtrumentorum fabrica obſervantur, determinationem. Quicunque licet parum verſati ſint in parte illa Theoriæ, norunt, quid ſit, quod vocatur Temperamentum, quod tonos illos moderatur & quam neceſſarium illud ſit in harmonia tuborum Organi vel chordarum Clavecymbali.

Celebriores auctores, uti Zarlinus & Salinas, illud referunt inter inventa pulcherrima & utiliſſima, quæ in muſicis detegi poſſunt; & uterque contendit ſe primum Temperamentum hoc ad examen revocaſſe, & demonſtrationibus Mathematicis conſtituiſſe. Ante illos experientia & neceſſitas illud quidem aliquo modo jam introduxerant, licet vera menſura & methodus nondum eſſet cognitæ. Inventio hujus Temperamenti in cauſa fuit, ut merito negligerentur omnes veterum Tetrachordarum & Diapaſonorum diviſiones quarum pleræquæ abſurdæ & uſus nullius erant in compoſitione plurimarum partium: hac etiam inventione noſtrum ſyſtema tonorum magis abundat conſonantiis, magiſque eſt juxta naturam cantus, quam illorum erat.

Pono notas eſſe proportiones, in quibus conſiſtunt perfectæ conſonantiæ, ſcilicet: Quintam audiri, quando, poſt ſonum editum ex motu chordæ integræ, duæ tertiæ partes ipſius agitantur: vel proportionem, a qua conſonantia hæc pendet, eſſe ut 3 ad 2; Quartæ proportionem eſſe ut 4 ad 3; Tertiæ majoris ut 5 ad 4; Tertiæ minoris ut 6 ad 5; Sextæ majoris ut 5 ad 3; Sextæ minoris ut 8 ad 5. Et quantum ad Temperamentum, iidem autores, quos modo memoravi, nos docent, ut hoc applicetur inſtrumentis, conſonantiam Quintam minuendam eſſe quarta parte *Commatis* ut vocant, quæ adeo exigua eſt diminutio, ut auris hanc difficulter percipiat, & nullam inde capiat moleſtiam; cum *Comma* integrum ſit ratio inter tonum integræ chordæ, & hujus tonum quando parte $\frac{1}{81}$ minuitur. Sequitur inde, Quartam auctam eſſe hac ipſâ exigua quantitate. Tertia minor pariter, eſt diminuta $\frac{1}{4}$ Commatis, & conſequenter Sexta major in tantum aucta; ſed Tertia major perfectionem ſervat, ut & ideo etiam Sexta minor.

Juxta has conſonantiarum menſuras, diſponuntur omnes inſtrumentorum toni, tam Diatonici quam Chromatici, quos addidere Muſici, & pariter toni Enarmonici, quando & hi ut magis completa ſit ſymphonia adjiciuntur.

Obſervatio autem noſtra hæc eſt, ſi dividatur Octava in 31 partes æquales, quod fiet quærendo 30 medias proportionales inter totam chordam (quæ ſumitur pro regula Harmonicâ) & ejus dimidium, dabitur in tonis, quos producunt longitudines hæ, Syſtema parum admodum ab iſto quod modo memoravi ex Temperamento deductum, ita ut nemo auri quantumvis ſubtili præditus differentiam percipiet; quod tamen novum Syſtema toto cælo ab alio differet, novaſque afferet utilitates tum in Theoriam cum in Praxin.

Salinas inventum hoc dividendi octavam in 31 partes æquales memorat ſed ut hoc culpet, & P. Merſennus pariter poſt ipſum hanc rejicit diviſionem, unde mihi facile fides habenda erit, me nihil ex illis autoribus mutuatum eſſe; ſed ſi & hoc feciſſem, ſatis a me præſtitum crederem, ſi præſtantiam

tiam ejus diviſionis ex Geometriæ principiis demonſtraverim, & illam vindicaverim adverſus injuſtum duorum illorum celebrium Scriptorum pronunciatum.

In lib. 3. Muſices Salinæ integrum exſtat caput de hac diviſione, cujus inſcriptio eſt, *De prava conſtitutione cujuſdam inſtrumenti, quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cæptum eſt, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque diviſus;* Dicit inſtrumentum hoc nominis Archicymbali donatum fuiſſe, illudque fuiſſe *incerti autoris*; Muſicos quoſdam admodum idoneos id magni feciſſe, præcipue quia continebat omnia intervalla, omnesque conſonantias (ut credebant, ait) adſcendendo, & deſcendendo & quia poſt certam periodum rediebatur ad eundem ſonum vel æquipollentem, cum eo a quo initium factum erat; Quia Octava diviſa erat in 31 partes æquales, quas vocabant Dieſas (ſeu tonos perfectos) quarum tonus debebat continere 5; magnus ſemitonus 3; parvus 2; Tertia major 10; Tertia minor 8; Quarta 13; Quinta 18; Sexta minor 21; Sexta major 23. Sed addit, cum tentaſſent tale diſponere inſtrumentum hoc ſonum dediſſe admodum ingratum, & qui inſigniter aures præſentium offendebat, unde concludit, talem diviſionem deviare ab omni ratione harmonica, ſive examinetur ſecundum menſuram juſtarum conſonantiarum ſive Temperamenti. Præter experientiam & aliud affert argumentum deductum ex Methodo in hac diviſione adhibita. P. Merſennus etiam contendit ſe bene illam refutaviſſe. Erravit uterque, quia illos latebat Methodus dividendi Octavam in 31 partes æquales, quod probabiliter & ipſi inventores non potuere; requiritur enim cognitio Logarithmorum, qui nondum illorum nequidem Salinæ tempore erant inventi. Tandem novum hoc Temperamentum, quod adeo repudiant, omnium præſtantiſſimum merito dicitur, omnia habens commoda quæ ipſi tribuebantur; præcipuæ ſimplicitatem quam communicat Theoriæ tonorum, & parum admodum differt ab eo, quo utuntur omnes, ut auris differentiam non percipiat uti computatione probabo.

Dico ergo primum, Quintam noſtræ diviſionis non ſuperare Quintas Temperamenti quam $\frac{1}{110}$ Commatis, quæ differentia, auditu nullo modo percipi poteſt; ſed quæ alioquin daret iſtam conſonantiam tanto magis perfectam.

Quartæ conſequenter Temperamenti ordinarii non excedunt noſtras niſi illâ $\frac{1}{110}$ commatis, & hæ tendunt etiam tanto magis ad perfectionem.

Tertiæ minores ſunt minores $\frac{3}{110}$ vel circiter $\frac{1}{37}$ Commatis quàm in temperamento, & Sextæ majores in tantum excedunt Sextas majores Temperamenti; utræque fateor recedunt à perfecta proportione; ſed videmus differentiam $\frac{1}{37}$ Commatis non eſſe ſenſibilem, nec augere ſenſibiliter $\frac{1}{4}$ Commatis, qua conſonantiæ in Temperamento aberrant à veris.

Tandem Tertiæ majores ſuperant Tertias Temperamenti, quæ ſunt perfectæ, $\frac{4}{110}$ vel quaſi $\frac{1}{28}$ Commatis, quæ adeo exigua eſt differentia, ut niſi pro perfectis, non obſtante hoc augmento haberi queant; quid enim facit $\frac{1}{28}$ Commatis, cum $\frac{1}{4}$ adeo facile patiamur.

Deducimus ex exiguis omnibus hiſce differentiis, Organum aut Clavecymbalum conſtitutum juxta Temperamentum ordinarium, etiam diſpoſitum eſſe juxta novam diviſionem, quantum aure poterit diſcerni. Si vero quis ſibi hac in parte magis deſiderat ſatisfacere, & exactiſſime conſtituere inſtrumentum juxta 31 partes æquales Octavæ, tantum dividenda eſt monochorda juxta numeros, qui habentur in ſequenti Tabula, &, poſitâ totâ chordâ, æquiſonâ cum C Clavecymbali aut Organi, diſponere pariter alias chordas vel tubos, cum ſonis, ex memorata diviſione oriundis & qui audiuntur poſito pectine in locis notatis. Quod vero ad Archicymbalum de quo Salinas loquitur, ſpectat, dubito, an non habuerit 31 palmulas in quavis octava; ſed quoniam non poterit ſine confuſione talis abacus adhiberi præ multitudine palmularum, præſtaret meâ ſententiâ diſponere 31 chordas ſimplices pro quavis octavâ, quod poteſt fieri ſine difficultate; & conſtructis palmulis, quæ elevant ſubſilia, omnibus æqualis longitudinis, altitudinis, & latitu-

titudinis, quæ latitudo ſit ⅐ palmulæ vulgaris, deinde ſuperimponendus erit abacus mobilis, cum claviculis in inferiori parte ſingularum palmularum fixis; ſemel ita diſpoſiti hi ut chordæ, quæ in quavis octava adhibentur, ſonent, omnibus tranſpoſitionibus inſervient. Quæ ergo fient ſine labore per tonos, ſemitonos, & uſque ad quintas partes tonorum; & certum eſt, omnes tonos & conſonantias in ſingulis tranſpoſitionibus æque accuratas eſſe, quod utile & amœnum erit. Olim Pariſiis conſtrui curavi, tales abacos mobiles ſuperimponendos abacis vulgaribus Clavecymbalorum tranſpoſitionibus plurimis, licet non omnibus completis, inſervientes; quod inventum approbarunt & imitati ſunt periti in muſicis varii.

Sed ut quis certus ſit de veritate illorum, quæ ſuperius dixi, inſpiciat Tabulam ſequentem cujus contenta ut & uſum explicabo.

Diviſio Octavæ in partes 31. æquales.				*Diviſio Octavæ ſecundum Temperamentum vulgare.*	
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N 97106450					
4,6989700043	50000	Ut^2	C^2	50000	4,6989700043
4,7086806493	51131				
4,7183912943	52278				
4,7281019393	53469	Si	B^x	53499	4,7283474859
4,7378125843	54678				
4,7475232293	55914	Sa	B	55902	4,7474250108
4,7572338743	57179	*	*	57243	4,7577249674
4,7669445193	58471				
4,7766551643	59794	La	A	59814	4,7768024924
4,7863658093	61146				
4,7960764543	62528	*	*	62500	4,7958800173
4,8057870993	63942	Sol^x	G^x	64000	4,8061799740
4,8154977443	65388				
4,8252083893	66866	Sol	G	66874	4,8252574989
4,8349190343	68378				
4,8446296793	69924				
4,8543403243	71506	Fa^x	F^x	71554	4,8546349804
4,8640509693	73122				
4,8737616143	74776	Fa	F	74767	4,8737125054
4,8834722593	76467				
4,8931829043	78196				
4,9028935493	79964	Mi	E	80000	4,9030899870
4,9126041943	81772				
4,9223148393	83621	Ma	E^b	83592	4,9221675119
4,9320254843	85512	*	*	85599	4,9324674685
4,9417361293	87445				
4,9514467743	89422	Re	D	89443	4,9515449935
4,9611574193	91444				
4,9708680643	93512	*	*	93459	4,9706225184
4,9805787093	95627	Ut^x	C^x	95702	4,9809224750
4,9902893543	97789				
4,9999999993	100000	Ut	C	100000	5,0000000000

Tabulæ Explicatio.

Secunda columna continet numeros qui exprimunt longitudines Chordarum; quibus habentur 31 intervalla æqualia ſecundum novam diviſionem; Chorda tota continet partes 100000 & 50000 ejus dimidium dant Octavam.

A latere in 3ª. columna ſunt ſyllabæ, quæ nobis in cantu inſerviunt, & * pro quibuſdam chordis enarmonicis, quarum prope ſol* eſt maxime neceſſaria.

In 4ª. columna ſunt litteræ quæ ordinario inſerviunt ad deſignandos tonos.

Numeri 2æ. columnæ ope numerorum col. 1æ. detecti fuere, hi ſunt illorum logarithmi reſpectivi; ad quos habendos diviſi logarithmum numeri 2. qui eſt 0, 30102999566 per 31. unde venit numerus N. 97106450, quem addidi continuo Logarithmo num. 50000, qui eſt 4. 6989700043. & hiſce additionibus detegimus omnes Logarithmos hujus columnæ uſque ad maximum 4, 9999999993, qui parum deficiens a 5, 0000000000, (in cujus locum ſubſtitui poteſt) demonſtrat bene ſubductum calculum. Qui Logarithmos intelligunt norunt ita ineundam computationem, ſi quærantur 30 numeri proportionales inter 100000 & 50000.

5a. columna continet in numeris longitudines chordarum juxta Temperamentum ordinarium, & in 6a. columna ſunt eorum numerorum Logarithmi.

Poſſem explicare quomodo eos ſupputaverim, & pariter, quomodo id Temperamentum poſſet detegi, ſi nondum eſſet repertum; ſed id foret nimis longum, & ſufficiet, demonſtrare methodum examinandi, & numerorum ἀκρίβειαν, & omnia quæ dixi de nova diviſione & de ratione quam habet cum Temperamento.

Ponamus, determinandum eſſe, an Quinta *Ut*, *Sol*, temperamenti vulgaris, minor ſit ¼ Commatis, quam vera Quinta, cujus ratio eſt trium ad duo. A log. *Ut*, qui eſt 5, 0000000000 ſubſtraho log. *Sol* qui eſt 4, 8252574989, id, quod reſtat

0,

0, 1747425011, exhibet quantitatem Quintæ Temperamenti.

Pariter differentia Logarithmorum 3 & 2 quæ in tabulis Logarithmorum habetur 1760912594, exhibet quantitatem Quintæ perfectæ; hinc ſubſtraho Quintam Temperamenti inventi & reſtat 13487583; id quod debet dare Log. $\frac{1}{4}$ Commatis; & hoc verum eſt; nam log. Commatis toni id eſt differentia logar. 81 & 80 eſt 53950319, cujus Quarta pars eſt 13487580. Si velimus examinare an Quævis Quinta novæ diviſionis ut *Re*, *La*, differat a vera $\frac{1}{4}$ minus $\frac{1}{110}$ Commatis; debemus a Log. *Re*, qui eſt 4,9514467743, ſubſtrahere Log. *La*, qui eſt 4,7766551643, reſtat 1747916100, quem ſubtraho a Logarithmo veræ Quintæ qui erat 1760912594, reſtat 12996494, qui minor eſt Log. Quartæ partis Commatis, ſcilicet 13487580; a quo igitur eum ſubtraho & reſtat 491086: Debemus nunc videre, quam partem Commatis hoc faciat; idcirco divido Log. Commatis, ſcilicet 53950319 per 491086, quotiens eſt fere $\frac{1}{110}$. Ita ut pateat, noſtram Quintam non ſuperari $\frac{1}{4}$ Commatis a Quinta perfecta, ſed $\frac{1}{110}$ Commatis deeſſe. Eodem modo poteſt examinari quidquid ſpectat Temperamentum; nihil enim in computationibus Muſicis inſtituendis Logarithmorum uſui anteponendum.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
VARIA
DE
OPTICA.

CHRISTIANI HUGENII VARIA DE OPTICA.

I.

Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo Dni Newtoni.

VT deſideras tibi ſententiam meam exponam de Teleſcopio Dni Newtoni. Licet nondum viderim hujus inventi effectum, illud me poſſe aſſerere perſuaſum habeo, pulcrum & ingenioſum eſſe, proſperumque eventum ſortiturum; ſi modo ad ſpecula cava formanda detegi queat, de quo minime deſperandum puto, materia quæ poliri poſſit, ut vivide radios reflectat, ut vitrum. Commoda hujus conſpicilli præ illis, in quibus vitra tantum adhibentur, ſunt, primo quod ſpeculum cavum, licet Sphæricum, multo melius colligat radios parallelos in unum punctum, quam noſtra vitra Sphærica, uti Geometrice poteſt demonſtrari. Unde ſequitur duorum conſpicillorum ejuſdem longitudinis, quorum unum erit novæ illius inventionis, alterum ordinario vitro objectivo inſtructum, primum, magnam habens aperturam, majori copia collecturum radios ab objectis procedentes, licet parvum ſpeculum quoſdam inter-

cipiat, ideoque magis poterit amplificare objecta, quam alterum. Adeo ut Teleſcopium novum dimidiæ aut tertiæ partis longitudinis conſpicilli ordinarii, aut forte etiam minus, æqualem effectum cum hoc præſtabit.

Secunda utilitas eſt, hoc invento vitari incommodum, quod a vitris objectivis ſeparari nequit, mutua nempe duarum ſuperficierum ad ſe inclinatio. Nam licet hæc parva ſit, tamen obeſt radiis, qui vitra ad latera tranſeunt & magis oberit, ſi vellemus uti vitris hyperbolicis vel ellipticis quibus majores concedendæ forent aperturæ.

Tertiam utilitatem cenſeo, reflexione Speculi metallici non perire tot radios quot in vitris, quæ in utraque ſuperficie reflectunt notabilem radiorum quantitatem & multos intercipiunt obſcuritate ſuæ materiæ.

Cum præterea difficulter admodum vitrum detegatur quod longioribus conſpicillis inſerviri queat, quia ſæpe non ubique homogeneum eſt, quartum novi Teleſcopii commodum erit, in metallo nil præter ſuperficiei perfectionem requiri.

Qui viderunt conſpicillum D^ni^ Newtoni, obſervarunt, illud aliquâ difficultate dirigi ad objecta; ſed huic malo occurri poteſt ſatis facile, jungendo huic conſpicillo alterum exacte parallelum, per quod primùm quæretur objectum. Deſiderabitur fateor alter obſervator, ſi conſpicillum catoptricum ſit magnum, quoniam ille, qui obſervat, in illa obſervat extremitate, quæ maxime elevata eſt. Sed ad incommodum hoc non attendendum eſt, ſi ſpectetur utilitas inventi: Si loco ſpeculorum Sphæricorum poſſent obtineri parabolica exacte formata & polita, conſpicilla hæc effectum præſtarent quod de vitris ellipticis vel hyperbolicis ſperavimus; credo autem id in ſpeculis facilius obtineri poſſe.

CON-

II.

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS OPTICI.

Propoſitio 39 Libri v. Alhazeni, & 22 lib. vi. Vitellionis.

Puncta B, C, & circulus E K, cujus centrum eſt A, data ſunt in eodem plano; inveniendum eſt punctum K in peripheria circuli, ita ut lineæ B K, C K faciant cum linea A K angulos inter ſe æquales. TAB. LVI. fig. 1.

DUctis AB, AC; fiat AC, AF:: AF, AQ; & AB, AE:: AE, AP: ſint etiam AP, & AQ, biſariam diviſæ in R & S; in angulo BAC ſint perfecta parallelogramma PAQH & ARZS. In RZ producta ſumantur ZY & ZX, utraque æqualis lineæ quæ poteſt differentiam inter quadrata QS & ZS: fiat XV æqualis XY & parallela AB; & lateribus XV & XY deſcribatur hyperbola, quæ tranſibit per puncta Q & H, uti patet per conſtructionem; hyperbola hæc QXH occurret circulo in puncto K, quod quæritur.

Ductis KO & KI parallelis AC & AB, quarum KI occurrit YX in puncto D. Ob hyperbolam rectangulum YDX æquale eſt quadrato KD ordinatæ, vel quadrato OR; & rectangulum YTX æquale eſt quadrato HT, vel quadrato PR; & demto a rectangulo YTX, rectangulum YDX & a quadrato PR, quadratum OR, ſupererit rectangulum RDT vel AIQ, quod æquale erit rectangulo AOP. PO ergo eſt ad AI, vel OK ipſi æqualem, ut QI ad AO, vel IK; & ductis lineis KP, KQ triangula KOP, KIQ erunt ſimilia & ideo æquiangula; idcirco anguli APK, AQK, qui iidem ſunt, vel ſupplementa angulorum æqualium OPK, IQK erunt inter ſe æquales; ſed per conſtructionem AB, AE vel AK, :: AK vel AE, AP; ideo duo triangula BAK, KAP ſunt ſimilia, & ob eandem cauſam duo triangula CAK, KAQ, ſunt etiam ſimilia; ideo angulus BKA eſt æqualis angulo APK, &

angulus CKA æqualis ang. AQK, ſed demonſtravimus angulos APK & AQK eſſe æquales, ergo anguli BKA, CKA erunt inter ſe æquales Q.E.D.

Si punctum H cadat in circumferentiam circuli punctum H erit punctum K, quod quæritur & lineæ HP, KP, KO in unicam HP coaleſcunt; & ſimiliter lineæ HQ, KQ, KI in unam HQ, & quæ ſuperius demonſtrata ſunt & hic locum habent, in quo caſu Hyperbolâ non indigemus.

III.

ALITER.

Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.

TAB. LVI. fig. 2.

ESto ſpeculum ex ſphæra quæ Centrum habeat A punctum; oculus vero ſit in B, & punctum viſibile in C, Planumque ductum per A, B, C, faciat in ſphæra Circulum D*d*, in quo invenienda ſint Reflexionis Puncta. Per tria Puncta A, B, C, deſcribatur Circuli Circumferentia, cujus ſit Centrum Z; occurrat autem ei producta AE, Perpend. BC, in R; & ſit duabus RA, OA, tertia Proportionalis NA; eritque NM, Parallela BC, altera Aſymptoton. Rurſus ſint Proportionales EA, $\frac{1}{2}$ AO, AI, & ſumma IY æquali IN, ducatur YM Parallela AZ; eaque erit altera Aſymptotos. Denique ſumptis IX, IS, quæ ſingulæ poſſint dimidium quadratum AO, una cum quadrato AI; erunt Puncta X & S in Hyperbola, aut ſectionibus oppoſitis D*d*, ad inventas Aſymptotos deſcribendis, quarum interſectiones cum Circumferentia DO, oſtendent Puncta Reflexionis quæſita. Conſtructio hæc, in omni Caſu, quo Problema ſolidum eſt, locum habet, præterquam in uno, ubi non Hyperbola ſed Parabola deſcribenda eſt; cum nimirum Circumferentia per Puncta A, B, C, deſcripta, tangit Rectam AE.

COM-

IV.
COMPENDIUM.

DUctâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque biſecta in V, punctum hoc eſt illud, per quod tranſire debet una Hyperbolarum Oppoſitarum, quarum Aſymptoti inventæ fuerunt YM, MN. TAB. LVI. fig. 3.

Sed en Tibi bonam illam Conſtructionem, quæ in omnibus Caſibus obtinet. Sit Circulus datus ED, cujus Centrum eſt A; Puncta data, B & C. TAB. LVI. fig. 4.

Ductis Lineis AB, AC, fiant Proportionales BA (Radius Circuli) & FA: Eodem modo CA, (Radius Circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque biſecetur in H; & per hoc punctum ducantur Lineæ LHK, MHN, ſe invicem interſecantes ad Angulos Rectos, quarumque LHK ſit Parallela ei quæ biſecat Angulum BAC. Hæ ſunt duæ Aſymptoti Hyperbolarum deſcribendarum per puncta F & G, & quarum una tranſibit etiam per Centrum A, quarum Interſectiones cum Circuli Peripheria notabunt puncta Reflexionis quæſita.

V.
ALIA SOLUTIO.

Problema Alhazeni.] *Dato Circulo, cujus Centrum A, Radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* TAB. LVI. fig. 5.

Ponatur Inventum, ductaque AM recta, quæ bifariam ſecet Augulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpendicularis ſit HE; rectiſque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit

Sit jam $AM = a$ $MB = b$ $AL = c$ $LC = n$ Radius $AD = d$ $AF = x$ $FH = y$	Quia ergo æquales Anguli KHE & CHZ, ſive EHG; eſtque EHA angulus rectus; erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MK, ut HF ad FK, erit, ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK, i.e. $b+y:y::a-x:\frac{ay-xy}{b+y}$. add. $FA = x$ fit $KA = \frac{ay+bx}{b+y}$.

Rurſus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL — HF ad HF, ut LF ad FG, $n-y:y::c-x:\frac{cy-xy}{n-y}$, quâ ablatâ ab $AF = x$, fit $GA = \frac{nx-cy}{n-y}$. Eſt autem $EA = \frac{dd}{x}$, quia Proportionales FA, AH, AE: Ergo EA — GA, hoc eſt, EG, $= \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y}$. Et KA — EA, hoc eſt, $KE = \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quod KE ad EG, ut KA ad AG; i.e. $\frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x} : \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y} :: \frac{ay+bx}{b+y} : \frac{nx-cy}{n-y}$.

Unde invenitur

$$2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy = +naddy + bddx$$
$$-2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \qquad - addyy - bddxy$$

Eſt autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, quia $xx = dd - yy$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcyx}{a} - 2acxyy$
$+ddcyy = -addyy - bddxy$:

Et

Et diviſis omnibus per y & ductis in a

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$

$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$

$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ quæ æquatio eſt ad Hyperbolam.

Vel quia $bc = na$, $\frac{abddx - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa + bb} = p$; Ergo $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

Unde porrò non difficulter invenitur ſequens Conſtructio: jungantur BA, AC, & applicato ſeorſim ad utramque Quadrato Radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncto PQ, dividatur ipſa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, ſeſe ad Rectos Angulos ſecantes, quorumque RD, ſit parallela AM, quae dividet bifariam Angulum BAC. Erunt jam RD, RN Aſymptoti oppoſitarum Hyperbolarum, quarum altera per Centrum A tranſire debet, quæque ſecabunt Circumferentiam in punctis H quæſitis. Tranſibunt autem Hyperbolæ per Puncta P, Q. TAB. LVI. fig. 6.

Ratio Conſtructionis apparet, ductis Pγ, & Qζ, perpendicularibus in AM. Fit enim A$\gamma = \frac{add}{aa + bb}$ ſive p; & A$\zeta = \frac{ap}{c}$. Item P$\gamma = \frac{pn}{c}$, & Q$\zeta = \frac{pb}{c}$. Quare AO $= \frac{pc + pa}{2c}$, & OR $= \frac{pb - pn}{2c}$. Unde Cætera facilia.

---

pag. præced. lin. pen. lege $-2acxyy$
lin ult. lege $-addyy - bddxy$:

VI.

Excerpta ex litteris Dni. Hugenii Acad. Reg. ſcient. Socii, ad auctorem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato.

MIcroſcopium hoc ex unico formatur exiguo globulo vitreo, ſimili illis, quibus in Hollandia & Anglia animalcula fuere obſervata in aqua puteali & pluvia, ut & illa in qua piper fuit maceratum, de quibus egiſti in 9. & 11. diario hujus anni (1678); ſed globuli de quibus nunc ago aliis hiſce minores ſunt.

Inter ipſos quos ex Hollandia attuli quidam magnitudine non ſuperant arenæ granulum; alii adeo exigui ſunt ut vix videri queant, quare objecta in immenſum amplificant; eo enim hæc majora apparent quo globuli ſunt minores.

Objectum obſervandum inter vitri laminam & lapidis ſpecularis lamellam includitur; hæc machinæ adaptantur quæ mihi aliis huc uſque uſitatis magis commoda videtur. Exigua guttula æquæ, in qua per duos aut tres dies piper fuit maceratum, ita incluſa, magna videtur natantibus piſciculis bene repleta piſcina.

Quæ pecularia circa aquam hanc obſervavi, ne quæ in diario veſtro ſunt relata iterum memorem, hæc ſunt; ex omni pipere non eadem generantur animalcula; piper quoddam animalcula ceteris majora format, ſive hoc a piperis vetuſtate pendeat, ſive ab alia cauſa, quæ in ſequentibus detegi poterit.

Similia animalcula ex aliis ſeminibus ut ex ſemine coriandri etiam producuntur.

Hoc idem obſervavi in ſucco Betulæ, ubi per quinque aut ſex dies hunc ſervaveram.

Quidam animalcula viderunt in aqua in qua nux aromatica, aut caſia, maceratæ fuere: & probabile admodum eſt in multis aliis rebus ſimilia detegi poſſe.

Quis

Quis forte defendet animalcula haec corruptione, aut fermentatione, generari; ſed alia dantur quorum origo ab hac diverſa eſt, talia ſunt quæ in animalium ſemine deteguntur, quæ cum hoc ipſo nata videntur, & tanta copia obſervantur ut totum ſemen quaſi ex hiſce conſtet.

Translucida omnia ſunt, celerrime moventur, & ranis, antequam horum pedes formentur, ſimilia ſunt.

Hæc animalcula in Hollandia primum fuere obſervata, & horum inventio admodum mihi utilis videtur, & quæ opus ſuppeditabit illis qui in animalium geneſin inquirunt.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
EXPERIMENTA
PHYSICA.

CHRISTIANI HUGENII EXPERIMENTA PHYSICA.

Excerpta ex literis D^ni Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ.

ANtequam tibi communicarem quæ obſervavi de ſuſpenſione aquæ in vacuo, altera vice experimenta inſtituere volui, ut de obſervationibus olim a me factis certus eſſem, & ut melius penetrare poſſem in cauſas miri adeo effectus. Primum tibi ipſas referam obſervationes, & dein pergam ad conjecturas de ipſarum cauſa.

Experimenta quæ illuſtris Boyleus anno 1661 publicavit, cum deſcriptione machinæ Pneumaticæ mihi ab eo tempore dederunt occaſionem examinandi hanc materiam; Unum ex experimentis illius eſt, ſi tubo vitreo, 4 pedes longo, aqua repleto, cujus extremitas aperta, everſo tubo, immergitur aqua vitro contento, ſuperimponas recipiéns vel vas, unde aër educitur, poſt exhauſtum aërem, quantum ope machinæ fieri poteſt, aqua tubi deſcendet in vitrum, donec ad altitudinem unius tantum pedis ſuſtineatur, ſuperiore tubi parte aquâ & aëre manente vacuâ. Cenſet optime, aquam ad illam altitudinem unius pedis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro hæ-

hærere propter aërem in recipiente ſuperſtitem, & qui ope machinæ, non ſatis exactæ, annihilari non potuit.

Similem conſtrui machinam curaveram, & licet nondum mutaveram quæ in ſequentibus correxi; ita tamen omnia adaptaveram, ut inſtituto experimento memorato aqua in tubo ad libellam aquæ in vitro deſcenderit. Quare in inſtituendo experimento non tubo longitudinis memoratæ indigebam. Adhibui tubum novem pollicum cum globo cavo in extremitate ut patet in hac figurâ.

TAB. LVI. fig. 7.

Concipiendum eſt vitrum CC in totum aquâ repleri, extremitatemque apertam immergi aquâ in vitro D; utrumque obtegitur vaſe B, cujus os apertum applicatur molli cuidam cimento, quo lamina AA induitur; hæc perforata eſt in medio parvo foramine, per quod exit aër, quando agitatur antlia; ſi adhibita aqua frigida experimentum inſtituatur in totum vas C evacuatur, donec aqua ad libellam aquæ in vitro D deſcendat.

EXPERIMENTUM I.

Aqua, ſublatâ aëris preſſione, hæret in tubo.

SEd ad finem menſis Decembris ejuſdem anni 1661. cum reliquiſſem aquam illam in vacuo per 24 horas, (quo plane purgatur bullis aëris quas ejicit, quando adhibetur frigida) cumque impleviſſem vas C, admiratus vidi, licet optime eduxerim aërem ex vaſe B, aquam nullatenus deſcendere ex vaſe, quod plenum remanebat. Non poteram ſuſpicari ullum in machinâ meâ vitium dari, nec vas B non bene fuiſſe obturatum; ſed ut quidquid rei eſſet expiſcarer, detraxi phialam C ex vaſe, & poſtquam in hac admiſi parvam bullulam aëris, repoſui phialam ut ante; & agitatâ machinâ, vidi tandem omnem aquam deſcendiſſe prope ad libellam illius quæ erat in vitro D. Id mihi perſuaſit, non dari vitium in machinâ & aquam aëre purgatam manere ſuſpenſam; licet vas B fuerit plane aëre vacuum vel ad minimum ita, uti erat quando aqua non-

nondum aëre purgata deſcendebat ex Phialâ; altera vice ut aqua deſcenderet, effeci immiſſâ in collum Phialæ bullâ adeo parvâ, ut ægre videri poſſet.

EXPERIMENTUM II.

Notabile quid in deſcenſu aquæ aëre purgatæ.

SEd alio tempore mihi quid valde memorabile contigit. Cum non immiſiſſem bullam aëream, poſt exhauſtum aërem bullam formari obſervavi in inferiori parte colli Phialæ; Hæc bulla, continuo magis magiſque aucta, ubi ad magnitudinem parvi pili pervenit, reliquit vitrum & incepit adſcendere in collo Phialæ, ubi autem pervenit ad altitudinem unius pollicis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro D, non ulterius adſcendit, ſed ſubito ſeſe expandit ſuperiora verſus & unico momento occupavit totam Phialam, ex qua eodem tempore aqua deſcendit per parvum id ſpatium, quod reliquum erat inter interiorem colli ſuperficiem & bullam, quæ extenſa erat, omniſque remanſit infra illam altitudinem unius pollicis, ad quam bulla cæpit ſeſe expandere. Omnia hæc porro mihi contigerunt inſtituenti experimenta cum tubis duorum pedum & majoribus, ubi aqua manebat ſuſpenſa eodem modo ut in tubo 9 pollicum.

Communicavi hæc experimenta cum ſocietate regia Anglicana, ſed noluere ſtatim illis fidem dare, mihi autem indicarunt veriſimiliter aquam Phialæ non deſcendiſſe, propter aërem non bene evacuatum: ſed reſpondi, nullam dari rationem illud ſuſpectandi ſi attendamus ad illud quod notavi in fine experimenti fuiſſe obſervatum; & præterea me ex experimentis frequenter repetitis de bona machinæ conditione certiſſimum eſſe. Tandem cum anno 1663 eſſem in Angliâ me præſente in conſeſſu Societatis Regiæ idem experimentum eodemque cum ſucceſſu inſtitutum eſt, licet tubi fuerint quatuor & quinque pedum; dein in mentem venit Dno Boyle idem inſtituere experimentum, non adhibitâ anthâ, cum argento vivo in tubo vitreo, cujus extre-

mitas aperta immerſa erat in alio argento vivo; quum primo detexiſſet methodum perfecte Mercurium aëre purgandi per tres vel quatuor dies. Tandem experimentum ſucceſſit, & cum in experimento Torricelliano Mercurius deſcendat ad altitudinem 27 vel 28 pollicum ſupra ſuperficiem Mercurii, in quo impoſitus eſt tubus, ita a D^no^ Boyle, & eodem etiam tempore a D^no^ Vicecomite Brounker, Præſide Societatis Regiæ Anglicanæ, fuit inſtitutum, ut primo hæreret ad altitudinem 34 pollicum, dein 52, poſtea 55 & tandem ad altitudinem 75 pollicum, tubo ſemper manente pleno, & huc uſque nondum notum eſt, quænam ſit omnium maxima altitudo poſſibilis. D^us^ Boyle etiam obſervavit, extracto tubo e Mercurio, in quo aperta ejus extremitas erat impoſita, & retento tubo non clauſo in aëre libero, Mercurium nihilominus non cecidiſſe. Porro in his experimentis, ut in illis quæ cum aquâ inſtituuntur, minimâ aëris bullâ in tubo, ſive ſponte ſive concuſſione formatâ, ſubito Mercurium deprimit ad ordinariam altitudinem 27 vel 28 pollicum.

EXPERIMENTUM III.

Adhibito ſpiritu vini loco aquæ.

SEd ut ad experimenta noſtra redeam, non ſolum illa iterum cum aqua inſtitui, ſed & cum Spiritu vini rectificato, & inveni, ad purgationem aëris tantum requiri, ut per unam horam in vacuo relinquatur, licet producat plus aëris quam aqua, uti ex hujus operationis circumſtantiis quas referam quæque notabiles ſatis ſunt, æſtimari facillime poteſt. Poſtquam vas B proxime ope antliæ aëre evacuatum eſt, magnæ bullæ ſpiritus vini exeunt & tanta quidem copia, ut pars ejiciatur ſupra oram vitri D, quod pariter accidit in aquâ parumper calefactâ; ſed non in illâ quæ frigida immittitur. Illæ ebullitiones continuo minuuntur, ita ut ex vini Spiritu, tantum majores aëris bullæ ad certa temporis intervalla ſingulatim exeant, & tandem nil omnino emergat.

In-

Interim bullæ, quæ aſcenderunt in tubum C, ita dilatantur ut plane impleant globum, ut & totam colli longitudinem, ita ut omnis vini ſpiritus fugatus ſit, & ut pariter emittat multas magnas bullas per aperturam; quod clare indicat, eſſe aërem in lagena, vel aliam materiam elaſticam ut aër, quandoquidem illa fugat ſpiritum vini longe infra ſuperficiem illius qui eſt in vitro D contentus: etiam ſi iterum aërem intrare ſinas in vas B, ſpiritus vini quidem adſcendet in lagenam C, non autem plane illam replebit, ſed ſuperius hærebit ſatis notabilis aëris bulla.

EXPERIMENTUM IV.

Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauſtus, hæc corpora iterum intrat.

SEd hic notandum, bullam illam ſi ita relinquatur per ſpatium unius vel duarum horarum, ſemper evanuiſſe, & in ſpiritum vini, unde emerſerat, rediiſſe. Expertus etiam fui, ſi immittatur porro bulla veri aëris magnitudine unius piſi, etiam illam periiſſe, poſtquam per unam noctem relicta fuerit. Idem quoque accidit in aqua. Sed multo majus tempus requiritur, ut evaneſcat bulla.

Quod attinet cauſam præcipui noſtri Phænomeni, ſuſpenſionis nempe aquæ & Mercurii, hæc eſt quam mihi perſuadere potui huc uſque omnium veriſimillimam.

Præter preſſionem aëris, quæ ſuſtinet Mercurium ad altitudinem 27 pollicum in experimento Torricelliano, & quam dari ex infinitis aliis effectibus, quos videmus, conſtat, concipio & aliam preſſionem illâ fortiorem materiæ aëre ſubtilioris, quæ haud difficulter penetrat vitrum, aquam, Mercurium, & omnia alia corpora quæ aëri impenetrabilia obſervamus. Hæc preſſio addita ad aëris preſſionem poteſt ſuſtinere 75 pollices Mercurii & forte adhuc plures, quamdiu tantum agit in ſuperficiem inferiorem, vel in ſuperficiem Mercurii, in quem aperta tubi extremitas immer-

gitur: ſed quam primum materia hæc poteſt agere etiam ad alteram partem (quod evenit ſi tubum concutiendo, vel immittendo parvam aëris bullam, occaſio detur huic materiæ effectum ſuum inchoandi) preſſio illius æqualis erit ab utraque parte, ita ut ſola ſuperſit aëris preſſio quæ ſuſtinet Mercurium ad ordinariam altitudinem 27 pollicum; Eadem de cauſa in experimento aquæ aëre purgatæ, poſt remotam preſſionem aëris evacuando recipiens B, altera illa preſſio ejuſdem materiæ agit etiam ut antea in ſuperficiem aquæ in vitro D, & cohibet ne aqua in Phiala C deſcendat. Sed ubi minima bulla aëris intrat phialam, materia quam dixi tranſire per vitrum & aquam, ſubito inflat bullam, editque preſſionem æqualem illi, quæ agit in ſuperficiem aquæ in vitro D, quare omnis aqua phialæ defluit, & ad libellam cum illa, quæ eſt in vitro ſeſe conſtituit.

Quæret forte quiſpiam cur preſſio ejus materiæ non agat in aquam ſuſpenſam in phiala C, & in Mercurium in tubo D^ni. Boyle, etiam dum vaſa hæc plena ſunt, quoniam ſuppoſui, illam haud difficulter penetrare vitrum æque ac aquam & Mercurium? Et quare particulæ ejus materiæ non ſe jungant, & incipiant preſſionem, cum continuo in aqua & Mercurio eant & redeant, & vitrum non impediat illarum communicationem cum particulis exterioribus.

Ut huic difficultati fiat ſatis, quæ revera maxima eſt, dicam, licet partes ejus materiæ, quam ſuppoſui, tranſitum inveniant inter illas, ex quibus vitrum aqua & Mercurius formantur, non tamen dari tranſitum ſatis latum ut plures ſimul tranſeant, neque ut ſe moveant vi, quæ requiritur ut diſpergantur partes Mercurii vel aquæ, quæ inter ſe habent quendam nexum. Et ex hoc ipſo nexu ſequitur, (licet ad partem ſuperficiei interioris vitri, quæ tangit aquam vel Mercurium ſuſpenſum, plures partes premantur actione particularum ejus materiæ, cum tamen plurimæ partes aquæ aut Mercurii non premantur, quæ a partibus vitri teguntur,) partes aquæ aut Mercurii ſeſe mutuo ſuſtinere, omneſque ſuſpenſas hærere; quia minor eſt preſſio in ſuperficiem aquæ vel argen-

genti vivi, quæ contingit vitrum, quam in inferiorem, quæ tota expoſita eſt actioni materiæ, a qua ſecunda pendet preſſio. Solutionem hanc fateor non mihi ita ſatisfacere, ut nullus mihi ſuperſit ſcrupulus; nihilominus tamen perſuaſum habeo novam illam dari preſſionem, præter aëris preſſionem, cum ob experimenta ſupra relata tum ob duo alia nunc referenda.

EXPERIMENTUM V.

Laminæ metallicæ arcte inter ſe cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.

QUando duæ laminæ metallicæ vel marmoreæ, quarum ſuperficies ſint perfecte planæ, ad ſe mutuo applicantur, ita cohærent, ut ſuperiore elevatâ inferior eam inſequatur, cujus effectus cauſa tribuitur merito preſſioni aëris in ſuperficies externas; duæ mihi ſunt laminæ, quarum quævis circiter eſt magnitudinis pollicis quadrati, quæ ex materiâ conflatæ ſunt, ex qua olim ſpecula formabantur, & quæ ita junguntur, ut, licet nihil interponas, ſuperior non ſolum alteram ſuſtineat, ſed interdum etiam pondus trium librarum cum inferiori conjunctum; in quo ſtatu perſeverant quamdiu deſideraveris.

Has ita junctas & oneratas tribus libris ſuſpendi in machinæ meæ recipiente, quod aëre evacuavi in tantum, ut ſuperſtes aër non preſſione ſua aquam ad altitudinem unius pollicis ſuſtineret, & nihilominus laminæ meæ ſeparatæ non ſunt.

Idem etiam inſtitui experimentum interpoſito ſpiritu vini inter laminas & inveni quod in recipiente vacuo aëre ſuſtinerent ſine ſeparatione eadem pondera, quæ ſuſtinebant recipiente aëre pleno.

Videtur id mihi manifeſte ſatis indicare magnam ſupereſſe preſſionem in recipiente, poſtquam aëre vacuus eſt, & hanc non magis quam ipſius aëris preſſionem in dubium vocari poſſe; ſed & alia ad illius confirmationem.

EXPERIMENTUM VI.

Effectus Siphonis in vacuo.

NOtum eſt, effectum ſiphonis crurum inæqualium, quo evacuatur aqua vaſis ſupra oram, non amplius tribui fugæ vacui, ſed ponderi aëris, qui premendo in ſuperficiem aquæ in vaſe, illam cogit ut in ſiphonem adſcendat, dum in alio crure illa gravitate ſuâ deſcendit. Inveni methodum qua effici, ut aqua e ſiphone fluxerit, poſtquam recipiens vacuum erat aëre; & obſervavi effectum, ſi aqua purgata fuerit aëre, eodem modo ac extra recipiens procedere.

Breviſſimum ſiphonis crus erat octo pollicum & apertura duarum linearum. Nec dubitari debet quin recipiens aëre bene vacuum fuerit; nam id poſſum affirmare, tum quoniam nullum antliâ aërem ulterius extrahere potui, tum ob alia ſigna certiora.

Magis ergo confirmatur noſtra hypotheſis materiam dari prementem aëre ſubtiliorem. Si quis laborem in ſe ſuſcipere vellet quærendi, quanta ſit vis hujus preſſionis quod melius fieri non poteſt niſi proſequendo experimenta cum tubis Mercurio plenis longioribus, quam quibus uſus eſt Dnus Boyle, inveniet forte, vim illam ſatis validam eſſe ad efficiendam unionem partium vitri & aliorum corporum, quæ nimis arcte cohærent, quam ut juncta tantum forent per contiguitatem & quietem uti voluit Carteſius.

F I N I S.

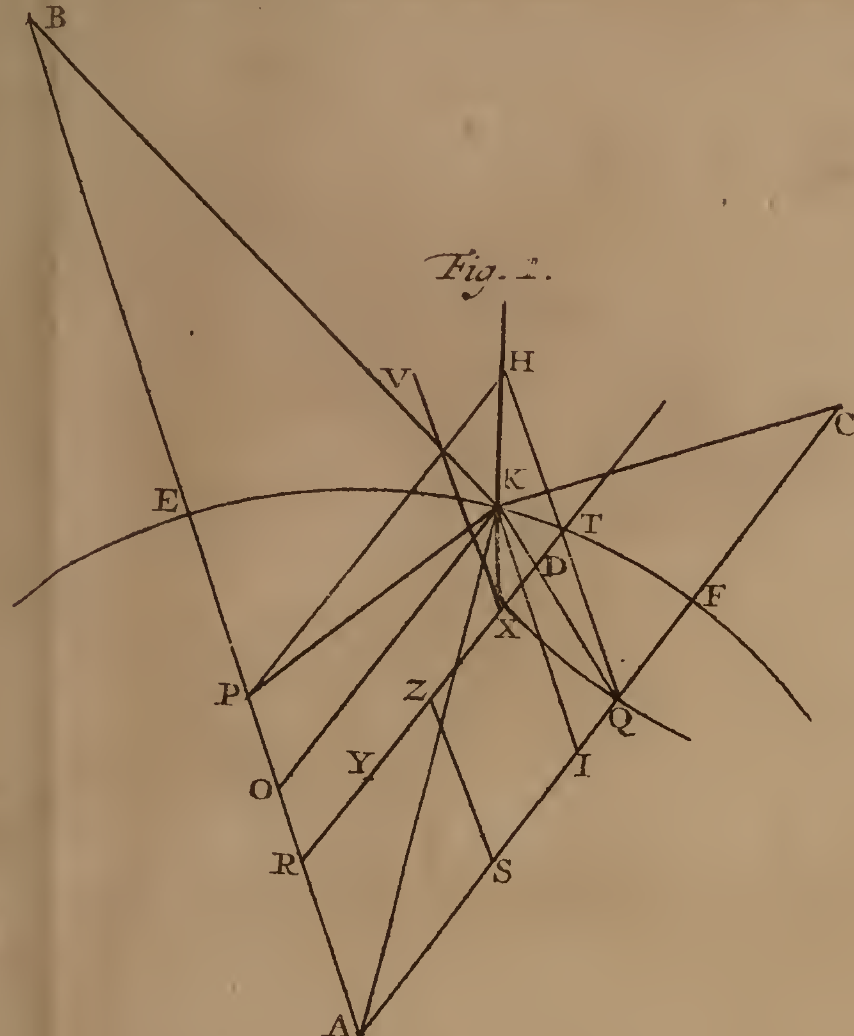


Fig. 1.

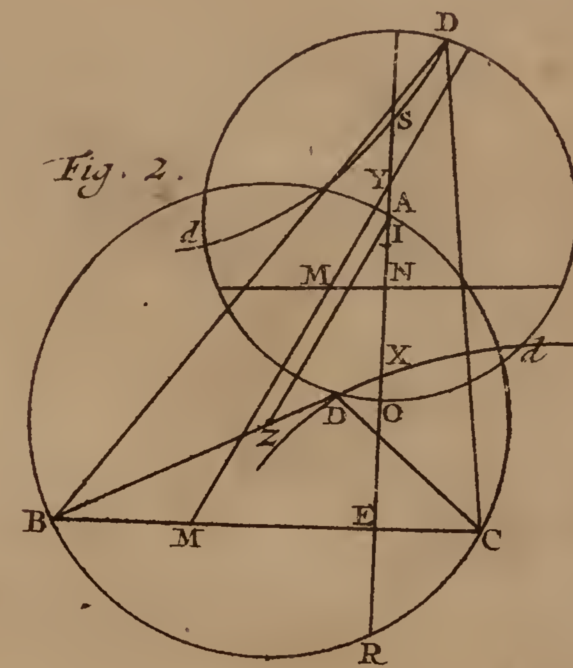


Fig. 2.

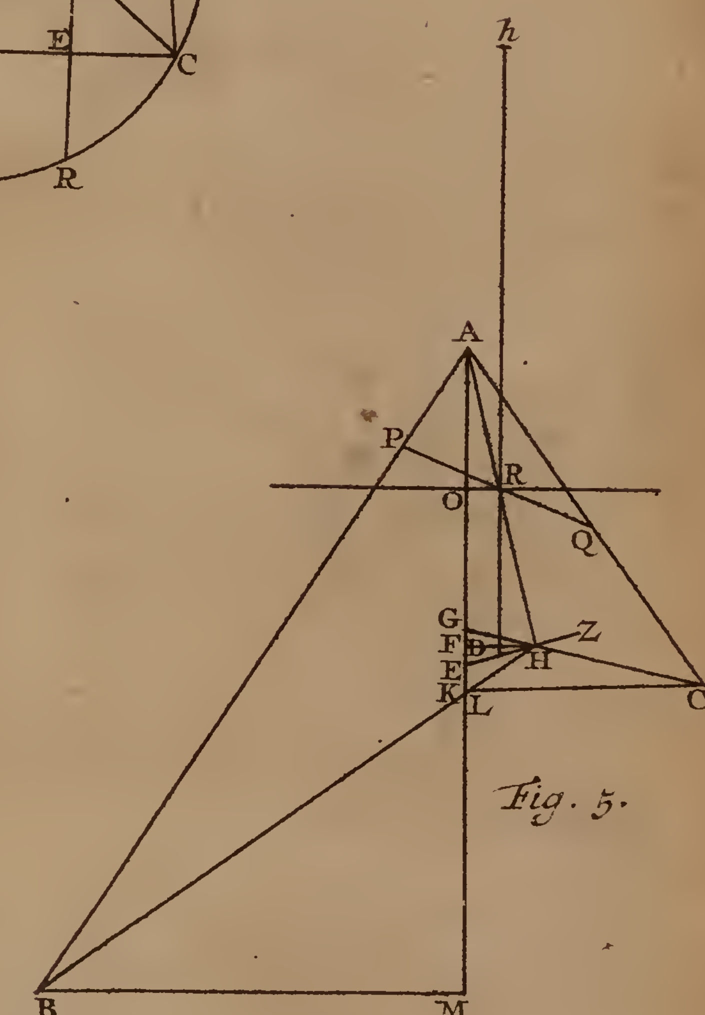


Fig. 5.

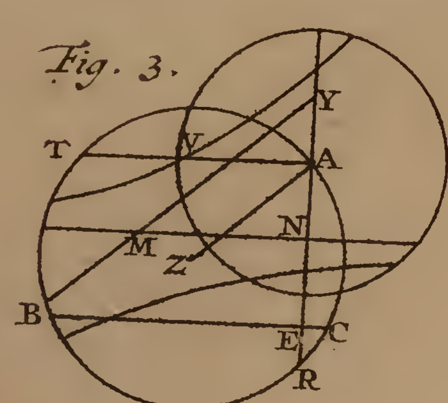


Fig. 3.

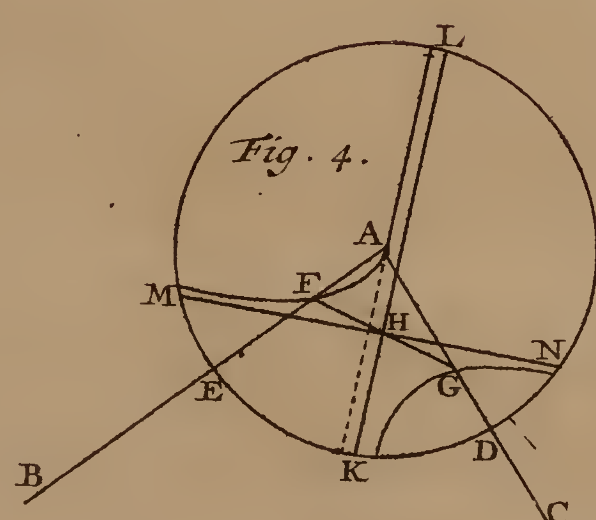


Fig. 4.

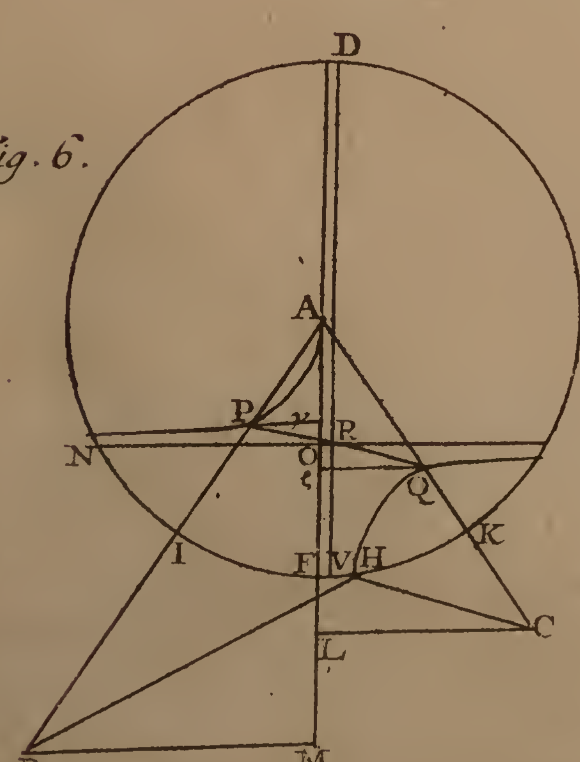


Fig. 6.

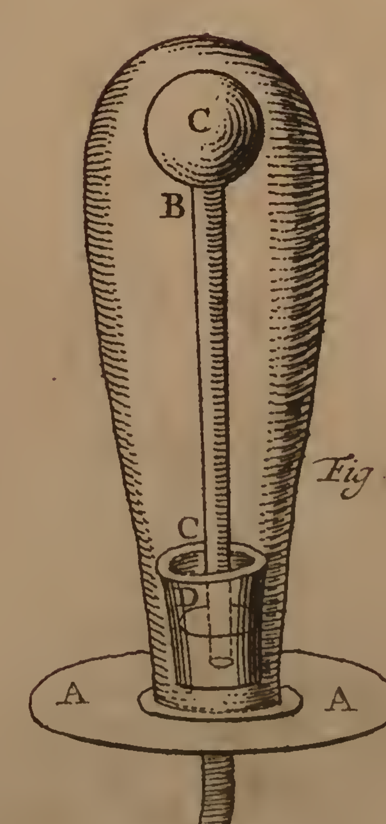


Fig. 7.

INDEX RERUM

Quatuor Tomis contentarum:

TOMUS PRIMUS

OPERA MECHANICA.

HOROLOGIUM. pag. 1. *Hagæ-Com. ann.* 1658. *in quarto.*

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM, ſive de Motu Pendulorum ad Horologia aptato Demonſtrationes Geometricæ. p. 15. *Pariſiis* 1673. *in fol.*

Deſcriptio Horologii 33.

Tabula Æquationis Dierum. 44.

De Deſcenſu Gravium. 52.

De Deſcenſu ſuper plano inclinato. 62.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat. 69.

De Motu in Cycloide. 72.

In Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum. 87.

De Linearum curvarum evolutione & dimenſione. 89.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia ſemicyclois deſcribitur evolutæ æqualis & ſimilis, cujus baſis eſt in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit. 96.

Cyclois linea ſui axis, ſive diametri circuli genitoris, quadrupla eſt. 97.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere. 99.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut cubi abſciſſarum ad verticem. 100.

Conoidis parabolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire. 102.

Sphæroidis oblongi ſuperficiei circulum æqualem invenire. 103.

Sphæroidis lati ſive compreſſi ſuperficiei circulum æqualem invenire. Ibid.

Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire. 104.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire. 105.

Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipſes & hyperbolæ deſcribantur, rectaſque invenire iiſdem curvis æquales. 107.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evo-

evolutione illa deſcribatur; & oſtendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica exiſtat, cui recta linea æqualis dari poſſit. 108.

De Centro Oſcillationis, ſeu Agitationis. 107.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani exiſtentibus, ſi à ſingulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ ſingulæ in ſua pondera ductæ, tantundem ſimul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia. 123.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet compoſito, ſi ſingula ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti. 128.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, applicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni. 131.

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel ſecet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis ſingulis minimis & æqualibus, in quas figura diviſa intelligitur; invenire ſummam quadratorum ab omnibus iſtis perpendicularibus; ſive planum, cujus multiplex, ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit. 135.

Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano æqualis. 138.

Si figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt. 140.

Datâ figurâ ſolidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam tranſeat; diviſâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire ſummam omnium quæ ab ipſis fiunt quadratorum, ſive planum, cujus multiplex ſecundum particularum numerum, dictæ quadratorum ſummæ æquale ſit. 142.

Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt. 148.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas ſuſpenſa figura diviſa intelligitur, æquetur qua-

quadratis omnium diſtantiarum ab axe oſcillationis; ſi illud applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter axem oſcillationis & centrum gravitatis ſuſpenſæ magnitudinis, orietur longitudo penduli ſimplicis ipſi iſochroni. 149.

Si ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis. 150.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius ſuſpenſa, agitetur; erunt, ſicut diſtantiæ axium oſcillationis à centro gravitatis inter ſe, ita contraria ratione diſtantiæ centrorum oſcillationis ab eodem gravitatis centro. 153.

Centrum oſcillationis & punctum ſuſpenſionis inter ſe convertuntur. 154.

Quomodo in figuris planis centra oſcillationis inveniantur. 154.

Centrum oſcillationis Circuli. 157. *Rectanguli.* Ibid. *Trianguli iſoſcelis.* 158. *Parabolæ.* Ibid. *Sectoris circuli.* Ibid. *Circuli, aliter quam ſupra.* 160. *Peripheriæ circuli.* Ibid. *Polygonorum ordinatorum.* 161.

Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur. 165.

Centrum oſcillationis in Pyramide. 166. *Coni.* 167. *Sphæræ.* Ibid. *Cylindri.* 168. *Conoidis Parabolici.* Ibid. *Conoidis Hyperbolici.* 169. *dimidii Coni.* Ibid.

Horologiorum motum temperare addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit. 172.

Centri oſcillationis rationem haberi non poſſe, in pendulis inter Cycloides ſuſpenſis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur. 177.

De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione. 178.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt. 182.

Secundi Horologii Conſtructio è circulari pendulorum motu deducta. 185.

De Vi Centrifuga ex motu circulari, Theoremata. 188.

BREVIS INSTITUTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES. 193. *Hagæ-Com.* Belgice edita.

Reducere horologia ad rectam dierum menſuram vel cognoſcere quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur. 196.

Tabula Æquationis Dierum. 198.

Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo verſaris. 202.

Mari invenire horam diei. 204.

Quomodo ex obſervatione ortus & occaſus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat. 205.

Excerpta ex literis de ſucceſſu horologiorum datis Londini $\frac{13}{23}$ Januarii 1665. 211.

Experimentum circa pendula. 213. *Journal des Sçavans* 23. Fevr. 1665.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA. 215.

Obſervationes Abbatis Catalani in propoſitionem, quæ fundamentum

 eſt

eſt 4æ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii 217. *Journal des Sçavans* 1682 in initio.

Domini Abbatis Catalani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis. 219 *ibid.*

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus reſpondet obſervationi Abbatis Carelani in 4am. propoſitionem Tractatus de Centris oſcillationis. 222. *ibid.* 29. Junii 1682.

Exceptio Abbatis Catalani ad reſponſionem Hugenii. 225. *ibid.* 20. Julii 1682.

Objectio Abbatis Catalani contra motum Pendulorum in Cycloidibus. 227 *ibid.* 7. Sept. 1682.

Reſponſio ad objectiones Hugenii adverſus methodum Abbatis Catalani de determinando Centro Oſcillationis 228. *ibid.* 14 Sept. 1682.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Baſileæ ad Autorem Diarii Pariſienſis, de Controverſia, inter Abbatem Catalanum & Hugenium, de Centro oſcillationis. 230. *ibid.* 24. April. 1684.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii ad Auctores Diarii Pariſienſis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus reſponſionem ad exceptionem Dni. Abbatis Catalani, de centro Oſcillationis. 232. *ibid.* 3. Julii 1684.

Reſponſio Dni. Abbatis Catalani ad Literas Dni. Bernoulli de Controverſia ſua cum Dno. Hugenio de centro Oſcillationis. 235. *ibid.* 11. Sept. 1684.

Dni. Bernoulli narratio controverſiæ inter Dnos. Hugenium & Abbatem Catalanum agitatæ de centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dni. Catalani. 237. *Acta eruditorum Lips.* menſis Julii. 1686.

Litteræ Dni. Marchionis de l' Hôpital ad Dum. Hugenium, in quibus contendit, ſe regulam hujus Auctoris de Centro Oſcillationis penduli compoſiti demonſtrare per cauſam Phyſicam, & reſpondere ſimul Dno. Bernoulli. 242. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis Junii. 1690.

Obſervationes Dni. Hugenii in literas præcedentes & in relationem Dni. Bernoulli, cujus in iis fit mentio. 246. *ibid.*

MACHINÆ QUÆDAM ET VARIA CIRCA MECHANICAM 249.

Excerpta ex Litteris Domini Hugegenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactiſſimorum ac portatilium concernentibus. 253. *Journal des Sçavans.* 25. Febr. 1675.

Nova Libella, Teleſcopio inſtructa, propriam ſecum ferens probationem & quæ in unica ſtatione verificatur, & rectificatur. 254. *ibid.* 9. Jan. 1680.

Rectificationis Libellæ Demonſtratio. 258. *ibid.* 26. Feb. 1680.

Aſtroſcopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata. 261. *Hagæ. Com.* 1684. *in quarto.*

Auctarium. 273. *ibid.*

Excerpta ex literis Dni. Hugenii de novâ methodo conſtruendi' Barometrum. 276. *Journal des Sçavans* 12. Dec. 1672.

Nova vis movens mediante pulvere ni-

nitrato & aëre. 280. *Divers ouvrages de Mathmatique & de Phiſique de Mrs. de l' Academie Rojale des ſciences* p. 320.

Demonſtratio Æquilibrii Bilancis. 282. *ibid.* p. 113.

Si ſuper planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem verſus ad quam applicatur erit major, quam ſi poſitum ſit prope dictam lineam. 283.

Si planum Horizontale; oneratum plurimis ponderibus, maneat in æquilibrio, impoſitum lineæ rectæ, quæ id ſecat in duas partes, centrum gravitatis plani ſic onerati erit in ipſa lineâ rectâ. 284.

Duo gravia commenſurabilia appenſa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, ſi brachia ſint in ratione reciproca gravium. 284.

De potentiis fila funeſve trahentibus. 287. *ibid.* p. 317.

Datis poſitione quotlibet punctis; ſive in eodem plano fuerint, ſive non: ſi à puncto quod eorum commune eſt gravitatis centrum, ad unumquodque datorum fila extendantur, eaque ſingula trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro. 288.

Solutio problematis a G G. Leibnitio propoſiti. 290. *Nouvelles de la republique des lettres Menſis Oct.* 1687.

Detegere lineam juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat. 290.

Chriſtiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile ſe pondere proprio curvat. 291. *Acta Erud. Lips.* menſis Junii 1691.

Hugenii Annotationes in Librum Pariſiis 1689. editum, de Manuaria Nautica. 292. *Bibliotheque Univerſelle.* menſis Sept. 1693.

Reſponſum Dni. Renaldi ad Dominum Hugenium. 296. *Journal des Sçavans* 16. & 27. Maji. 1695.

Exceptio Dni. Hugenii ad Reſponſum Dni. Renaldi. 305. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis April. 1694.

TOMUS SECUNDUS.

OPERA GEOMETRICA.

CHRISTIANI HUGENII THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO 309. *Lugd. Bat.* 1651. *in quarto.*

Omnis hyperboles portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa Baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera duarum, lateris tranſverſi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis. 323.

Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa

 Ba-

Baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione. 324.

In Semicirculo & quolibet circuli ſectore, habet arcus ad duas tertias rectæ ſibi ſubtenſæ hanc rationem, quam ſemidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum gravitatis. 326.

ἘΞΈΤΑΣΙΣ CYCLOMETRIÆ Clariſſimi Viri Gregorii à S. Vincentio, S. J. editæ Anno 1647. 328. *ibid.*

Chriſtianii Hugenii ad C. V. Franc. Xaverium Ainſcom. S. J. EPISTOLA, qua diluuntur ea quibus ἐξέτασις Cyclometriæ Gregorii à Sto. Vincentio impugnata fuit. 341. *Hagæ. Com.* 1656. *in quarto.*

Epiſtola Carteſii. 347.

CHRISTIANI HUGENII DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. Accedunt ejuſdem Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones. 351. *Lugd. Bat.* 1654 *in quarto.*

Omnis circulus major eſt polygono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero. 361.

Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti. 361.

Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero. 362.

Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores. 364.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti. 365.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam. 366.

Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem. 368.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem ſumere. 370.

Omnis circuli circumferentia minor eſt minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum ſimilium, quorum alterum ordinate circulo inſcriptum ſit, alterum circumſcriptum. Et circulus minor eſt polygono iſtis ſimili cujus ambitus majori mediarum æquetur. 373.

Si inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem. 376.

Si diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum

num diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem. 377.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera. 378.

Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin. 380.

Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo. 382.

Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ ſubtenduntur 384.

CHRISTIANI HUGENII ILLVSTRIUM QVORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES. 388 Ibid.

Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam 388.

Cubum invenire dati cubi duplum. 391.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire. 393

Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat. 396.

Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla. 397.

Rhombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat. 397.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppoſitum angulum tranſeat. Oportet autem datam non minorem eſſe quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit. 399.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii. 403.

CONTROVERSIA DE CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA. 405.

Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura Authore *Jacobo Gregorio.* 407. *Patavii* 1668. *in quarto.*

Serierum terminationes invenire. 423. & 426.

Ex data quantitate, eodem modo compoſita a duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediate ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire. 427.

Sectorem circuli, ellipſeos, vel hyperbolæ, non eſſe compoſitum analyticè à triangulo ad centrum inſcripto & trapezio circumſcripto. 429.

Dato circulo æquale invenire quadratum. 446.

Ex dato ſinu invenire arcum. 448.

Ex dato arcu invenire ſinum. 448.

Invenire quadratum æquale ſpatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno aſymptoto & duabus rectis alteri aſymptoto parallelis; quod ſpatium æquale eſt ſectori hyperbolico cujus baſis eſt eadem curva. 449.

Propoſiti cujuſcunque numeri logarithmum invenire. 452.

Ex dato logarithmo invenire ejus numerum. 459.

Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, ſemicirculum in ratione data dividere. 460.

Hugenii Obſervationes in Librum Jacobi Gregorii, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 463. *Journal des Sçavans* 2. Julii. 1668.

Invenire per logarithmos dimenſionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Aſymptotis & duas lineas parallelas ad alteram Aſympton. 465.

Domini Gregorii Reſponſum ad Animadverſiones Domini Hugenii, in ejus Librum, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 466. *Philoſophical Tranſactions.* n. 37.

Excerpta ex Literis Dni. Hugenii de Reſponſo, quod Dnus. Gregorius dedit ad Examen Libri, cui Titulus eſt, Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 472. *Journal des Sçavans* 12. Nov. 1668.

Excerpta ex Epiſtola D. Jacobi Gregorii, continente quaſdam ejus Conſiderationes, ſuper Epiſtola D. Hugenii, impreſſa in Vindicationem Examinis ſui Libri, de Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura. 476. *Philoſophical Tranſactions.* n. 44.

CHRISTIANI HUGENII GEOMETRICA VARIA. 483.

Conſtructio Loci ad Hyperbolam per Aſymptotos. 485. *Divers ouvrages de Math. & de Ph. de Mrs. de l'Acad. R.* p. 322.

Demonſtratio Regulæ de Maximis & Minimis. 490. *ibid.* p. 326.

Regula ad inveniendas Tangentes linearum curvarum. 498. *ibid.* p. 330.

Chriſtiani Hugenii Epiſtola de Curvis quibuſdam peculiaribus. 507. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* menſis Febr. 1693.

Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ibid.

Alia curva cujus longitudo ope ipſius curvæ menſuratur. 508.

Quadratura Hyperboles adhibita curva illa. 508.

Curvæ ejuſdem deſcriptio mechanica. 509.

Varia de catinaria. 511.

Quadratura curvæ cujus æquatio eſt $x^3 + y^3 = xyn$. 514.

Problema ab Eruditis ſolvendum: a Johanne Bernoullio in Actis Lipſienſibus menſis Maji Ann. 1693. propoſitum. 515.

C. H. Z. De Problemate Bernoulliano in Actis Lipſienſibus propoſito. 516. *Acta Erud. Lips.* menſis Oct. 1693.

C. H. Z. Conſtructio univerſalis Problematis a Clariſſimo Viro Joh. Bernoullio propoſiti. 518. *ibid.* Sept. 1694.

T O-

INDEX RERUM.

TOMUS TERTIUS.

OPERA ASTRONOMICA.

CHRISTIANI HUGENII DE SATURNI LUNA OBSERVATIO NOVA 521. *Hagæ-Com* 1656.

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, SYSTEMA SATURNIUM, ſive de Cauſis mirandorum Saturni Phænomenon; & Comite ejus Planeta novo. 527. *Hagæ Com.* 1659.

Teleſcoporium noſtrorum Deſcriptio. 537.

Quædam circa planetas & fixas obſervata. 539.

In Jovis diſco zonæ candicantes. 539.

In Marte zona obſcura. 540.

Fixarum diametri nulla latitudine. 540.

Phænomenon in Orione novum. 540.

Circa Saturnum obſervationes. 541.

Saturnus brachiorum expers inventus. 544.

Brachia Saturno renata. 545.

Brachia Saturni in anſas mutari cœpta. 546.

Anſæ Saturni amplius patefactæ. 547.

Comes infra Saturnum tranſire viſus 548.

Idem ſupra Saturnum tranſiens. 548.

Lunæ Saturniæ periodus. 548.

Eadem periodus accuratius ſupputata. 549.

Menſis Saturnicolarum vera longitudo. 551.

Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita ſua reſpectu fixarum. 552.

Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur. 553.

Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem. 559.

Non etiam unam quam alteram citius ad medium Saturni Corpus applicari. 559

Hevelii hypotheſis circa anſas examinatur. 560.

Cauſæ phænomenôn Saturni à Robervallio excogitatæ. 561.

Hodiernæ Siculi circa eadem phænomena opinio. 562.

Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata. 564.

Annulo Saturnum cingi. 565.

Eum ad Eclipticæ planum obliquè poſitum eſſe 565.

Occurritur iis quæ de annulo objici poſſent. 566.

Saturnii major diameter Æquatori parallela oſtenditur. 567.

Hevelii de inclinatione anſarum contraria opinio. 569.

Ricciolus ſibi contrarius Lib. 7. Almag. novi. 570.

Ulterior hypotheſeos noſtræ explanatio. 570.

Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum. 571.

Clarior Saturnus propter anſas cernitur. 572.

Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus. 572.

Quomodo anſarum latitudo contrahatur. 573.

Quomodo patulæ videri anſæ deſinant. 573.

Majorem Saturni diametrum neceſſario Æquatori parallelam ſemper videri. 574.

Ro-

Rotundæ phaſeos cauſæ. 575.
Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans. 576.
Saturnus quando neceſſario rotundus ſpectari debeat. 578.
Quænam Saturnicolis ſint loca æquinoctiorum. 580.
Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur. 585.
Quibus temporibus rotunda phaſis reverſura ſit prædicitur. 587.
Quando latiſſimæ omnium anſæ apparituræ ſint. 588.
De Saturni magnitudine & à terris diſtantia. 589.
Planetarum diametri. 589. & ſeq.
Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio. 591.
Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima. 593.
Diametri Veneris obſervatio. 594.
EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI BREVIS ANNOTATIO IN SYSTEMA SATURNIUM CHRISTIANI HUGENII ad Sereniſſimum Principem Leopoldum Magni Ducis Hetruriæ fratrem. 597. *Hagæ-Com.* 1660.
Honorati Fabri, S. J. de Saturno Sententia. 610.
CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI, ad Sereniſſimum Principem Leopoldum ab Hetruria. 619. *Hagæ-Com.* 1660.
Fabriani Syſtematis examen. 632.
CHRISTIANI HUGENII DE SATURNI ANNULO OBSERVATIONES. 635
Obſervationes in Saturnum Pariſiis habitæ in Bibliotheca Regia. 637. *Journal des Sçavans* 11. Febr. 1669.
Vera annuli inclinatio. 637.
Phaſis rotunda. 638.
Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni. 638. *ibid.* 12. Dec. 1672.
Brachia Saturno renata. 638.
Umbra in diſco Saturni. 638.
Saturnus rotundus. 639.
Linea æquinoctialis annuli. 640.
CHRISTIANI HUGENII ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ, SIVE DE TERRIS COELESTIBUS, EARUMQUE ORNATU, CONJECTURÆ. 641. *Hagæ-Com.* 1698.
Fuiſſe qui Planetis incolas tribuerint, ſed nihil præterea de iis inquiſiviſſe. 646.
Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari. 647.
Conjecturas non eſſe vanas, quia non plane certæ. 649.
Ad ſapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur. 649.
Copernici Syſtema exponitur. 650.
Copernici doctrinam quæ rationes confirment. 650.
Planetarum magnitudinis inter ſe & ad Solem ratio. 651.
Micrometris præſtare lamellas virgulaſve tenues. 652.
Tellurem Planetis, & hos Telluri recte aſſimilari. 652.
Ex ſimilitudine in hiſce recte argumenta peti 652.
Planetas ſolidos eſſe & gravitate pollere. 653.
Nec deeſſe illis animalia. 653.
Ut nec plantas. 654.
Non nimiam in hiſce fingendam diſſimilitudinem. 655.
Aquas a Planetis non abeſſe 656.
Noſtræ tamen non prorſus ſimiles. 657.

Nec

Nec alia ratione illic neſci & propagari ſtirpes quam apud nos. 657.
Idem & de animalibus verum eſſe. 658.
Summam animalium varietatem eſſe in Planetis. 660.
Idem in ſtirpibus locum habere. 660.
In Planetis eſſe animantia, quæ ratione utantur. 661.
Non obſtare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient. 662.
Nec rationem in Planetarum incolis à noſtra diverſam eſſe. 663.
Nec deeſſe illis ſenſus. 664. & ſeq.
Nec horum ſenſus longe alios eſſe ac noſtratium. 667.
Ignem quoque Planetis communem eſſe. 669.
Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non recte conjici. 670.
In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat. 670.
Et inter ea Hominibus ſimilia. 670.
Planetarum incolas ſcientias excolere, & inter eas, Aſtronomiam. 672.
Et quæ ei inſerviunt artes mechanicas. 673.
Ut & Geometriam, Arithmeticam. 674.
Et ſcribendi artem. 674.
Opticam. 674.
Has ſcientias homini præter naturam non eſſe. 675.
Planeticolas manus habere. 676.
Et pedes. 677.
Erectos oculos, vultumque. 677.
Nec tamen hinc ſequi eorum formam noſtræ plane ſimilem. 678.
Planeticolas nobis vel æquales vel majores eſſe. 679.
Eos in ſocietate vivere. 680.
Colloquiorum jucunditate frui. 680.
Domos adverſus pluviam exſtruere. 681.
Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere. 682.
Muſicam. 683.
Quæ tamen à noſtra diverſa eſſe poſſet. 684.
Cur conſonantia diapente poſt aliam ſimilem vitioſe ponatur? 685.
Demonſtratio temperamenti in tono vocis adhibendi. 685.
Recenſentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus. 686.
Ex Metallis. 688.
Ex aqua, & aëre, variiſque artificiis. 689.
Ex iis, quæ noſtra ætate inventa ſunt. 689.
Illa omnia veriſimiliter non extare in Planetis, ſed aliis æque dignis rependi. 690.
Chriſtiani Hugenii Coſmotheoros, Liber II. 691.
Kircheri iter extaticum examinatur. 691.
Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio. 694.
Qualis in Venere. 695.
In Marte. 696.
Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præſtare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine. 697.
Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum ſatellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram. 698.
Tempora periodorum comitum Jovialium. 699.
Quænam ſit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & quî cognoſci queat. 700.
Itidem in Saturno. 700.

In Jove dies eſſe horarum quinque. 700.
Et perpetuum æquinoctium. 701.
Planeticolis ſtellas fixas eodem modo apparere, ac nobis. 702.
Qualis ſit Planetarum aſpectus, dierum ratio in Saturno. 702.
Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno. 703.
De Luna pauciora conjici poſſe. 704.
Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem eſſe. 705.
Lunam montibus & vallibus diſtinctam eſſe. 705.
Carere vero mari. 705.
Fluviis. 706.
Nubibus. 706.
Aëre & aqua. 706.
Hinc de animantibus & ſtirpibus incertiorem conjecturam eſſe. 707.
Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere. 707.
Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c. 708.
Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre eſt. 709.
Solaris mundi ſecundum veram proportionem deſcriptio. 710.
Immenſitas intervallorum inter Solem & Planetas illuſtratur comparatione cum motu globi è tormento emiſſi. 711.
In Sole omnem conjecturam deficere. 712.
Faculas Solares incertas videri. 712.
Propter calorem nulla illic vivere corpora noſtris ſimilia. 712.
Stellas fixas totidem eſſe Soles. 713.
Eas ſpargi per vaſta cæli ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri. 714.
Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur. 714.
Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, eſſe Planetas. 715.
Modus probabiliter inveſtigandi diſtantiam fixarum à Sole. 717.
Unumquemque Solem vortice cingi, ſed Carteſianis multum diſſimili; contra quem pluribus diſputatur. 719.

TOMUS QUARTUS

OPERA MISCELLANEA.

DE RATIOCINIIS IN LUDDO ALEÆ 723. *Ad calcem Exercitationum Math Schotenii.*
Si a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere* $\frac{a+b}{2}$. 728.
Si a, b, *vel* c, *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt:* $\frac{a+b+c}{3}$. 729.
Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet a, *ſit* p; *numerus autem caſuum quibus mihi eveniet* b, *ſit* q; *ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit* $\frac{pa+bq}{p+q}$. 730.
De facienda diſtributione inter diverſos col-

colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt. 731.

De facienda diſtributione, ſi unus mihi deficiat luſus & colluſori meo tres luſus. 732.

Item, ſi mihi deficiant duo luſus & colluſori meo tres luſus. 733.

Item, ſi mihi deficiant duo luſus, & colluſori meo quatuor. 733.

Item, poſitis tribus colluſoribus, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſus. 734.

Item, poſitis tot colluſoribus, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſus deficiunt. 735.

Tabula pro 3 colluſoribus. 736.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat. 738.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat. 739.

Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat. 740.

Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur. 741.

Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille vero quam primum ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipſius ſortem. 742.

Coronidis loco ſubjungantur V. Problemata. 743.

NOVUS CYCLUS HARMONICUS. 745. *Hiſtoire des ouvrages des Sçavans.* Oct. 1691.

Tabula Diviſionis octavæ in partes 31. æquales, & diviſionis Octavæ ſecundum Temperamentum vulgare. 752.

VARIA DE OPTICA. 755.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo Dni. Newtoni. 757. *Journal des Sçavans* 29. Febr. 1672.

Conſtructio Problematis optici. Propoſitio 39 Libri V. Alhazeni, & 22. Lib. VI. Vitellionis. 759.

Datis in eodem plano duobus punctis & circulo; inveniendum eſt punctum in peripheria circuli, ita ut lineæ ex puncto invento ad puncta data faciant cum radio circuli, per punctum inventum ductum, angulos inter ſe æquales. 759. Ouvrages de Mrs. de l'Acad. Roj. pag. 376.

Aliter. *Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.* 760. Philoſophical Tranſactions. n. 97.

Compendium. 761. Ibid. n. 98.

Alia ſolutio. 761.

Problema Alhazeni.] *Dato Circulo, & punctis duobus, invenire punctum in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ lineæ ad puncta data faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* 761. Ibid. n. 98.

Excerpta ex litteris Dni. Hugenii, Acad. Reg. Scient. Socii, ad Auctorem

rem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato. 764. *Journal des Sçavans.* 15. Aug. 1678.

Experimenta Physica. 767.

Excerpta ex literis Dni. Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ. 769. *ibid.* 25. Jull. 1672.

Experimentum I. *Aqua, ſublatâ aëris preſſione, hæret in tubo.* 770.

Experimentum II. *Notabile quid in deſcenſu aquæ aëre purgatæ.* 771.

Experimentum III. *Adhibito ſpiritu vini loco aquæ.* 772.

Experimentum IV. *Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauſtus, hæc corpora iterum intrat.* 773.

Experimentum V. *Laminæ metallicæ arcte inter ſe cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.* 775.

Experimentum VI. *Effectus Siphonis in vacuo.* 776.

FINIS.

CATALOGUS
QUORUNDAM LIBRORUM,
Qui apud JANSSONIOS VAN DER AA, Bibliopolas Lugduni Batavorum, venales proſtant.

Abregé de l'Hiſtoire generale des Turcs, par Vanel, 12°. 4 *voll. avec fig.*
Admiranda rerum admirabilium Encomia, 12°.
Æſchinis Socratici Dialogi tres, per Horreum, 8°. Gr. & Lat.
Alaric ou Rome vaincuë, Poëme Heroïque, par Monſr. de Scudery 12°. *avec fig.*
AMINTAS HERDERSPEL VAN T. TASSO, DOOR WELLEKENS, 8°.
Andry de la Generation des Vers dans le Corps de l'Homme 12°.
Annales de la Cour & de Paris, pour les Années 1697 *&* 1698. 12°.
Annus Sacer Poëticus, ſive ſelecta de Divis Cœleſtibus Epigrammata 12°. 2 Tomis.
Antonii Jus feudale, cum additamentis Strykii, 4°.
Apologie pour leurs Sereniſſ. Majeſtés Britanniques, contre un infame Libelle intitulé le vray Portrait de Guillaume Henry de Nauſſau, nouvel Abſçalom, nouvel Herode, nouveau Cromwel, nouveau Neron, 12°.
—— *pour les Proteſtans, ou l'Auteur juſtifié pleinement leur conduite & leur ſeparation de la Communion de Rome.* 12°.
Athanaſii Opera, Gr. Lat. fol. 2 Voll.
Aurea Bulla Caroli V. Imp. de jure & ordine ſuccedendi in ducatum Mediolanenſem, &c. 4°.
Bauhuſii & Cabillavi Epigrammata, 24°.
Bellefontaine Medicine Dogmatique Mechanique, avec la Pharmacopée Rationelle, 12°. 2 voll.
BELLOSTE CHIRURGIEN D'HÔPITAL, 12°. avec fig.
Biblia Græca LXX. Interpretum, curâ L. Bos, 4°.
Bidermanni Acroamatum Academicorum Libri III. 12°.
Biſſchop Chorus Muſarum, ſive Poëmata, 8°.
Blancardi Opera Medica, Theoretica, Practica & Chirurgica, 4°.
Blegny Art de guerir les Maladies Veneriennes, 12°. 3 Tomes *avec fig.*
Boleſlavii Homo bene moriens 12°.
—— Gemmeum monile Animæ Chriſtianæ, 12°.
Bontekoe Metaphyſica, OEconomia Animalis & Geulinx Phyſica vera, 8°.
Borgeſii Enodatio Juris Naturæ, 8°.
Breſmal Circulation des Eaux ou l'Hydrographie des Minerales d'Aix & de Spa, 8°.
Bruguier Reponſe au Livre intitulé le Renverſement de la Morale de Jeſu-Chriſt, par les Erreurs des Calveniſtes. 12°.

Burgundius ad Conſuetudines Flandriæ aliarumque Gentium, 12°.
Camerarii Symbola ac Emblemata Ethico Politica, 8°.
Catalogus Librorum Manuſcriptorum Angliæ & Hiberniæ, fol.
Cherubin Effets de la Force de la Contiguité des Corps, 12°.
Choix des bons Mots, 12°.
Claubergii Opera Omnia Philoſophica, curâ Schalbruchii, 4°.
Clos de Aquis Mineralibus Galliæ & de Mixtis naturalibus, 12°.
Crebilon Oeuvres, 12°.
Defence de la Monarchie de Sicile contre les Entrepriſes de la Cour de Rome, 12°.
Deſcription du Chateau de Verſailles, 12°. avec fig.
DIVORCE CELESTE PAR PALLAVICIN, 12°.
Donkers Idea Febris petechialis, 8°.
Douſæ Poëmata, 8°.
EEUWIGDUURENDE LIEFDES ALMANAK, 8°.
Epiſtolæ Præſtantium ac Eruditorum Virorum, fol. Charta Maj.
Flâviſſæ Poëticæ ſive Electorum Poëticorum Theſaurus Sacro-Profanus, 8°.
Fleetwood Inſcriptionum Antiquarum Sylloge, 8°.
Gaſſendi Abregé de la Philoſophie, 12°. 7 Voll.
GOBART TRACTATUS PHILOSOPHICUS DE BAROMETRO, 12°. cum fig
Guide, ou nouvelle Deſcription d'Amſterdam, 8°.
Hartmanni Praxis Chymiatrica, 8°.
Hartſoeker Principes de Phyſique, 4°.
HAVERCAMP DE NUMMIS ALEXANDRI MAGNI, 4°. cum fig.
Herbinius de Cataractis in Genere, 4°. cum fig.
Heucheri novi Proventus Horti Medici Acad. Vitembergenſis, 4°.
Hildani Obſervationes & Epiſtolæ Chirurgico-Medicæ, 4°. 2 Voll.
Hippocratis Aphoriſmi per Almeloveen, 24°.
—— Metrica paraphraſi tranſlati ab H. v. Poot. 24°.
HISTOIRE DES INDES ORIENTALES PAR Mr. SOUCHU DE RENNEFORT, 12°.
—— *des Iles Antilles de l'Amerique* 4°. avec fig.
Homere Iliade & Odyſſée, par Mad. Dacier, 12°. 6 Tomes, avec fig.
—— *Iliade Poëme avec un diſcours ſur Homere, par Mr. de la Motte.* 12°.
Huetius de Interpretatione, 8°.
Huygens Traité de la Lumiere. 4°.
Jablonski Diſquiſitio de Lingua Lycaonica, 4°.
Jean danſe mieux que Pierre, Pierre danſe mieux que Jean. 12°. 5 Voll.
Inſtruction pour reunir les Egliſes pretendues Reformees a l'Egliſe Romaine, par Mr. Comiere. 12°.
Jurieu Juſtification de la Morale des Reformez, contre les Accuſations de Mr. Arnaud, 8° 2 Tomes.
Jus Auſtriacum in ſucceſſione Regnorum Hiſpaniæ vindicatum, 4°.

Knib-

Knibbe Manuductio ad Oratoriam Sacram, 8°. 2 Voll.
Lamy Elemens de Mathematique, ou traité de la Grandeur en General, 12°.
Leti Critique Hiſtorique, Politique, Morale, Economique & Comique, ſur les Loteries Anciennes & Modernes, &c. 12°.
Letres Provinciales par Louis Montalte 8°. 3 Voll.
—— *de Fr. Rabelais, avec des Obſervations,* 8°.
—— *du Cardinal Bentivoglio, Ital. franc.* 12°.
Lipenii Biblotheca Juridica, Struvii, fol.
Logique par Mrs. de Port Rojal., 12°.
—— *courte & facile par le Sr. Du Boisverd.* 8°.
LYK-PREDIKATIE OVER DE DOOD VAN D' HR. MITSEN, DOOR J. DE HARTOGH, 4°.
Machiavelli Hiſtoria Florentina, 12°.
Malvezzi Opere Hiſtoriſche e Politiſche, 12°.
—— *Il Tarquino Superbo,* 12°.
Manzini Opere, 12°.
—— *furori della Gioventu Eſercitii Rhetorici,* 12°.
Marechal Francois, 12°.
Maſcampi Epitome Hiſtoriæ Civilis, 8°.
Medulla Juſtinianea, 12°.
Melanges Hiſtoriques, 12°.
Menken de la Charlatanerie des Savans, 8°.
Moïens de reunir les Proteſtans avec l'Egliſe Romaine. 12°.
Mollenbroccius de Arthritide, 8°.
Monavii Bronchotomia, quæ eſt gutturis aperiendi artificioſa ratio, 8°.
Mort Idea Actionis Corporum 12°.
MUNDI OPERA OMNIA MEDICO-PHYSICA, 8°.
Oeuvres de Mr. Le Noble 12°. 19 Voll.
Oudini Commentarius de Scriptoribus Eccleſiæ Antiquis, fol. 3 Voll.
Pacii Analyſis & Iſagoge 8°. 2 Voll.
Parladorii Opera Juridica, 4°. 2 voll.
Paſſe partout Galant, 12°.
PASTOR FIDO, 32°. Appreſſo P. Mortier.
Petau Hiſtoire Univerſelle, 12°. Paris 5 Tomes.
Pilpay Conſeils & Maximes, 8°.
Plazzonus de Partibus Generationis inſervientibus, 12°.
PLUIMERS GEDICHTEN 4°. TWEEDE DEEL.
Pourtraits des plus Celebres Profeſſeurs de Leide, 4°.
Preparations pour la Ste. Cene, avec le Voyage de Bethel, 12°.
Rochefoucault Reflexions ou Sentences & Maximes morales, 12°.
Schiere Doctrina Teſtamentorum & Fœderum omnium Divinorum, 4°.

Se-

Senecæ & Syri Mimi Sententiæ, cum Notis Diverſorum & Gruteri, 8°.
Serre dolci Pensieri sopra la Morte, 8°.
Theatre et autres Poesies de Madem: Barbier, 12°. avec fig.
Variolarum Methodus per Transplantationem, 8°.
Veſlingii Syntagma Anatomicum, ſive Anatomia, 4°. cum fig.
Vieussens novum Vasorum Corporis Humani Systema, 8°.
Vignole Regle des cinq Ordres d'Architecture, 4°. avec fig.
Voyage de Groenland, par le Pere Cordelier Pierre de Meſange, 12°. 2 Voll.
—— *aux Côtes de Guinée & en Amerique*, 12°.
—— *Le Prudent Voyageur, par L. du May*, 12°. 3 Voll.
Wechwyser der Eenvuldigen, door J. de Hartogh, 8°.
Weſtenberg ad Pandectas, 8°.
Dictionaire Engliſch and Frenſch & Frenſch and Englich of Miege 8°.
—— Italiaanſch en Nederduyts, door Moſes Giron, 4°.
—— Antiquitatum Romanarum & Græcar. per Danetum, in Uſum Delphini, 4°.
Grammaire Francoiſe d'un tour nouveau, compoſée en faveur de ceux qui preferent la Pratique a la Theorie, par Mr. Derbaud, 12°. avec fig.

Multi etiam alii apud Eoſdem reperiuntur.

AVIS AU RELIEUR.

LE Relieur prendra garde que le papier qui eſt à côté des Figures doit être conſervé pour faire deborder les Figures hors du Livre, & les placer ſuivant la page marquée ſur chaque planche.

BERIGT AAN DEN BOEK-BINDER.

DEn Boek-binder zy gewaarſchout het papier ter zyde de Figuren niet af te ſnyden; maar zodanig in te ſetten, dat de Figuren buyten het Boek uitſlaan: dezelven moeten geplaaſt werden volgens de paginaas op yder Tabel genoteert.

01